Modelos de Otimização Discreta

Introdução e Motivação

- Modelos de programação dinâmica (PD):
  - se aplicam a modelos lineares/não lineares, discretos/contínuos
  - requer separabilidade
  - computacionalmente exigente em problemas complexos

- Maioria dos problemas não possuem estrutura conveniente para PD

- Neste capítulo: exemplos e classes de problemas de otimização discreta

Carga Ótima de Alto Fornos

	Composição(%)				Disponibilidade	Custo
	Carbono	Niquel	Cromo	Molibidênio	(kg)	($/kg)
Escória primária	0.80	18	12	-	75	16
Escória secundária	0.70	3.2	1.1	0.1	250	10
Escória terciária	0.85	-	-	-	ilimitada	8
Escória quaternária	0.40	-	-	-	ilimitada	9
Niquel	-	100	-	-	ilimitado	48
Cromo	-	-	100	-	ilimitado	60
Molibidênio	-	-	-	100	ilimitado	53
Mínimo	0.65	3.0	1.0	1.1		
Máximo	0.75	3.5	1.2	1.3		

- cargas de 1000 kg
- restrições de composição química
- escórias primária e secundária: utilizar o total disponível se for o caso

- problema: carga de custo mínimo ?

variáveis na forma $x_j = 0$ ou 1 são modeladas

substituindo $x_j = u_j y_j$, $y_j = 0$ ou 1

$$\min\ 16(75)y_1 + 10(250)y_2 + 8x_3 + 9x_4 + 48x_5 + 60x_6 + 53x_7$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.a.}\quad & 75y_1 + 250y_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 && = 1000 \\
& 0.080(75)y_1 + 0.0070(250)y_2 + 0.085x_3 + 0.0040x_4 && \geq 6.5 \\
& 0.080(75)y_1 + 0.0070(250)y_2 + 0.085x_3 + 0.0040x_4 && \leq 7.5 \\
& 0.180(75)y_1 + 0.032(250)y_2 + 1.0x_5 && \geq 30 \\
& 0.180(75)y_1 + 0.032(250)y_2 + 1.0x_5 && \leq 35 \\
& 0.120(75)y_1 + 0.011(250)y_2 + 1.0x_6 && \geq 10 \\
& 0.120(75)y_1 + 0.011(250)y_2 + 1.0x_6 && \leq 12 \\
& 0.001(75)y_2 + 1.0x_7 && \geq 11 \\
& 0.001(75)y_2 + 1.0x_7 && \leq 13 \\
& x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \\
& y_1, y_2 = 0 \text{ ou } 1
\end{aligned}
$$

$$\boxed{y_j = \begin{cases} 1 & \text{escória } j \text{ escolhida} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}}$$

- cargas de 1000 kg
- restrições de composição química
- custo de *set-up*: ingredientes 1, 2, 3 e 4 só podem ser usados depois de uma etapa de injeção que custa $350,00 cada uma.

- problema: carga de custo mínimo considerando custo *set-up* ?

Custo de *set-up*

Definimos $y_j = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x_j > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$ e adicionamos a restrição

$x_j \leq u_j y_j$ onde u_j é um limitante superior (dado ou derivado)

$$\min \quad 16x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 48x_5 + 60x_6 + 53x_7 + $$
$$+ 350y_1 + 350y_2 + 350y_4 + 350y_5$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 && = 1000 \\
& 0.080x_1 + 0.0070x_2 + 0.085x_3 + 0.0040x_4 && \geq 6.5 \\
& 0.080x_1 + 0.0070x_2 + 0.085x_3 + 0.0040x_4 && \leq 7.5 \\
& 0.180x_1 + 0.032x_2 + 1.0x_5 && \geq 30 \\
& 0.180x_1 + 0.032x_2 + 1.0x_5 && \leq 35 \\
& 0.120x_1 + 0.011x_2 + 1.0x_6 && \geq 10 \\
& 0.120x_1 + 0.011x_2 + 1.0x_6 && \leq 12 \\
& 0.001x_2 + 1.0x_7 && \geq 11 \\
& 0.001x_2 + 1.0x_7 && \leq 13 \\
& x_1 \leq 75y_1 \\
& x2 \leq 250y_2 \\
& x_3 \leq 1000y_3 \\
& x_4 \leq 1000\,y_4 \\
& x_1, \ldots\ldots, x_7 \geq 0 \\
& y_1, \ldots\ldots, y_4 = 0 \text{ ou } 1
\end{aligned}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se } set - up \;\; j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$j = 1, \ldots\ldots, 4$$

