EA 044 Planejamento e Análise de Sistemas de Produção

Dualidade e Análise de Sensibilidade em Programação Linear

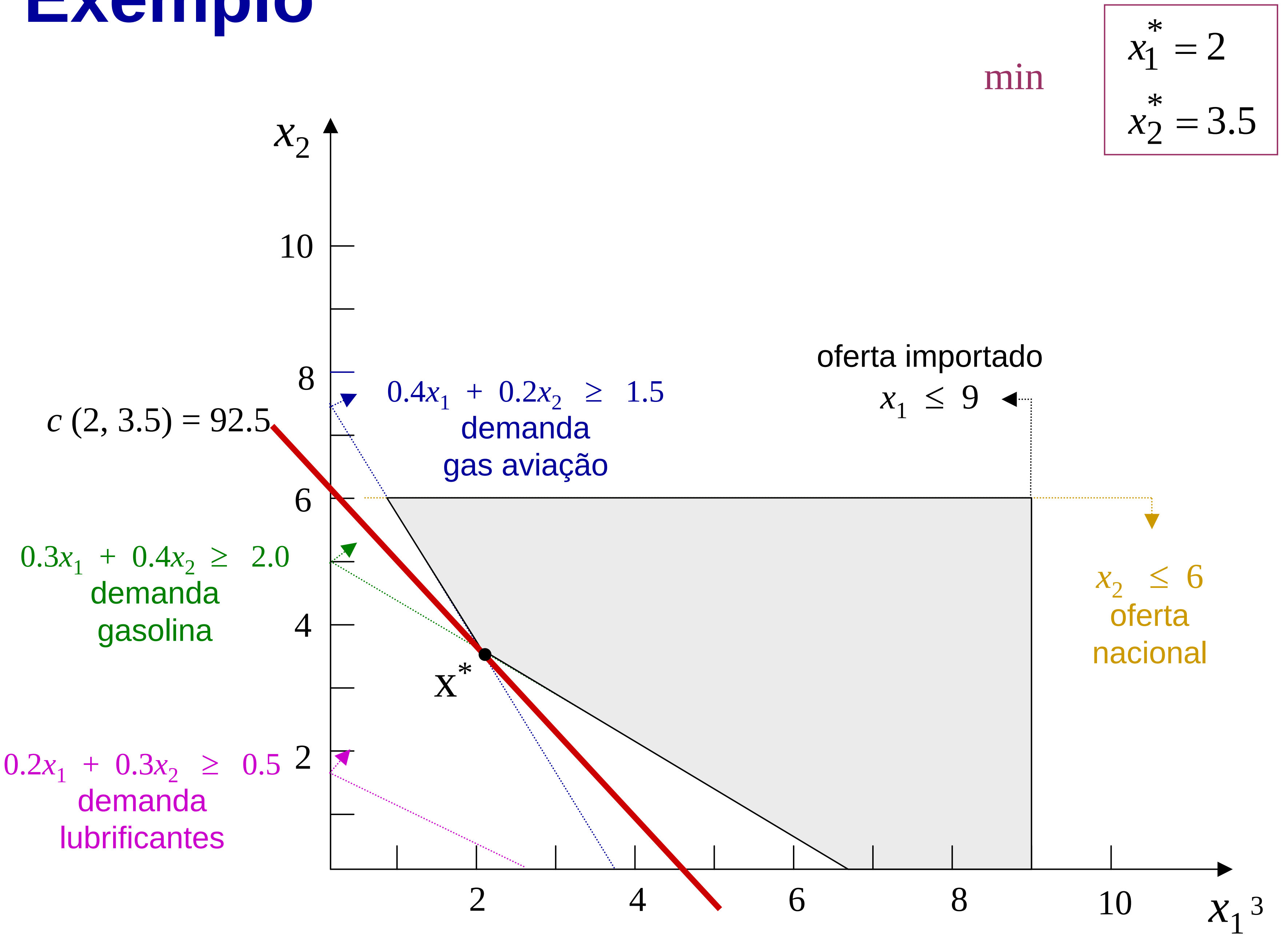
Análise de Sensibilidade em PL

- Como variações nos parâmetros afetam a solução ótima

- Exemplo: Modelo da Refinaria de Petrolinea

$$
\begin{array}{llcllll}
\min & 20x_1 & + & 15x_2 & & & \\
\text{s.a.} & 0.3x_1 & + & 0.4x_2 & \geq & 2.0 & \text{demanda gasolina} \\
& 0.4x_1 & + & 0.2x_2 & \geq & 1.5 & \text{demanda gas aviação} \\
& 0.2x_1 & + & 0.3x_2 & \geq & 0.5 & \text{demanda lubrificantes} \\
& x_1 & & & \leq & 9 & \text{oferta petróleo importado} \\
& & & x_2 & \leq & 6 & \text{oferta petróleo nacional} \\
& x_1, x_2 \geq 0 & & & & &
\end{array}
$$

