Modelos Determinísticos de Otimização

Introdução e Motivação

Brasil Petróleo, Refinaria de Petrolinea

Origem Petróleo	Gasolina (%/barril)	Gas Aviação (%/barril)	Lubrificante (%/barril)	Perdas (%/barril)	Oferta (barris)	Custo ($)
Nacional	40	20	30	10	6000	15
Importado	30	40	20	10	9000	20
Demanda (barris/dia)	2000	1500	500			

- **Dados exatos**

- **Variáveis de decisão**

x_1 = número de barris importados refinados por dia ($\times$1000)

x_2 = número de barris nacionais refinados por dia ($\times$1000)

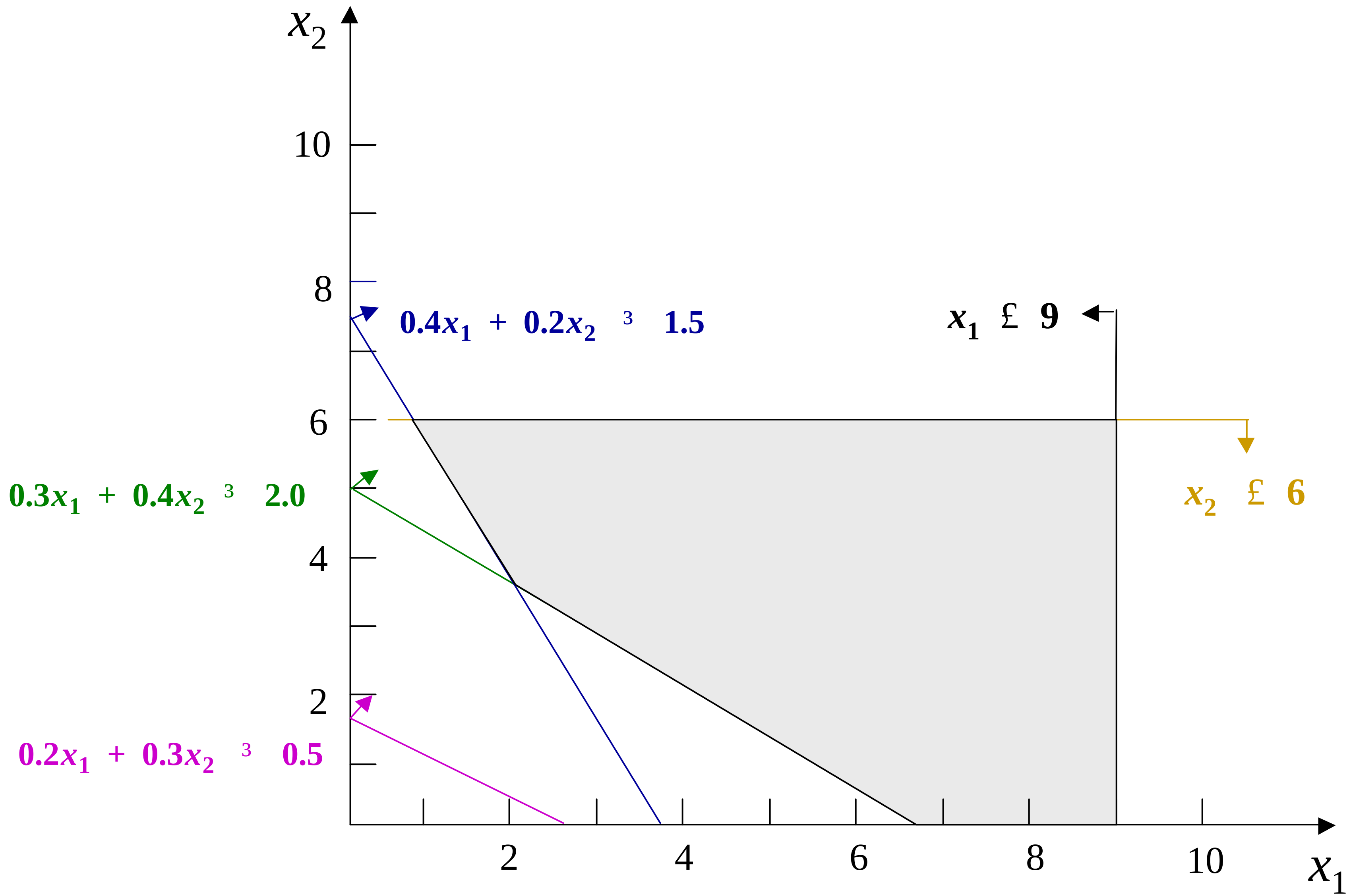
- Três itens essenciais em modelos de otimização

  - decisões: escolhas de quem toma decisões
  - restrições: limitam escolhas
  - objetivos: estabelecem preferencias entre decisões