Problema da Mochila (*Knapsack*)

	Característica, j					
	1	2	3	4	5	6
Custo ($1000)	10.2	6.0	23.0	11.1	9.8	31.6
Δ (km/h)	8.0	3.0	15.0	7.0	10.0	12.0

$$
\begin{array}{lll}
\max & 8x_1 + 3x_2 + 15x_3 + 7x_4 + 10x_5 + 12x_6 & \text{ganho} \\
\text{s.a.} & 10.2x_1 + 6.0x_2 + 23.0x_3 + 11.1x_4 + 9.8x_5 + 31.6x_6 \le 35 & \text{orçamento} \\
 & x_1, \cdots, x_6 = 0 \text{ ou } 1 &
\end{array}
$$

Alternativamente

$$
\begin{array}{lll}
\min & 10.2x_1 + 6.0x_2 + 23.0x_3 + 11.1x_4 + 9.8x_5 + 31.6x_6 & \text{custo} \\
\text{s.a.} & 8x_1 + 3x_2 + 15x_3 + 7x_4 + 10x_5 + 12x_6 \ge 30 & \text{ganho} \\
 & x_1, \cdots, x_6 = 0 \text{ ou } 1 &
\end{array}
$$

Alocação de Capital

				Orçamento ($)					
	Missão	2000/04	2005/09	2010/14	2015/19	2020/24	Valor	Não com	Depende de
1	satélite comunicação	6	-	-	-	-	200	-	-
2	microondas orbital	2	3	-	-	-	3	-	-
3	Io lander	3	5	-	-	-	20	-	-
4	órbita Urano 2020	-	-	-	-	10	50	5	3
5	órbita Urano 2010	-	5	8	-	-	70	4	3
6	exploração Mercúrio	-	-	1	8	4	20	-	3
7	exploração Saturno	1	8	-	-	-	5	-	3
8	imagem infravermelha	-	-	-	5	-	10	11	-
9	base satélite terrestre	4	5	-	-	-	200	14	-
10	estruturas orbitais	-	8	4	-	-	150	-	-
11	imagem colorida	-	-	2	7	-	18	8	2
12	tecnologia médica	5	7	-	-	-	8	-	-
13	plataforma orbital polar	-	1	4	1	1	300	-	-
14	satélite geo-síncrono	-	4	5	3	3	185	9	-
	Orçamento	10	12	14	14	14			

Problema: selecionar missões (projetos, investimentos, etc.) que proporcionam o maior valor, respeitando a dotação orçamentária (e limitação de recursos, se for o caso).

$$x_j = \begin{cases} 1 \text{ se missão } j \text{ é selecionada} \\ 0 \qquad\qquad\qquad \text{caso contrário} \end{cases}$$

Restrições orçamentárias

$$6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1x_7 + 4x_9 + 5x_{12} \le 10 \qquad (2000-2004)$$

$$3x_2 + 5x_3 + 5x_5 + 8x_7 + 5x_9 + 8x_{10} + 7x_{12} + 1x_{13} + 4x_{14} \le 12 \qquad (2005-2009)$$

$$8x_5 + 1x_6 + 4x_{10} + 2x_{11} + 4x_{13} + 5x_{14} \le 14 \qquad (2010-2014)$$

$$8x_6 + 5x_8 + 7x_{11} + 1x_{13} + 3x_{14} \le 14 \qquad (2015-2020)$$

$$10x_4 + 4x_6 + 1x_{13} + 3x_{14} \le 14 \qquad (2020-2024)$$

Exclusão mútua : $\sum x_j \leq 1$

$$x_4 + x_5 \leq 1$$

$$x_8 + x_{11} \leq 1$$

$$x_9 + x_{14} \leq 1$$

Dependência : $x_j \leq x_i$ (escolha de j depende de i)