Exemplo



min
$x_1^* = 2$
$x_2^* = 3.5$
x_2
10
8
6
4
2
c (2, 3.5) = 92.5
$0.4x_1 + 0.2x_2 \geq 1.5$
demanda
gas aviação
oferta importado
$x_1 \leq 9$
$0.3x_1 + 0.4x_2 \geq 2.0$
demanda
gasolina
$x_2 \leq 6$
oferta
nacional
x^*
$0.2x_1 + 0.3x_2 \geq 0.5$
demanda
lubrificantes
2
4
6
8
10
x_1

Modelo Programação Linear Geral

max (min)	$c\,x$	benefício (custo)
s. a.		
	$F\,x = b$	oferta e demanda
	$G\,x \leq r$	oferta de um recurso
	$H\,x \geq d$	demanda por um recurso
	$x \geq 0$	

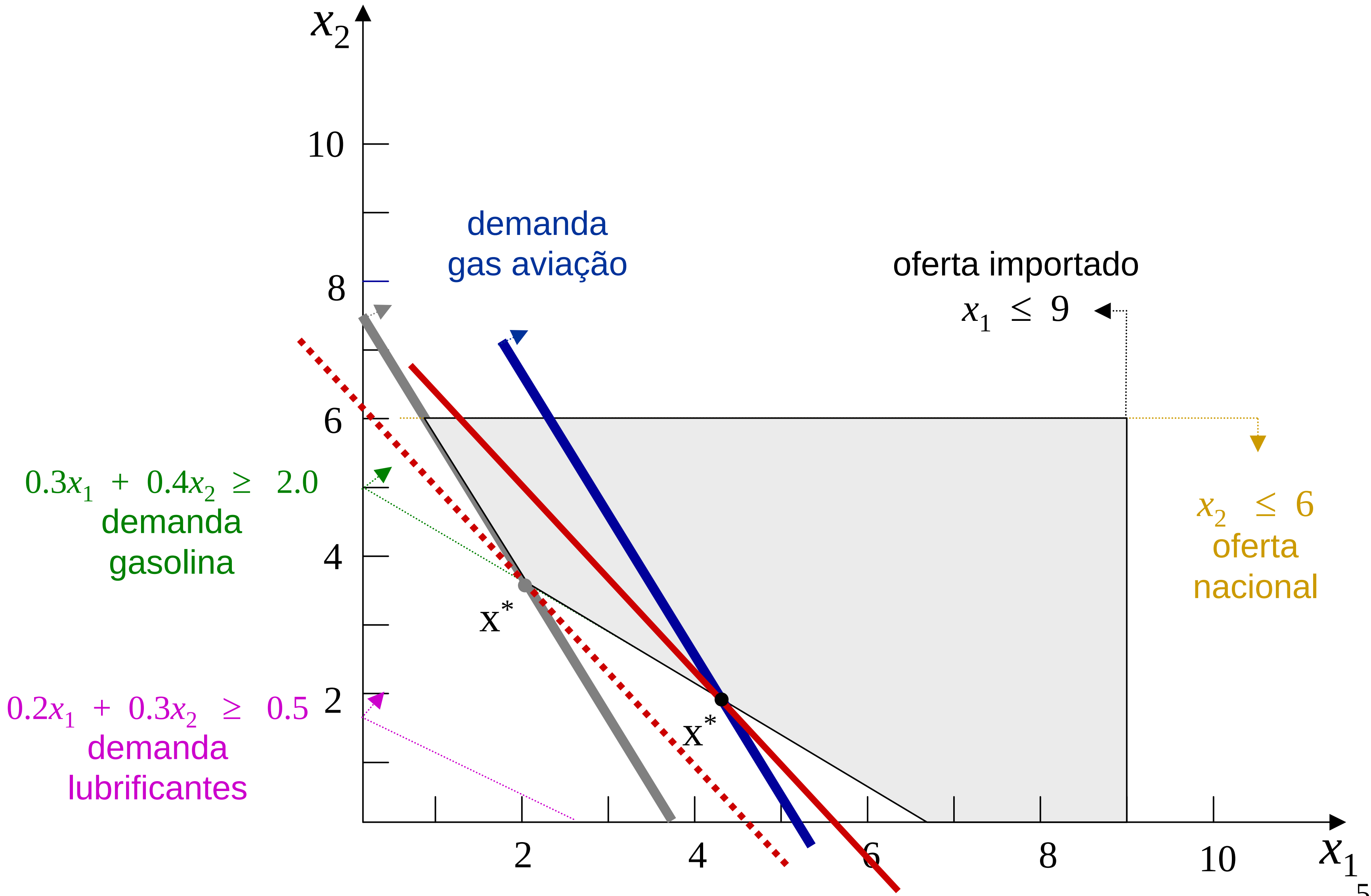
$x \in R^{n}$ $\quad c \in R^{n}$ $\quad b \in R^{mb}$ $\quad r \in R^{mr}$ $\quad d \in R^{md}$