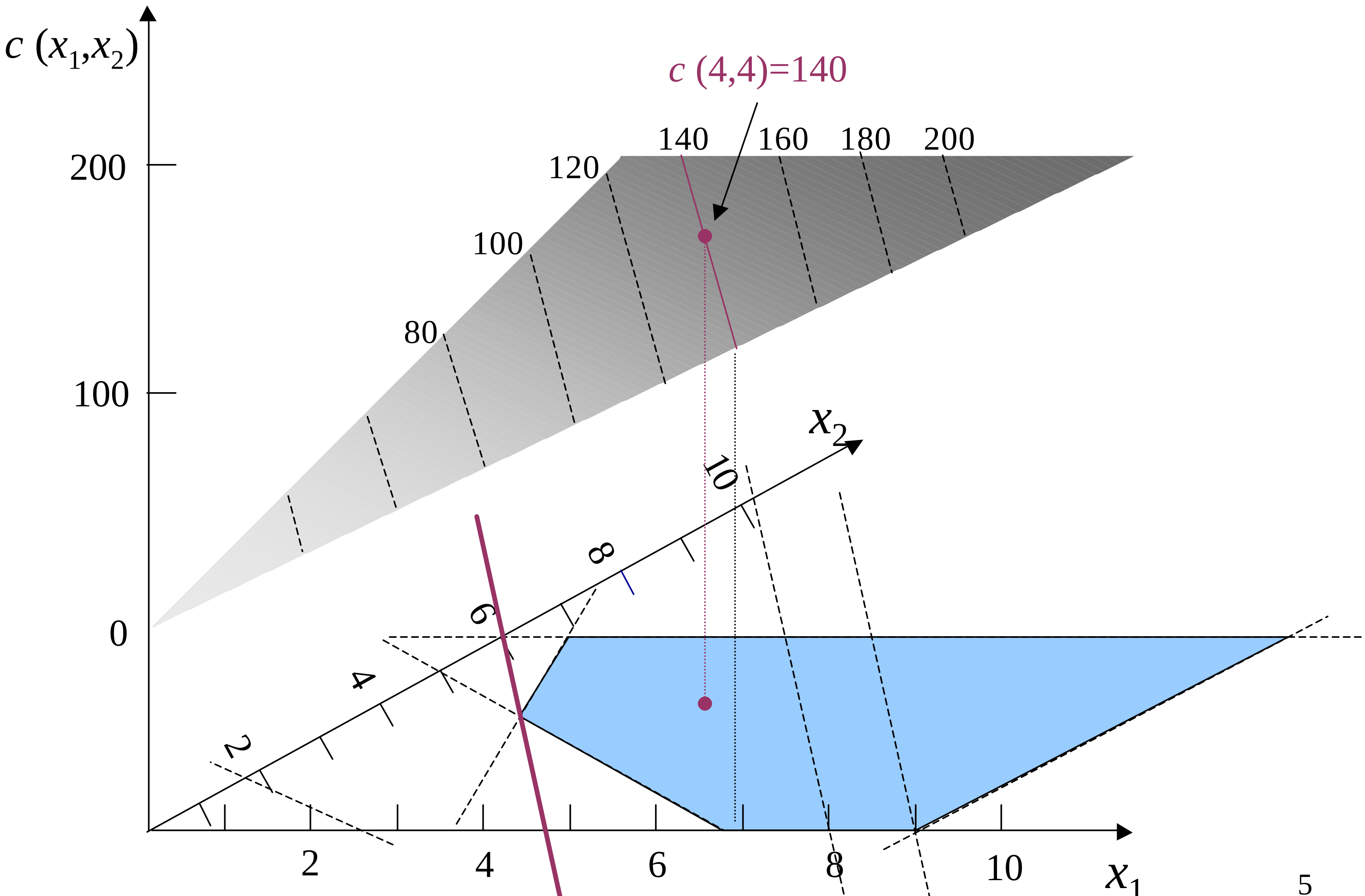
- Modelo da Refinaria de Petrolinea

$$
\begin{array}{lllll}
\text{min} & 20x_1 + 15x_2 & & & \text{Função objetivo} \\
\text{sujeito a} & 0.3x_1 + 0.4x_2 & \geq & 2.0 & \\
 & 0.4x_1 + 0.2x_2 & \geq & 1.5 & \\
 & 0.2x_1 + 0.3x_2 & \geq & 0.5 & \text{Restrições} \\
 & x_1 & \leq & 9 & \\
 & x_2 & \leq & 6 & \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