$$x_{11} \leq x_2$$

$$x_4 \leq x_3$$

$$x_5 \leq x_3$$

$$x_6 \leq x_3$$

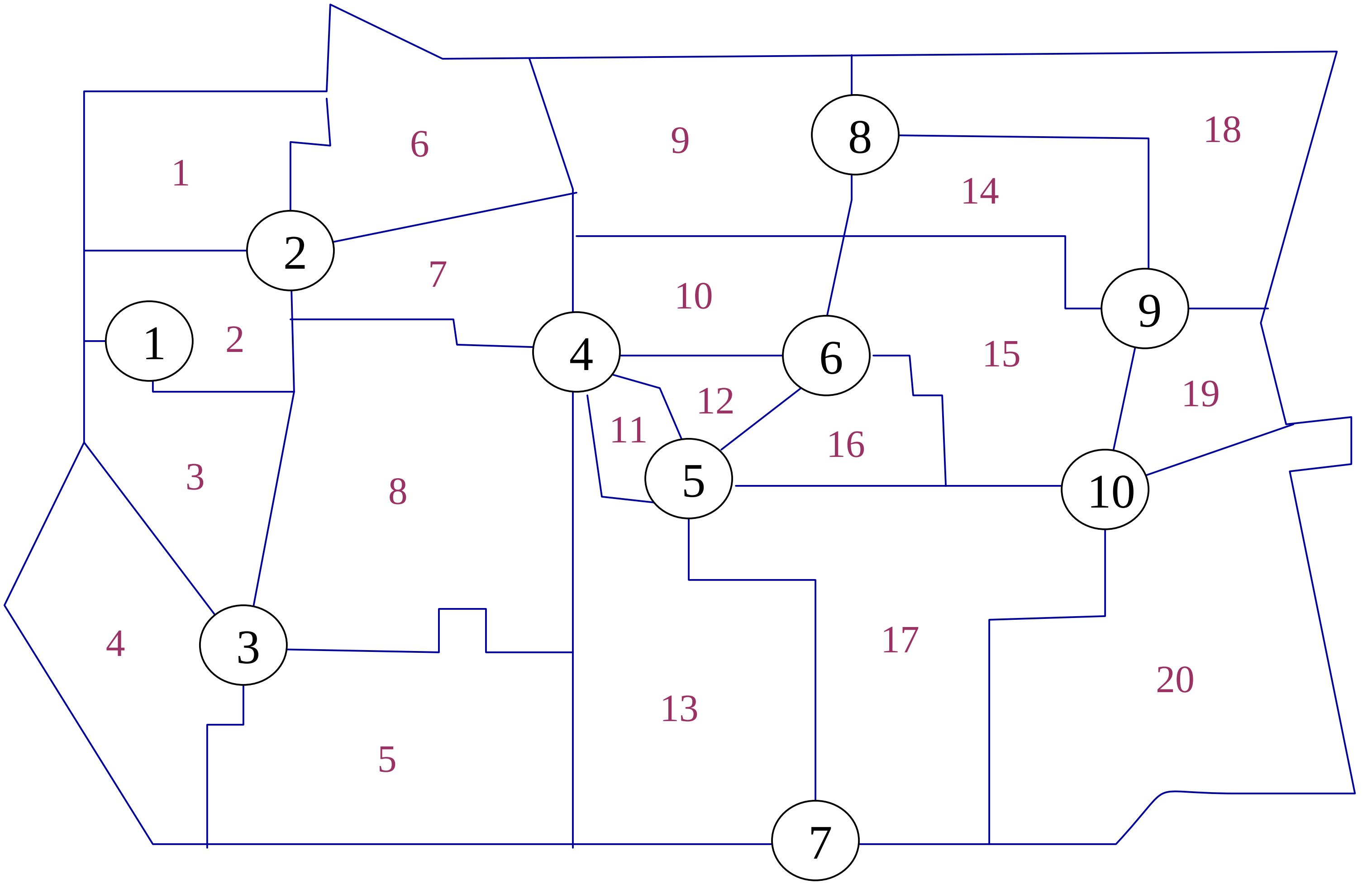
$$x_7 \leq x_3$$

$$\max \quad 200x_1 + 3x_2 + 20x_3 + 50x_4 + 70x_5 + 20x_6 + 5x_7 + 10x_8$$
$$+ 200x_9 + 150x_{10} + 18x_{11} + 8x_{12} + 300x_{13} + 185x_{14}$$

s.a.