nível de atividade

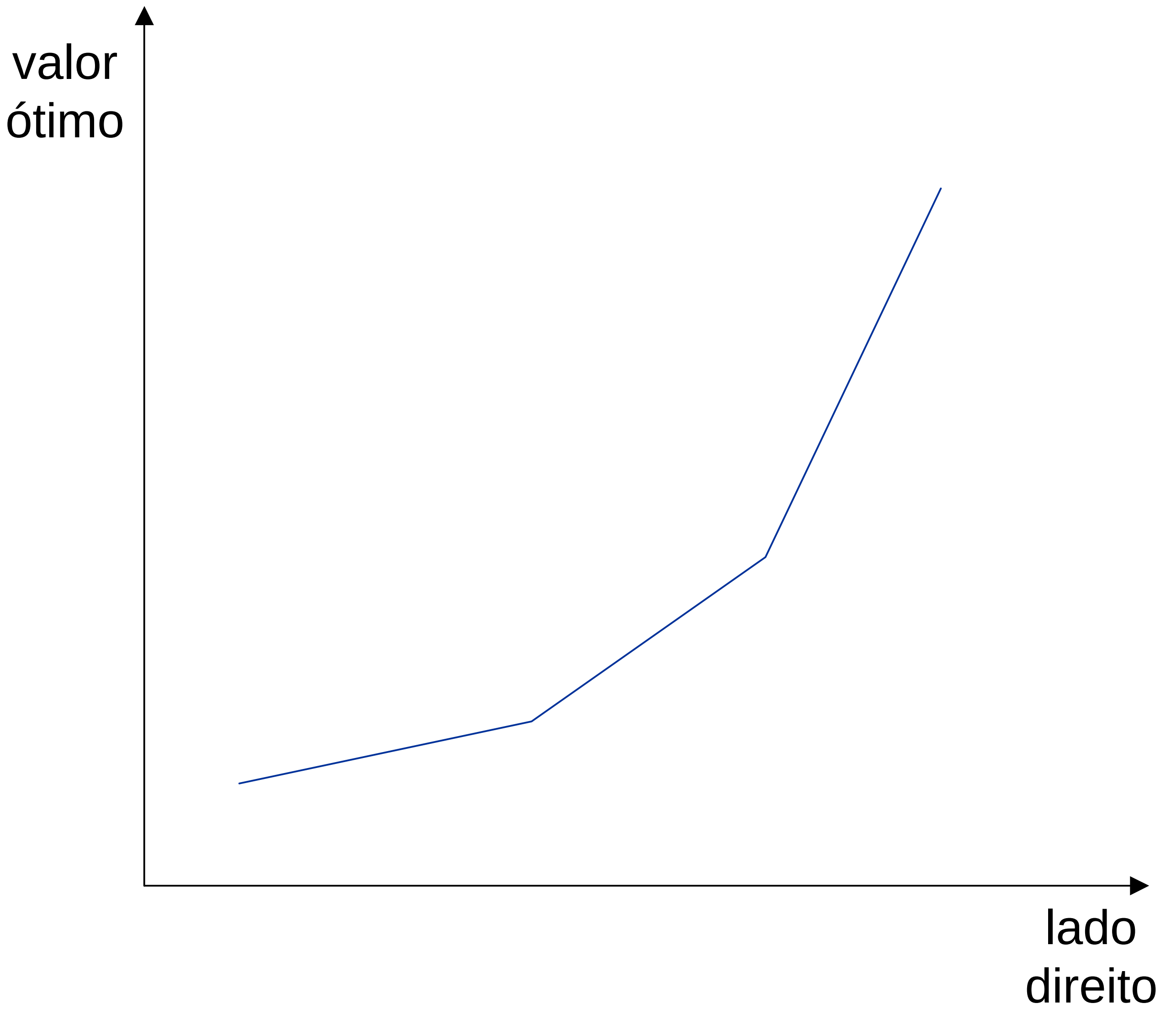
$F \in R^{n\times mb}$ $\quad G \in R^{n\times mr}$ $\quad H \in R^{n\times md}$