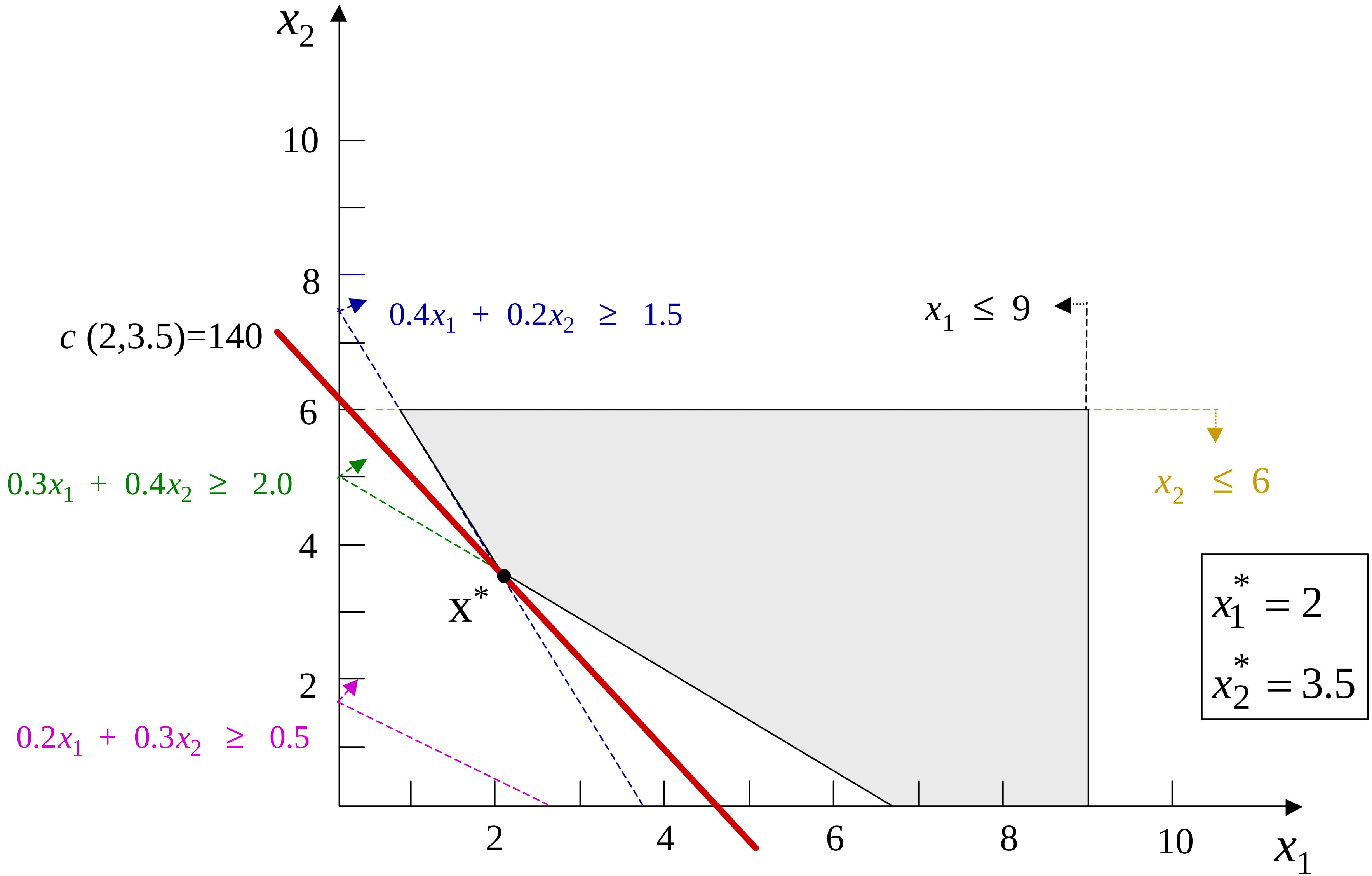
Soluções Factíveis



Função Objetivo



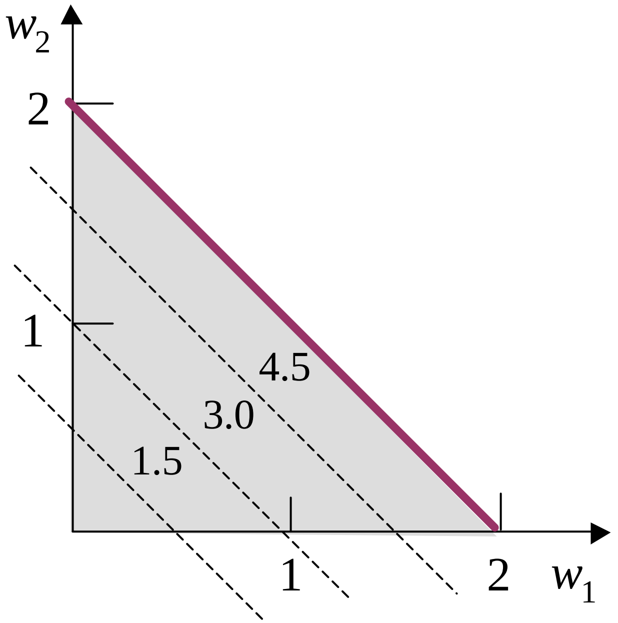
Solução Ótima



$$\max \quad 3w_1 + 3w_2$$

$$\text{sujeito a } w_1 + w_2 \leq 2$$

$$w_1, w_2 \geq 0$$

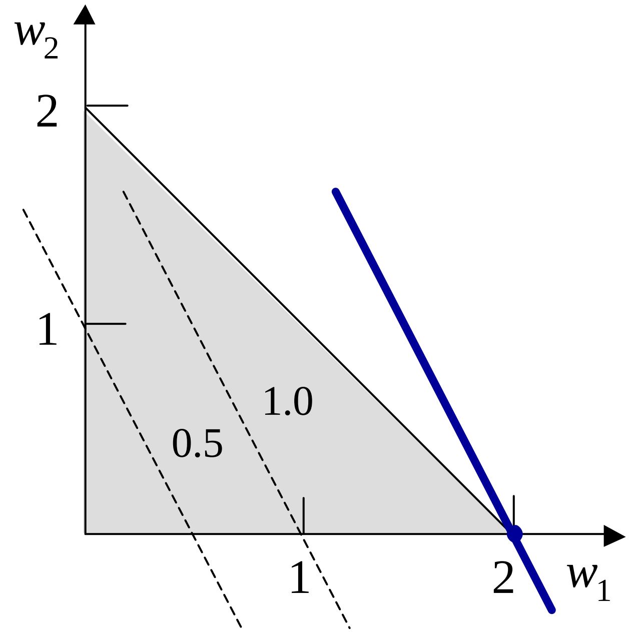


Múltiplas Soluções

$$\max \quad w_1 + 0.5w_2$$

$$\text{sujeito a } w_1 + w_2 \leq 2$$

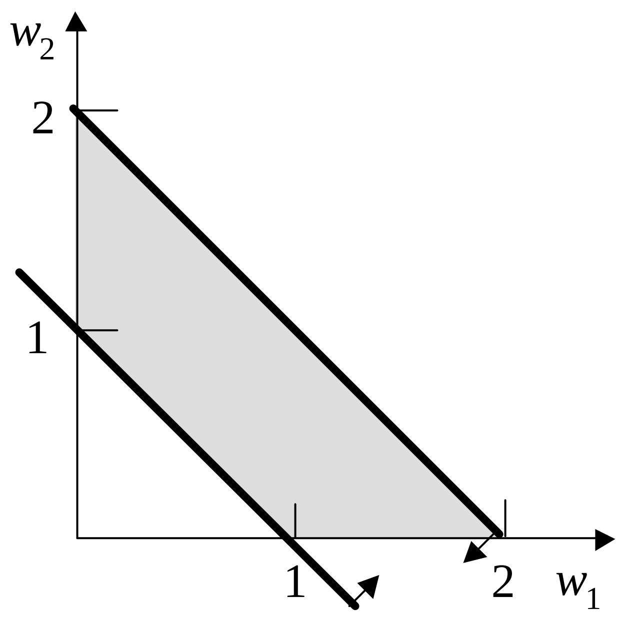
$$w_1, w_2 \geq 0$$

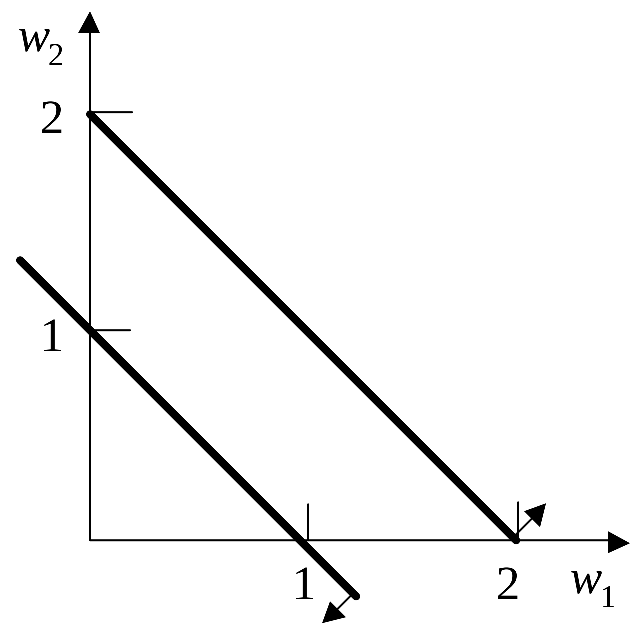


Solução Única

$$\begin{aligned} \max \quad & 3w_1 + 3w_2 \\ \text{sujeito a} \quad & w_1 + w_2 \le 2 \\ & w_1 + w_2 \ge 1 \\ & w_1, w_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & w_1 + 0.5w_2 \\ \text{sujeito a} \quad & w_1 + w_2 \ge 2 \\ & w_1 + w_2 \le 1 \\ & w_1, w_2 \ge 0 \end{aligned}$$



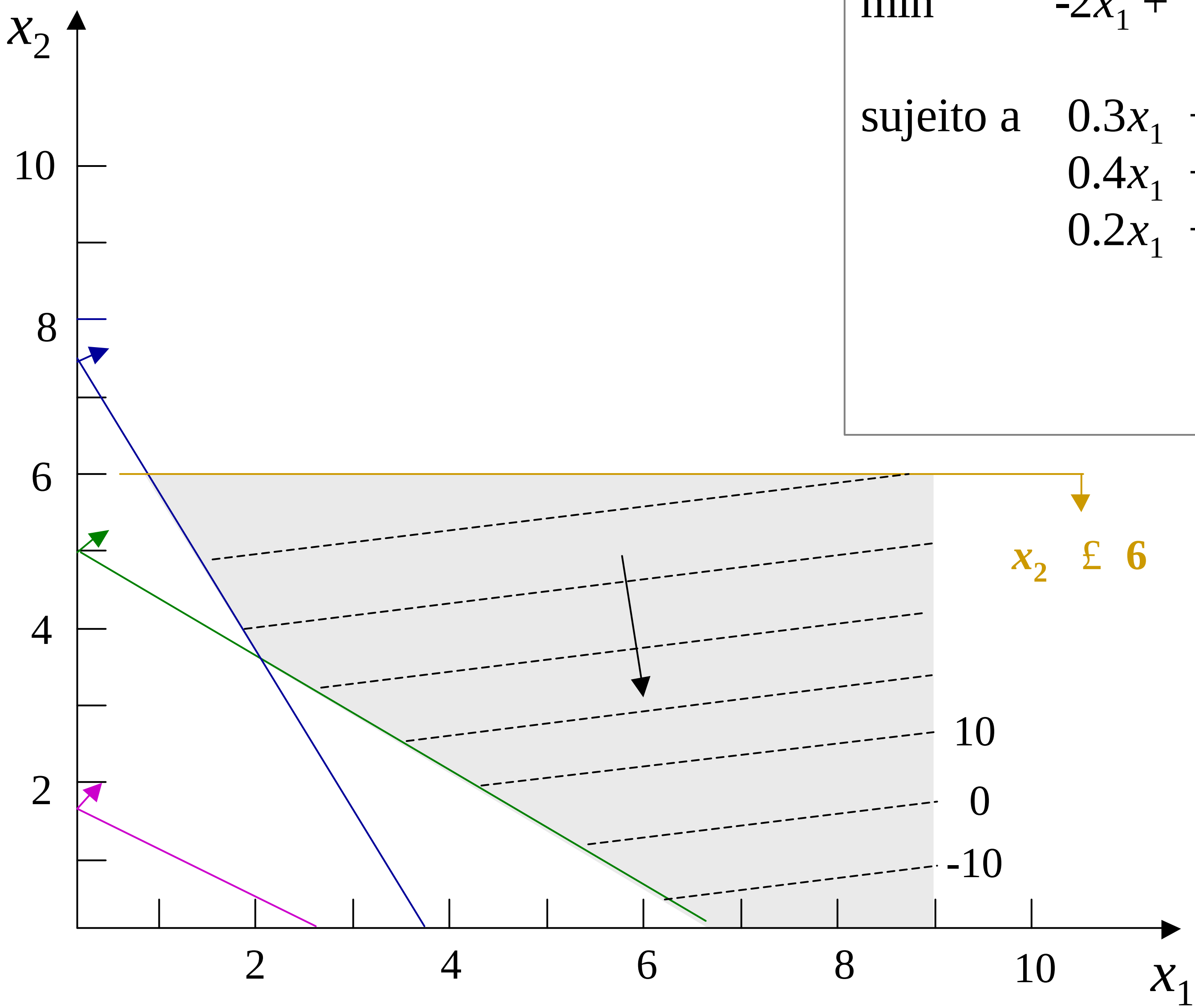


Modelo Factível

Modelo não Factível

Modelo Não Limitado

$$
\begin{array}{llcl}
\min & -2x_1 + 15x_2 & & \\
\text{sujeito a} & 0.3x_1 + 0.4x_2 & \geq & 2.0 \\
 & 0.4x_1 + 0.2x_2 & \geq & 1.5 \\
 & 0.2x_1 + 0.3x_2 & \geq & 0.5 \\
 & x_2 & \leq & 6 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & &
\end{array}
$$