$$6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1x_7 + 4x_9 + 5x_{12} \leq 10 \qquad (2000-2004)$$
$$3x_2 + 5x_3 + 5x_5 + 8x_7 + 5x_9 + 8x_{10} + 7x_{12} + 1x_{13} + 4x_{14} \leq 12 \qquad (2005-2009)$$
$$8x_5 + 1x_6 + 4x_{10} + 2x_{11} + 4x_{13} + 5x_{14} \leq 14 \qquad (2010-2014)$$
$$8x_6 + 5x_8 + 7x_{11} + 1x_{13} + 3x_{14} \leq 14 \qquad (2015-2020)$$
$$10x_4 + 4x_6 + 1x_{13} + 3x_{14} \leq 14 \qquad (2020-2024)$$
$$x_4 + x_5 \leq 1$$
$$x_8 + x_{11} \leq 1 \qquad \text{exclusão mútua}$$
$$x_9 + x_{14} \leq 1$$
$$x_{11} \leq x_2$$
$$x_4 \leq x_3$$
$$x_5 \leq x_3 \qquad \text{dependencia}$$
$$x_6 \leq x_3$$
$$x_7 \leq x_3$$
$$x_1, \cdots, x_{14} = 0 \text{ ou } 1$$

Modelos de *Packing*, Cobertura e Partição



Alocação de postos de atendimento médico de emergência (AME)

- 20 distritos
- 10 locações candidatas

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se local } j \text{ é selecionado} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\sum_{j \in J} x_j \geq 1 \qquad \text{restrições de cobertura}$$

$$\sum_{j \in J} x_j \leq 1 \qquad \text{restrições de packing}$$

$$\sum_{j \in J} x_j = 1 \qquad \text{restrições de partição}$$

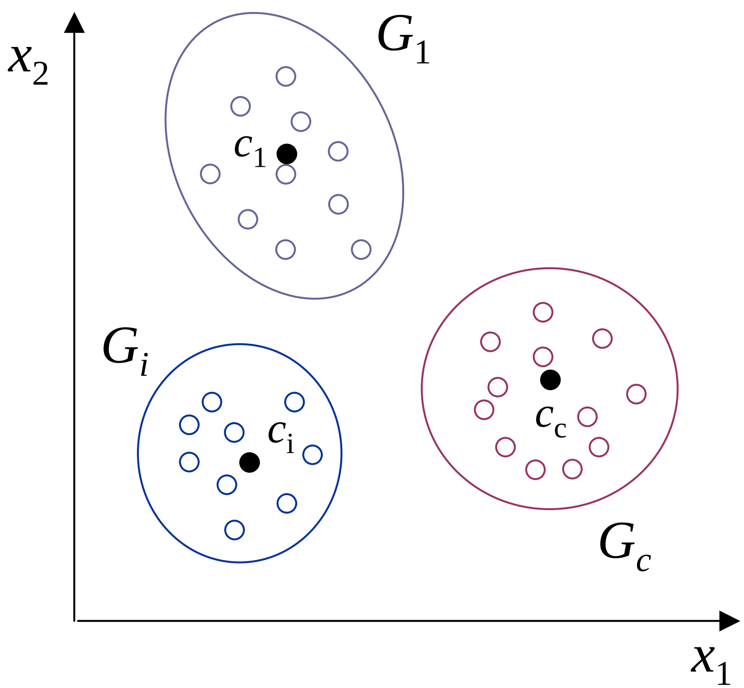
Cobertura

$$\min \sum_{j=1}^{10} x_j \qquad \text{número de AMEs}$$

s.a.	$x_2 \geq 1$	(D1)	$x_4 + x_5 + x_6 \geq 1$	(D12)
	$x_1 + x_2 \geq 1$	(D2)	$x_4 + x_5 + x_7 \geq 1$	(D13)
	$x_3 \geq 1$	(D4)	$x_8 + x_9 \geq 1$	(D14)
	$x_3 \geq 1$	(D5)	$x_6 + x_9 \geq 1$	(D15)
	$x_2 \geq 1$	(D6)	$x_5 + x_6 \geq 1$	(D16)
	$x_2 + x_4 \geq 1$	(D7)	$x_5 + x_7 + x_{10} \geq 1$	(D17)
	$x_3 + x_4 \geq 1$	(D8)	$x_8 + x_9 \geq 1$	(D18)
	$x_8 \geq 1$	(D9)	$x_9 + x_{10} \geq 1$	(D19)
	$x_4 + x_6 \geq 1$	(D10)	$x_{10} \geq 1$	(D20)
	$x_4 + x_5 \geq 1$	(D11)	$x_1 + x_3 \geq 1$	(D3)