tecnologia

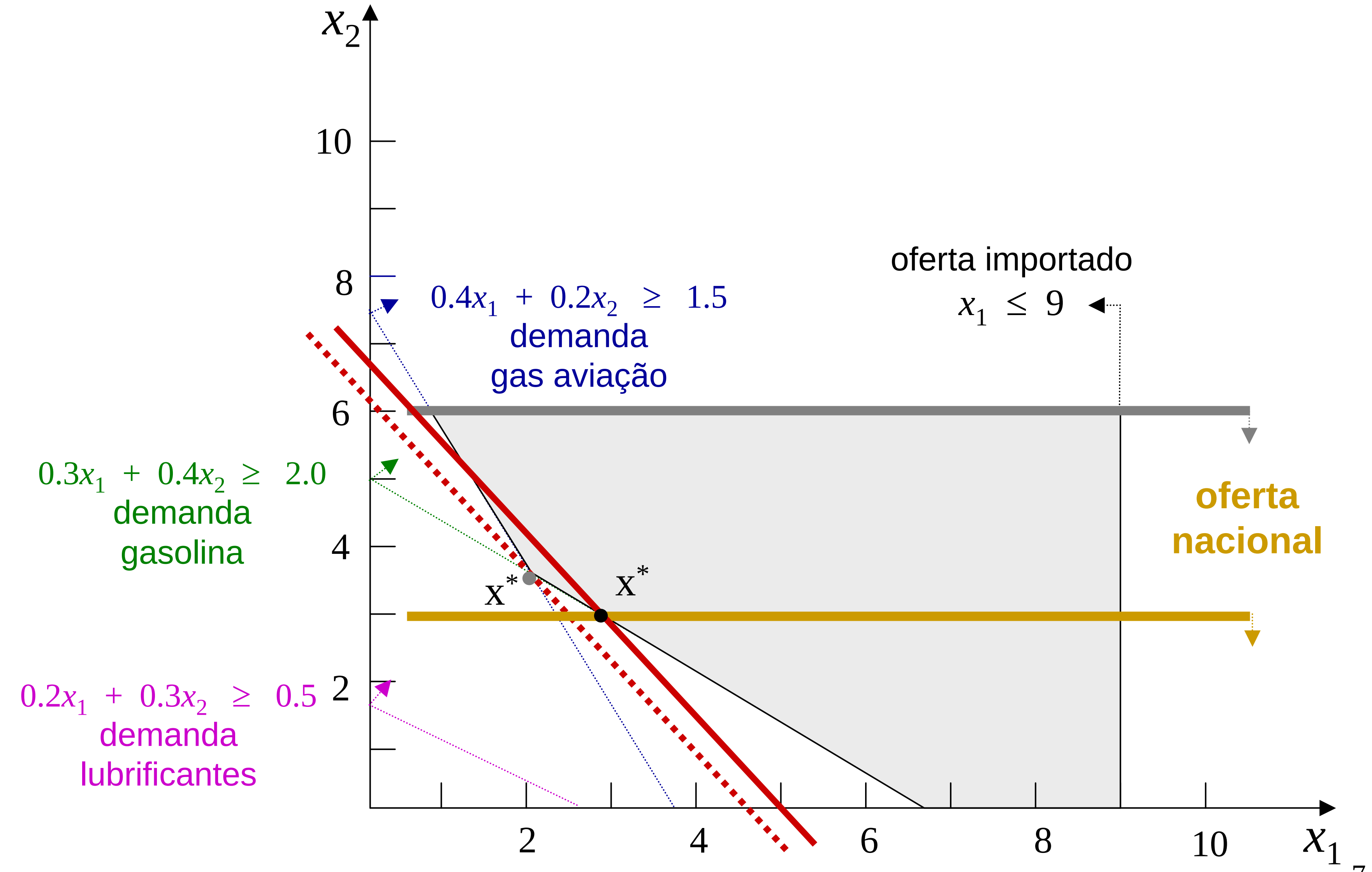
Variação de Demanda: Exemplo