ProfFernandoGomide

Modelos de Grande Porte

- Exemplo: produção em escala de sementes de milho híbrido

  $l = 20$ fazendas de produção de sementes
  $m = 25$ variedades de milho
  $n = 30$ regiões de venda

- Como operar produção e distribuição com custo mínimo ?

- Parâmetros estimados pelos produtores

  – custo de produção em cada região ($/saca)
  – capacidade de produção de cada fazenda (espigas)
  – número de espigas que são processadas para compor uma saca
  – demanda de cada tipo de semente em cada região (sacas)
  – custo de transporte das fazendas às regiões de consumo ($/saca)

f = fazenda $(f = 1,\ldots,l)$
h = variedade híbrido $(h = 1,\ldots,m)$
r = região de venda $(r = 1,\ldots,n)$

x_{fh} = número de sacas produzidos na fazenda f da variedade h

$$f = 1,\ldots,l;\ \ h = 1,\ldots,m$$

y_{fhr} = número sacas de híbridos h transportados da fazenda f para região r

$$f = 1,\ldots,l;\ \ h = 1,\ldots,m;\ r = 1,\ldots,n$$

número de variáveis $x = lm = 20(25) = 500$

número de variáveis $y = lmn = 20(25)(30) = 15.000$

total de variáveis: 15.500 variáveis

p_{fh} = custo/saca produzir na fazenda f a variedade h

s_{fhr} = custo/saca transportar híbrido h da fazenda f para região r

u_f = capacidade de produção da fazenda f (espigas)

a_h = número de espigas para produzir uma saca da variedade h

d_{hr} = número de sacas do híbrido h demandada pela região r

custo total = custo de produção + custo de transporte

objetivo = minimizar custo total

$$\min \sum_{f=1}^{l}\sum_{h=1}^{m} p_{fh}x_{fh} + \sum_{f=1}^{l}\sum_{h=1}^{m}\sum_{r=1}^{n} s_{fhr}y_{fhr} \qquad \text{custo total}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{h=1}^{m} a_h x_{fh} \le u_f \qquad f = 1,\ldots,l \qquad \text{capacidade}$$

$$\sum_{f=1}^{l} y_{fhr} = d_{hr} \qquad h = 1,\ldots,m;\ r = 1,\ldots,n \qquad \text{demandas}$$

$$\sum_{r=1}^{n} y_{fhr} = x_{fh} \qquad f = 1,\ldots,l;\ h = 1,\ldots,m \qquad \text{balanço}$$

$$x_{fh} \ge 0 \qquad f = 1,\ldots,l;\ h = 1,\ldots,m \qquad \text{não negatividade}$$

$$y_{fhr} \ge 0 \qquad f = 1,\ldots,l;\ h = 1,\ldots,m;\ r = 1,\ldots,n$$

Modelo Programação Matemática Geral

max (min) $\quad f(x)$

s. a.

$$g(x) = b$$
$$h(x) \leq r$$
$$v(x) \geq d$$

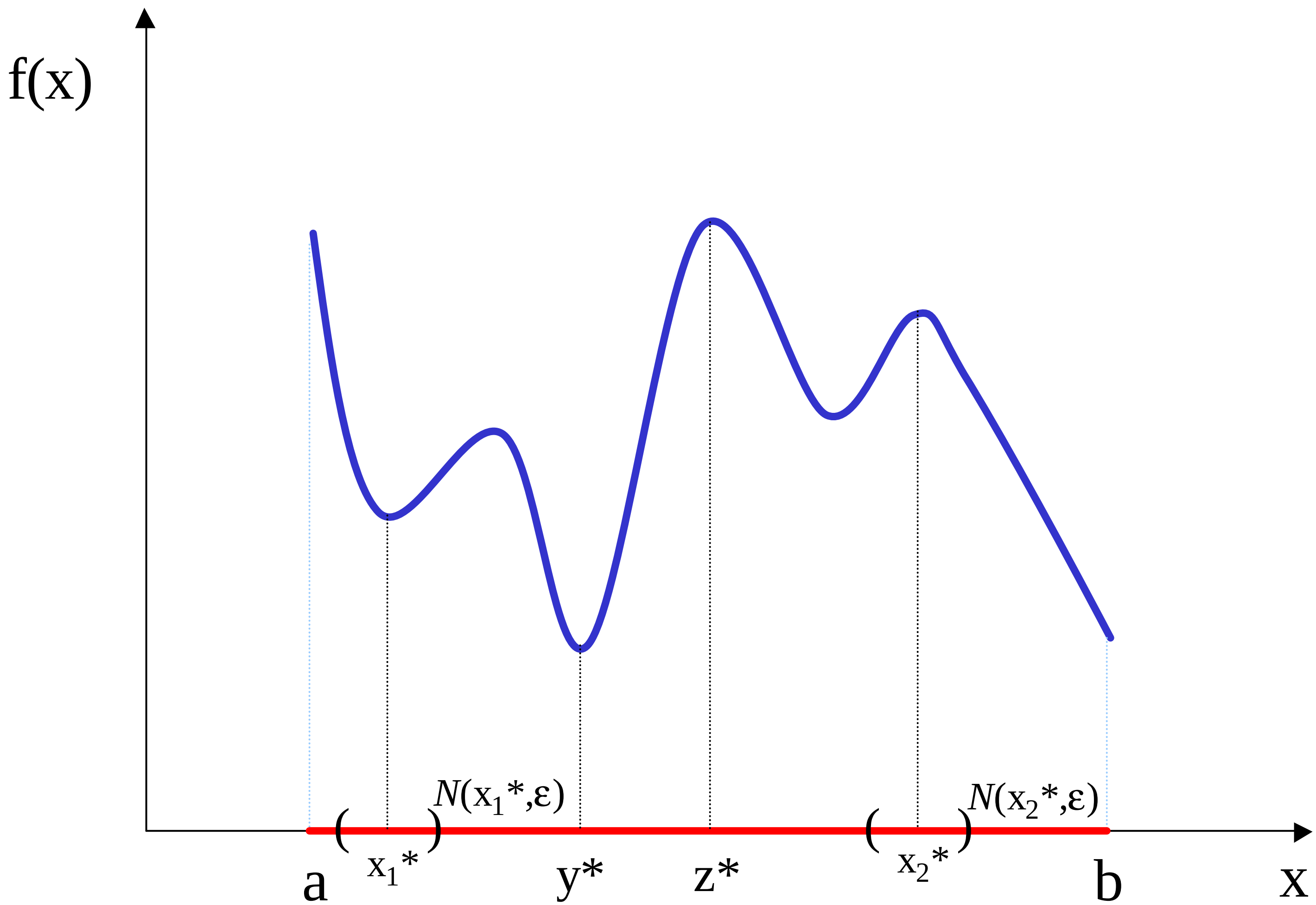
$x \in R^n \qquad g: R^n \rightarrow R^m \qquad h: R^n \rightarrow R^k \qquad v: R^n \rightarrow R^l$

max (min) $f(x)$

s. a. $x \in D \subseteq R^n$

- **máximo**
  - local: $f(x^*) \geq f(x) \;\; \forall x \in N(x^*,\varepsilon) \subset D$
  - global: $f(x^*) \geq f(x) \;\; \forall x \in D$