$$x_1, \cdots, x_{10} = 0 \text{ ou } 1$$

Partição



$$\min \sum_{i=1}^{c} \left(\sum_{k,\, x_k \in G_i} \left\| x_k - c_i \right\|^2 \right)$$

$$\text{s.a. } \sum_{i=1}^{c} u_{ij} = 1, \quad \forall j = 1, \cdots, n$$

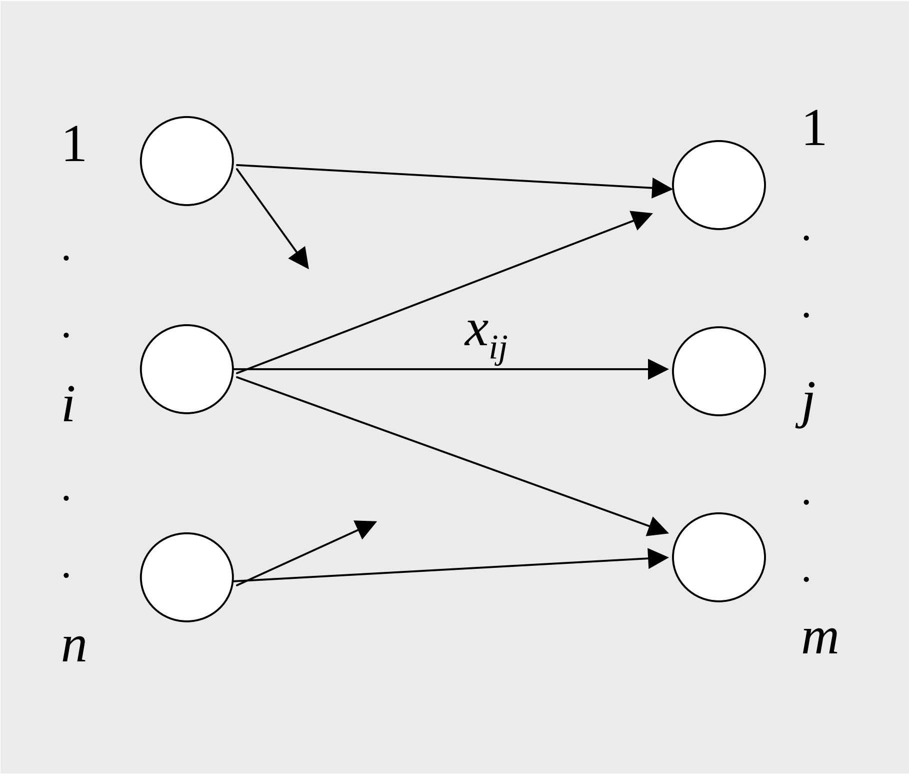
$$\sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} u_{ij} = n$$

$$u_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_j \in G_i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Agrupamento (*clustering*)

k(c)-means

Modelos de Atribuição



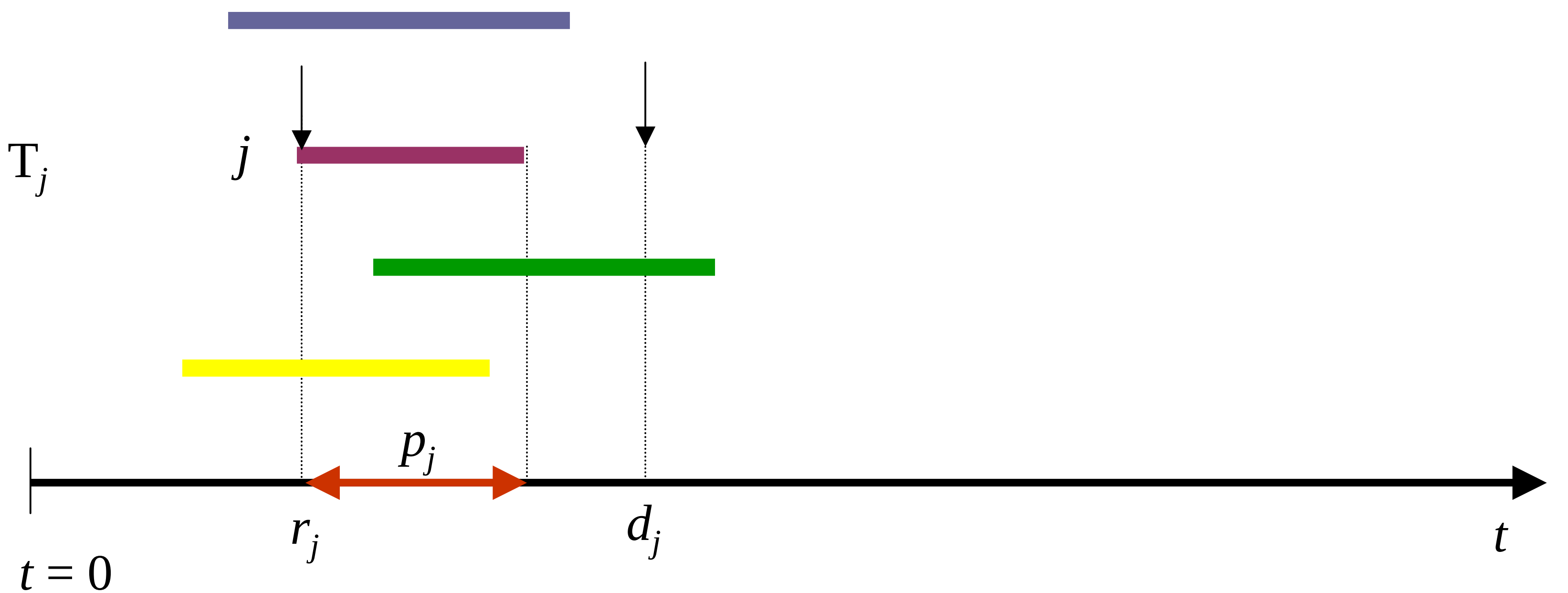
$$\min(\max) \quad \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a.} \qquad \sum_j x_{ij} = 1 \qquad \forall i$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \qquad \forall j$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad (i, j) \in S$$

Modelos de Sequenciamento (*Scheduling*)

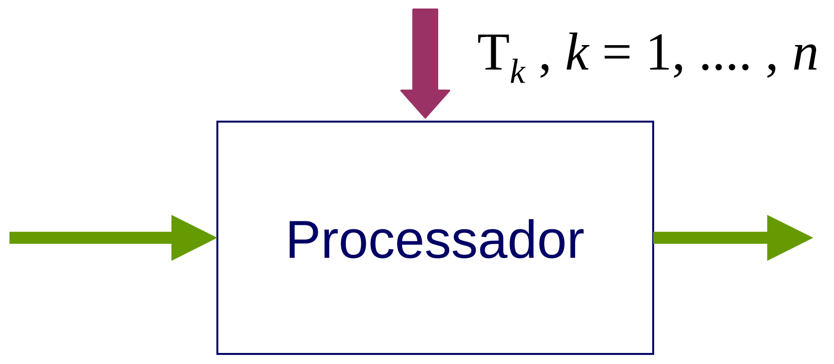


r_j : tempo em que a tarefa T_j está disponível para processamento

p_j : tempo processamento de T_j

d_j : data de entrega de T_j

Sequenciamento em Processador Único (*Flow Shop*)



- x_j : tempo início de processamento da j-ésima tarefa
- $x_j \geq \max\,[\,0, r_j\,]$
- restrição: $x_j + p_j \leq x_k$ ou $x_k + p_k \leq x_j$

$$\begin{cases} x_j + p_j \leq x_{j'} + M(1 - y_{jj'}) \\ x_{j'} + p_{j'} \leq x_j + M\,y_{jj'} \end{cases} \qquad y_{jj'} = \begin{cases} 1 & \text{se } j \text{ precede } j' \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad j' > j$$

- datas de entrega são consideradas via função objetivo visando minimizar:

1) $\max \{x_j + p_j\}$	tempo máximo de fabricação
2) $1/n \{ \Sigma_j (x_j + p_j)\}$	tempo de fabricação médio
3) $\max \{x_j + p_j - r_j\}$	tempo máximo de permanência
4) $1/n \{ \Sigma_j (x_j + p_j - r_j)\}$	tempo de permanência médio
5) $\max \{x_j + p_j - d_j\}$	*lateness* máximo
6) $1/n \{ \Sigma_j (x_j + p_j - d_j)\}$	*lateness* médio
7) $\max_j \{\max [0, x_j + p_j - d_j]\}$	*tardiness* máximo
8) $1/n \{ \Sigma_j (\max [0, x_j + p_j - d_j])\}$	*tardiness* médio