- **mínimo**
  - local: $f(x^*) \leq f(x) \;\; \forall x \in N(x^*,\varepsilon) \subset D$
  - global: $f(x^*) \leq f(x) \;\; \forall x \in D$



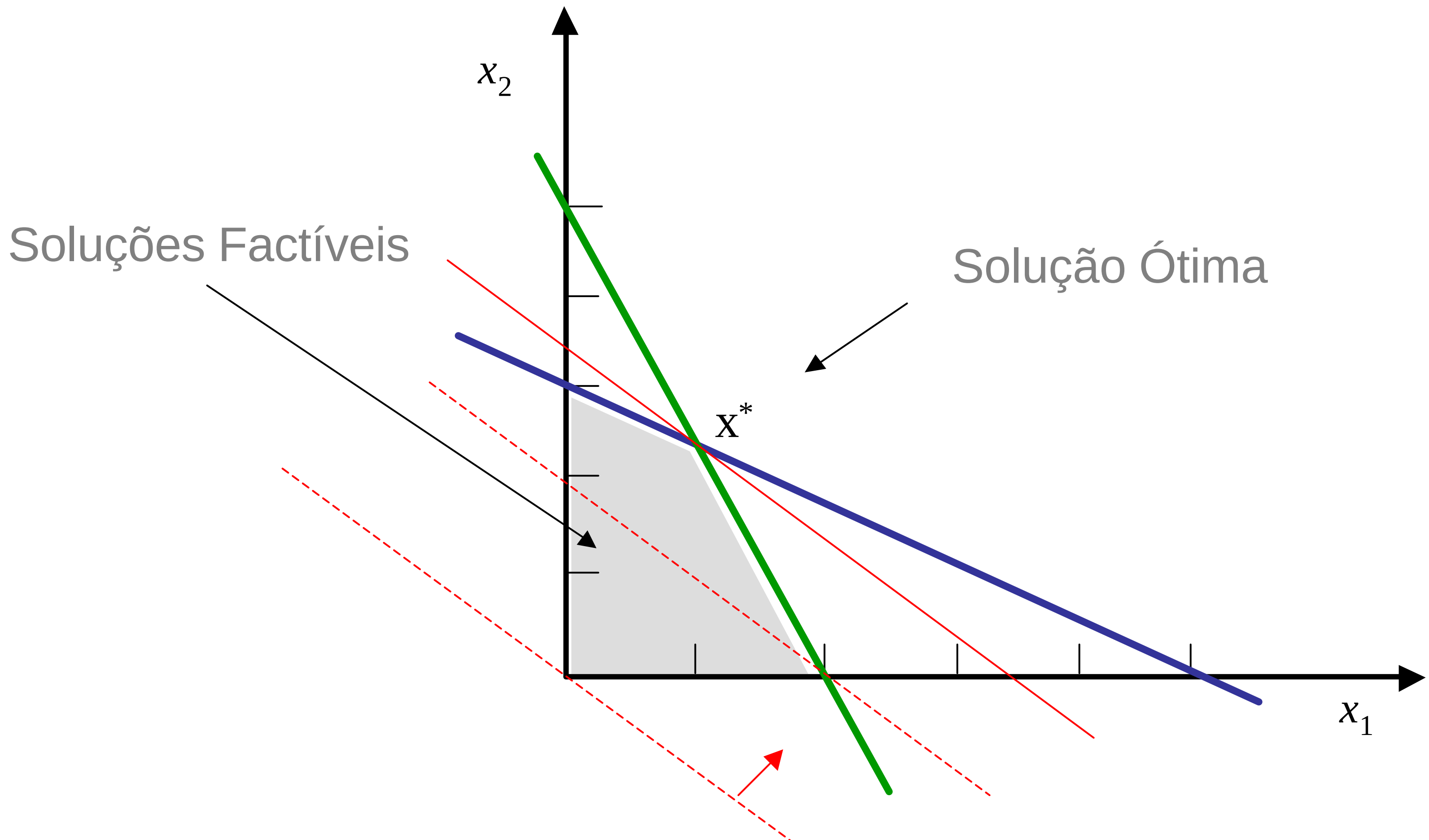
$$D = [a, b]$$

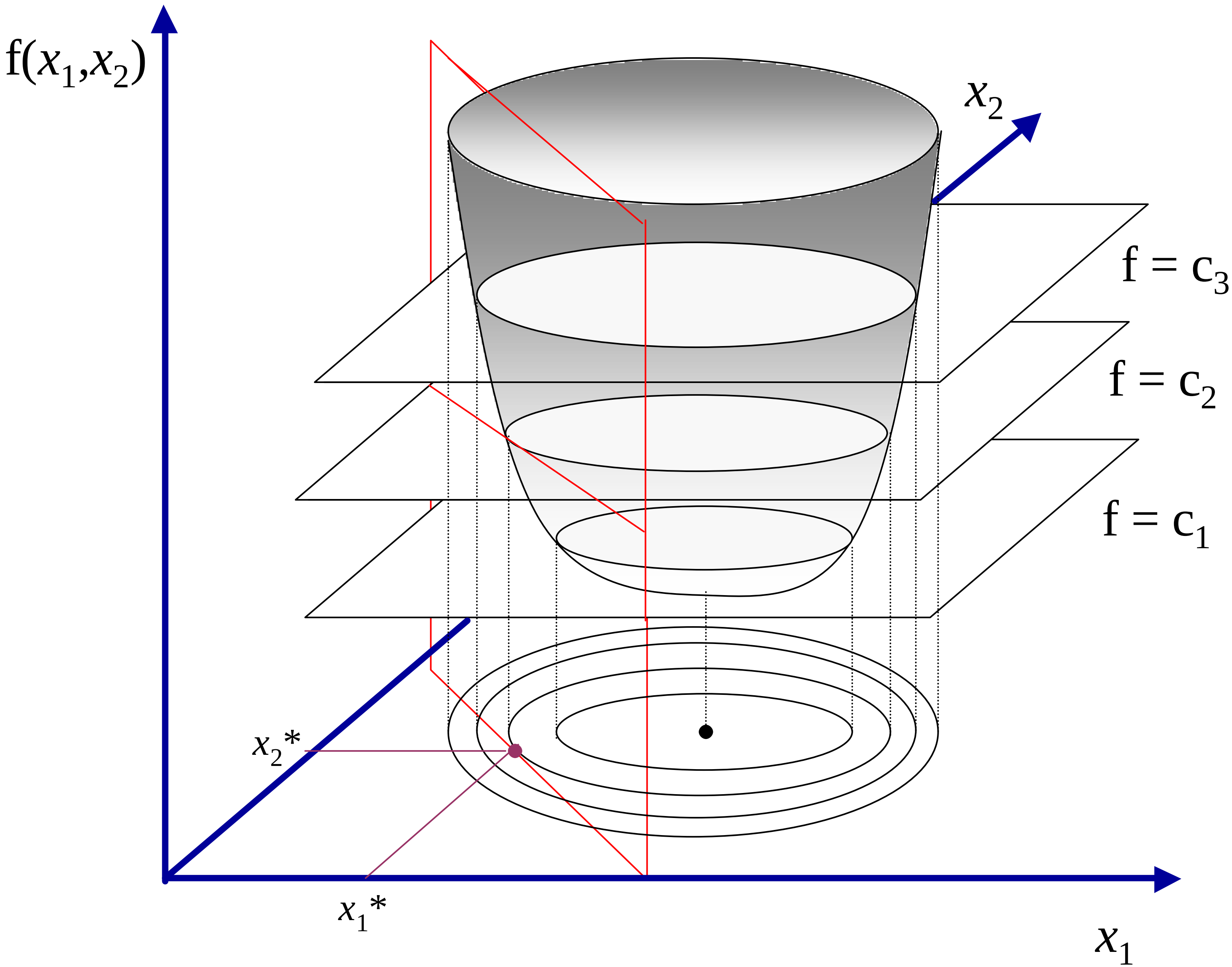
Modelo Linear - PL

$$\max \quad 5x_1 + 5x_2$$

$$\text{sujeito a} \quad 3x_1 + 5x_2 \leq 15$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$





$f(x_1,x_2)$
x_2
$f = c_3$
$f = c_2$
$f = c_1$
x_2*
x_1*
x_1

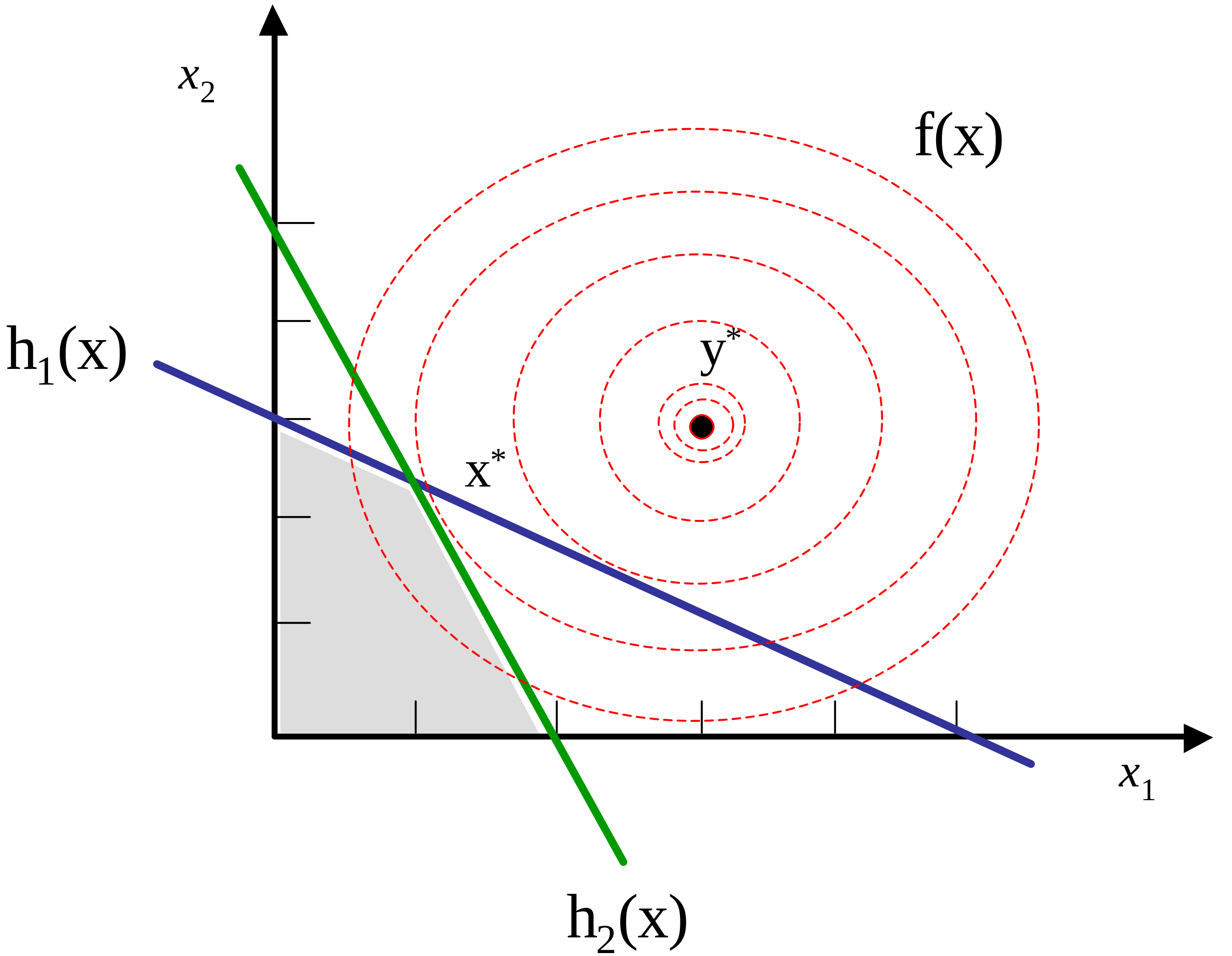
Modelo Não Linear - PNL

min $\quad (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2$

sujeito a $\quad 3x_1 + 5x_2 \leq 15$

$\quad 5x_1 + 2x_2 \leq 10$

$\quad x_1, x_2 \geq 0$



Otimização campanhas publicitárias

$$\max \quad \sum_{g=1}^{m} p_g \sum_{c=1}^{n} s_{gc} \log(x_c + 1) \qquad \text{lucro total}$$