Exemplo: minimizar *lateness*

	Tarefa j					
	1	2	3	4	5	6
tempo processamento	12	8	3	10	4	18
tempo de disponibilidade	-20	-15	-12	-10	-3	2
data de entrega	10	2	72	-8	-6	60

$$\begin{aligned}\min\ \max\ \{&(x_1+12-10),\ (x_2+8-2),\\ &(x_3+3-72),\ (x_4+10+8),\\ &(x_5+4+6),\ (x_6+18-60)\}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\min\quad & f\\ \text{s.a.}\quad & f \geq (x_1+2)\\ & f \geq (x_2+6)\\ & f \geq (x_3-69)\\ & f \geq (x_4+18)\\ & f \geq (x_5+10)\\ & f \geq (x_6-42)\end{aligned}$$

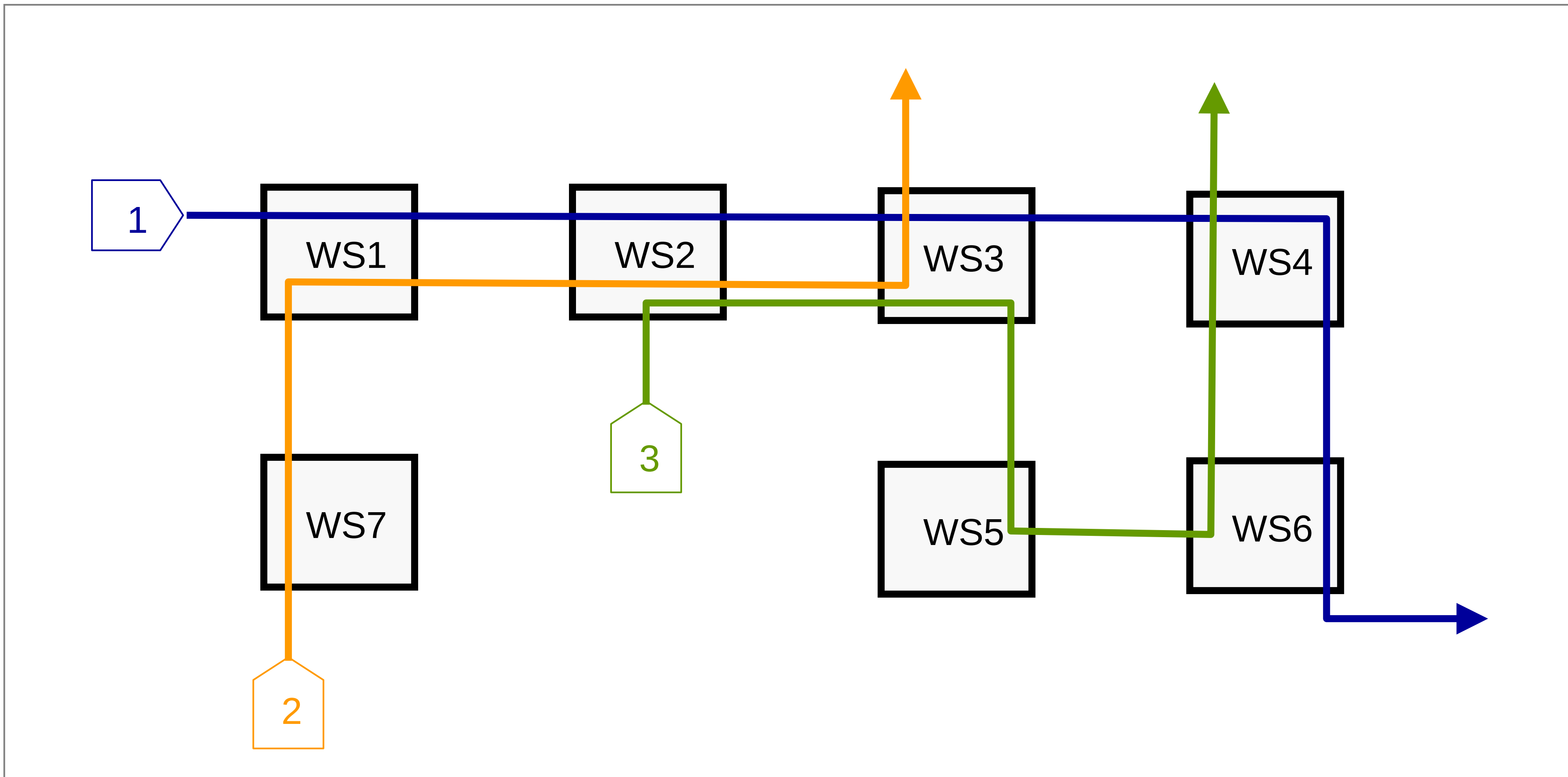
$$\min \quad f$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.a.} \quad & f \geq (x_1 + 2) \\
& f \geq (x_2 + 6) \\
& f \geq (x_3 - 69) \\
& f \geq (x_4 + 18) \\
& f \geq (x_5 + 10) \\
& f \geq (x_6 - 42)
\end{aligned}
$$

$$y_{ij} \in \{0,1\}, \ \forall i, j$$

$$
\begin{aligned}
& x_1 + 12 \leq x_6 + M(1 - y_{16}) \\
& x_6 + 18 \leq x_1 + M\, y_{16} \\
& x_2 + 8 \leq x_6 + M(1 - y_{26}) \\
& x_6 + 18 \leq x_2 + M\, y_{26} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& x_1 + 12 \leq x_2 + M(1 - y_{12}) \\
& x_2 + 8 \leq x_1 + My_{12}
\end{aligned}
$$

Sequenciamento em Múltiplos Processadores (*Job Shop Scheduling*)



Job	Tempo Processamento						
	WS1	WS2	WS3	WS4	WS5	WS6	WS7
1	3	10	8	45	-	1	-
2	6	11	6	-	-	-	50
3	-	5	9	25	2	1	

- x_{jk} : tempo início de processamento do *job* j no processador k

- objetivo: minimizar tempo máximo de fabricação (*makespan*)

$$\min\ \max\ \{(x_{16}+1),\ (x_{23}+6),\ (x_{34}+25)\}$$

- restrições de precedência

$$\boxed{x_{jk} + p_{jk} \leq x_{jk'}}$$

$Job\ 1$

$$x_{11} + 3 \leq x_{12}$$
$$x_{12} + 10 \leq x_{13}$$
$$x_{13} + 8 \leq x_{14}$$
$$x_{14} + 45 \leq x_{16}$$

$Job\ 2$

$$x_{27} + 50 \leq x_{21}$$
$$x_{21} + 6 \leq x_{22}$$
$$x_{22} + 11 \leq x_{23}$$

$Job\ 3$

$$x_{32} + 5 \leq x_{33}$$
$$x_{33} + 9 \leq x_{35}$$
$$x_{35} + 2 \leq x_{36}$$
$$x_{36} + 1 \leq x_{34}$$

• restrições para evitar conflitos entre *jobs* em um processador:

$$x_{jk} + p_{jk} \leq x_{jk} + M(1 - y_{jj'k})$$
$$x_{jk} + p_{j'k} \leq x_{jk} + M\, y_{jj'k}$$

$$y_{jj'k} = \begin{cases} 1 \; se \;\; j \; é \; sequenciado \;\; antes \; de \;\; j' \;\; no \;\; processador \;\; k \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad caso \; contrário \end{cases}$$

• conflitos entre *jobs* 1 e 2 no processador 1:

$$x_{11} + 3 \leq M(1 - y_{121})$$
$$x_{21} + 6 \leq M\, y_{121}$$

- conflitos entre *jobs* 1 e 2 no processador 2:

$$x_{12} + 10 \leq x_{22} + M(1 - y_{122})$$
$$x_{22} + 11 \leq x_{12} + M\, y_{122}$$

- conflitos entre *jobs* 1 e 3 no processador 2:

$$x_{12} + 10 \leq x_{32} + M(1 - y_{132})$$
$$x_{32} + 5 \leq x_{12} + M\, y_{132}$$

- conflitos entre *jobs* 2 e 3 no processador 2:

$$x_{22} + 11 \leq x_{32} + M(1 - y_{232})$$
$$x_{32} + 5 \leq x_{22} + M\, y_{232}$$

Observação