$$s.a. \quad \sum_{c=1}^{n} x_c \leq b \qquad \text{limite orçamentário}$$

$$x_c \geq 0 \quad ; \quad c = 1, \ldots, n \qquad \text{não negatividade}$$

x_c = quantia alocada à campanha tipo c

p_g = lucro (em termos da fração das vendas) grupo de produtos g

g = grupo de produtos, $g = 1, \ldots, m$

c = tipo de campanha, $c = 1, \ldots, n$

b = orçamento disponível

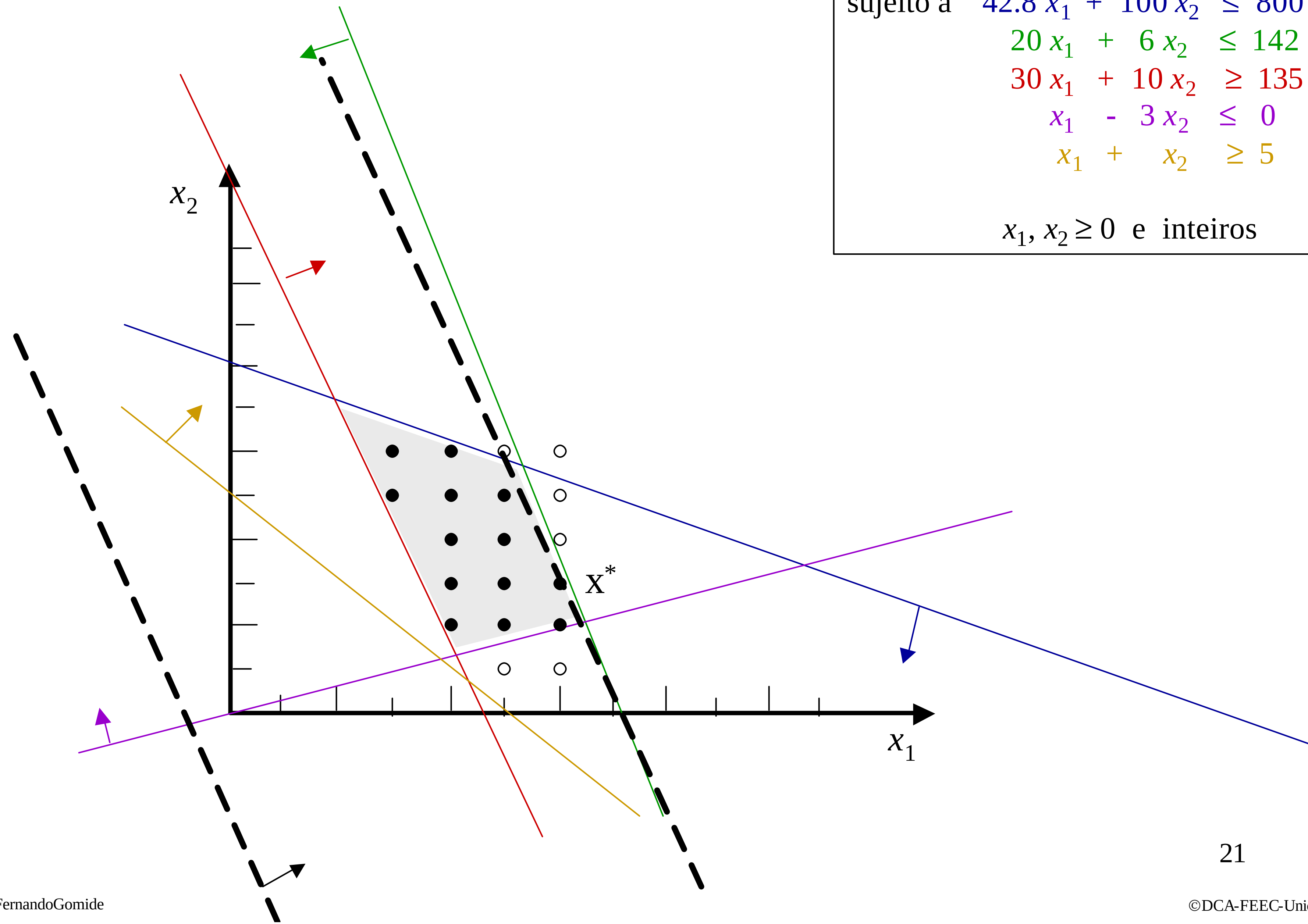
s_{gc} = parâmetro aumento vendas do grupo g devido campanha c

Modelo Discreto - PMD

max $18\,x_1 + 6\,x_2$

sujeito a
$$\begin{aligned}
42.8\,x_1 + 100\,x_2 &\leq 800\\
20\,x_1 + 6\,x_2 &\leq 142\\
30\,x_1 + 10\,x_2 &\geq 135\\
x_1 - 3\,x_2 &\leq 0\\
x_1 + x_2 &\geq 5
\end{aligned}$$

$x_1, x_2 \geq 0$ e inteiros



Programação de operação industrial

i = tipo de molde $(i = 1, \ldots, m)$

j = tipo produto $(j = 1, \ldots, n)$

c_{ij} = perda causada pelo molde i no produto j

I_j = índices i correspondentes aos moldes que podem ser utilizados pelo produto j

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se molde } i \text{ é selecionado} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se molde } i \text{ é usado pelo produto } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\min \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in I_j} c_{ij} x_{ij}$$ perda total

$$s.a. \quad \sum_{i=1}^{m} y_i \le p$$ seleciona no máximo p

$$\sum_{i \in I_j} x_{ij} = 1 \qquad j = 1,\ldots,n$$ um molde por produto

$$x_{ij} \le y_i \qquad j = 1,\ldots,n;\ i \in I_j$$ usar somente se selecionado

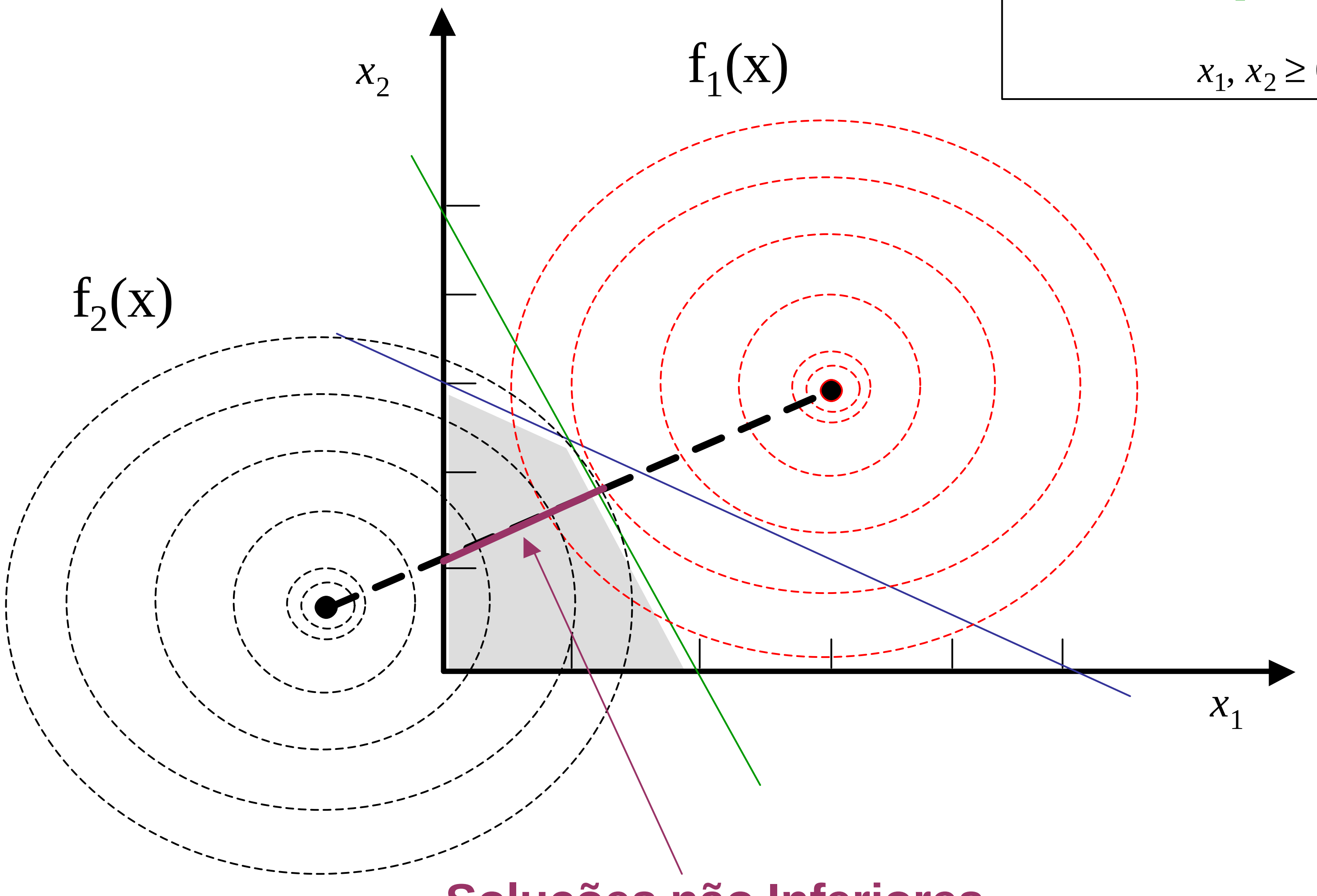
$$y_i = 0 \ ou\ 1 \qquad i = 1,\ldots,m$$ variáveis binárias

$$x_{ij} = 0 \ ou\ 1 \qquad j = 1,\ldots,n;\ i \in I_j$$ variáveis binárias

Modelo Múltiplos Objetivos PMO

$$\min \quad f_1 = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2$$
$$f_2 = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 0.75)^2$$

sujeito a
$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

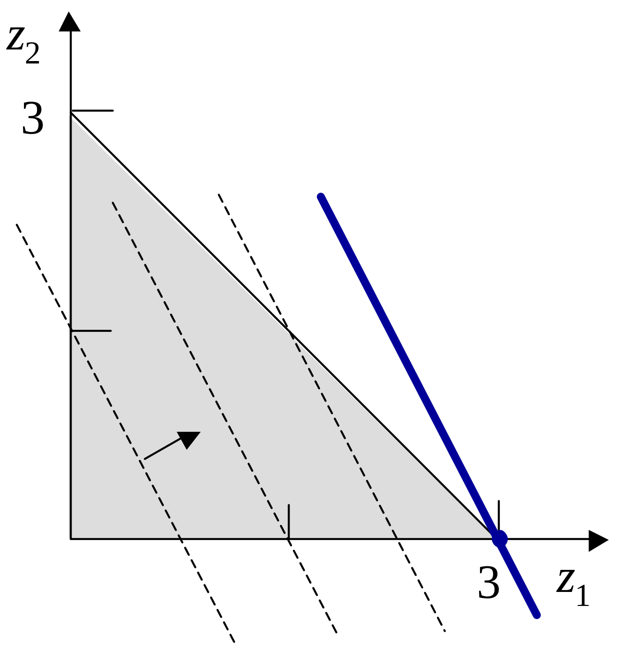


Soluções não Inferiores

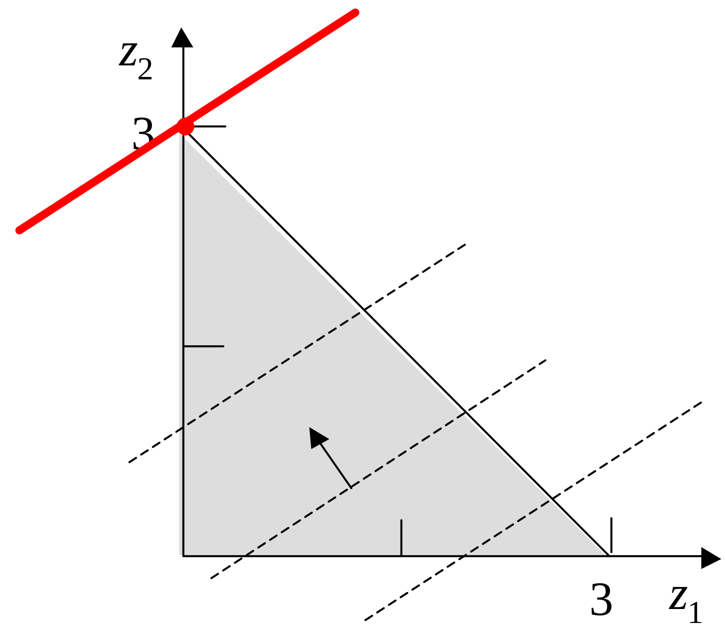
$$\max \quad 3z_1 + z_2$$
$$\min \quad z_1 - z_2$$

$$\text{sujeito a} \quad z_1 + z_2 \leq 3$$

$$z_1, z_2 \geq 0$$

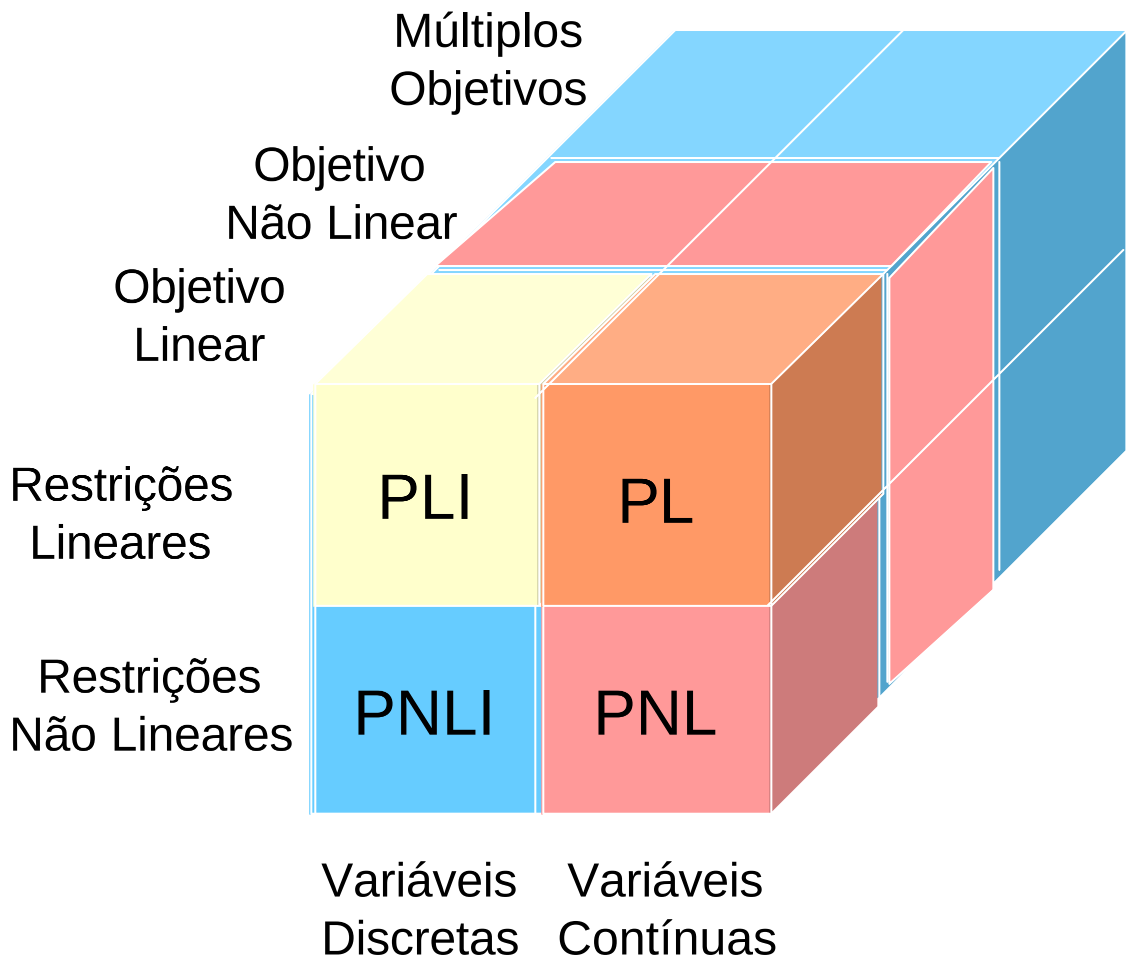


max $3z_1 + z_2$



min $z_1 - z_2$

Classes de Modelos de Otimização



Observação

Este material refere-se às notas de aula do curso EA 044 Planejamento e Análise de Sistemas de Produção da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp. Não substitui o livro texto, as referências recomendadas e nem as aulas expositivas. Este material não pode ser reproduzido sem autorização prévia dos autores. Quando autorizado, seu uso é exclusivo para atividades de ensino e pesquisa em instituições sem fins lucrativos.