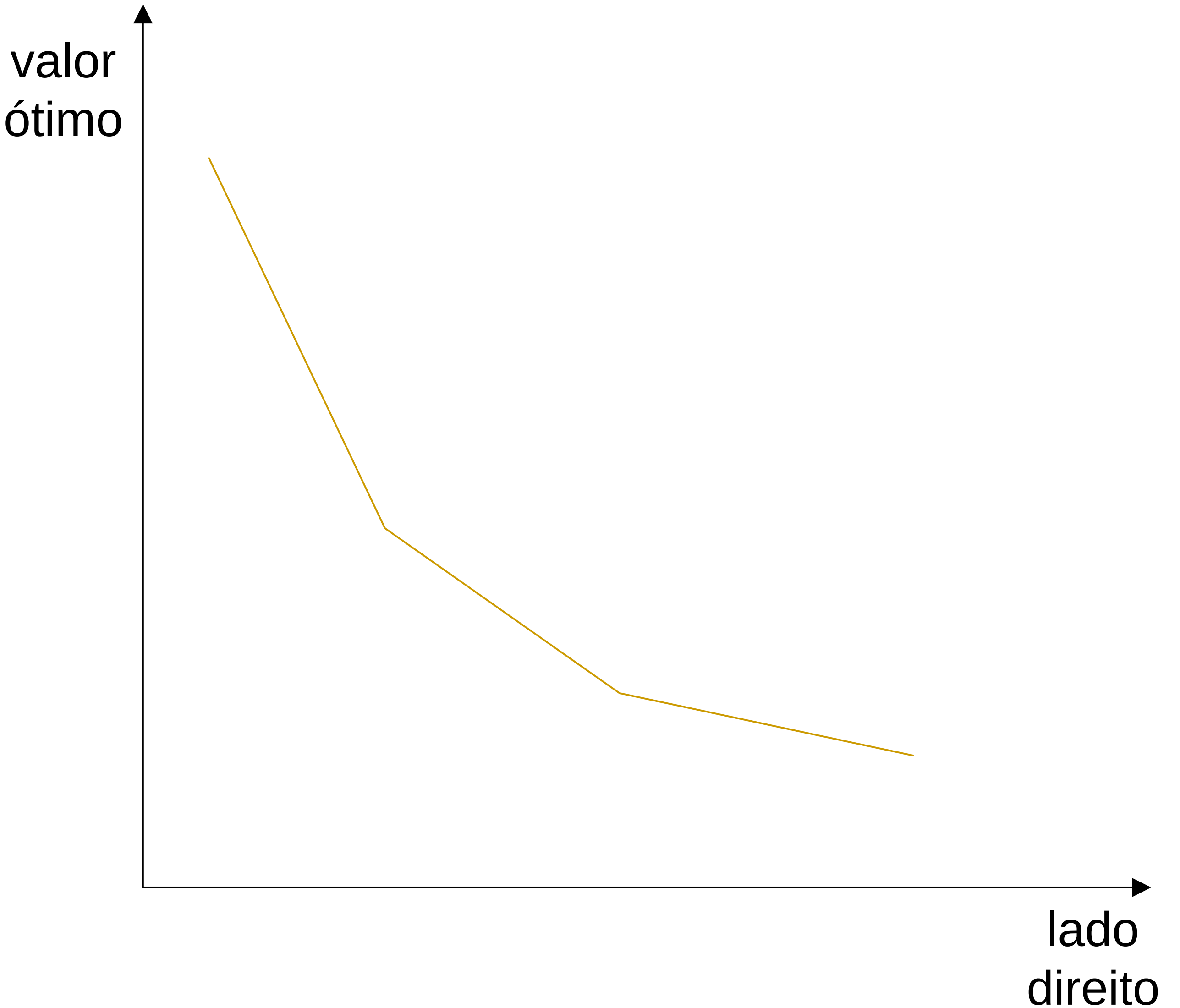
Variação de Demanda Exemplo



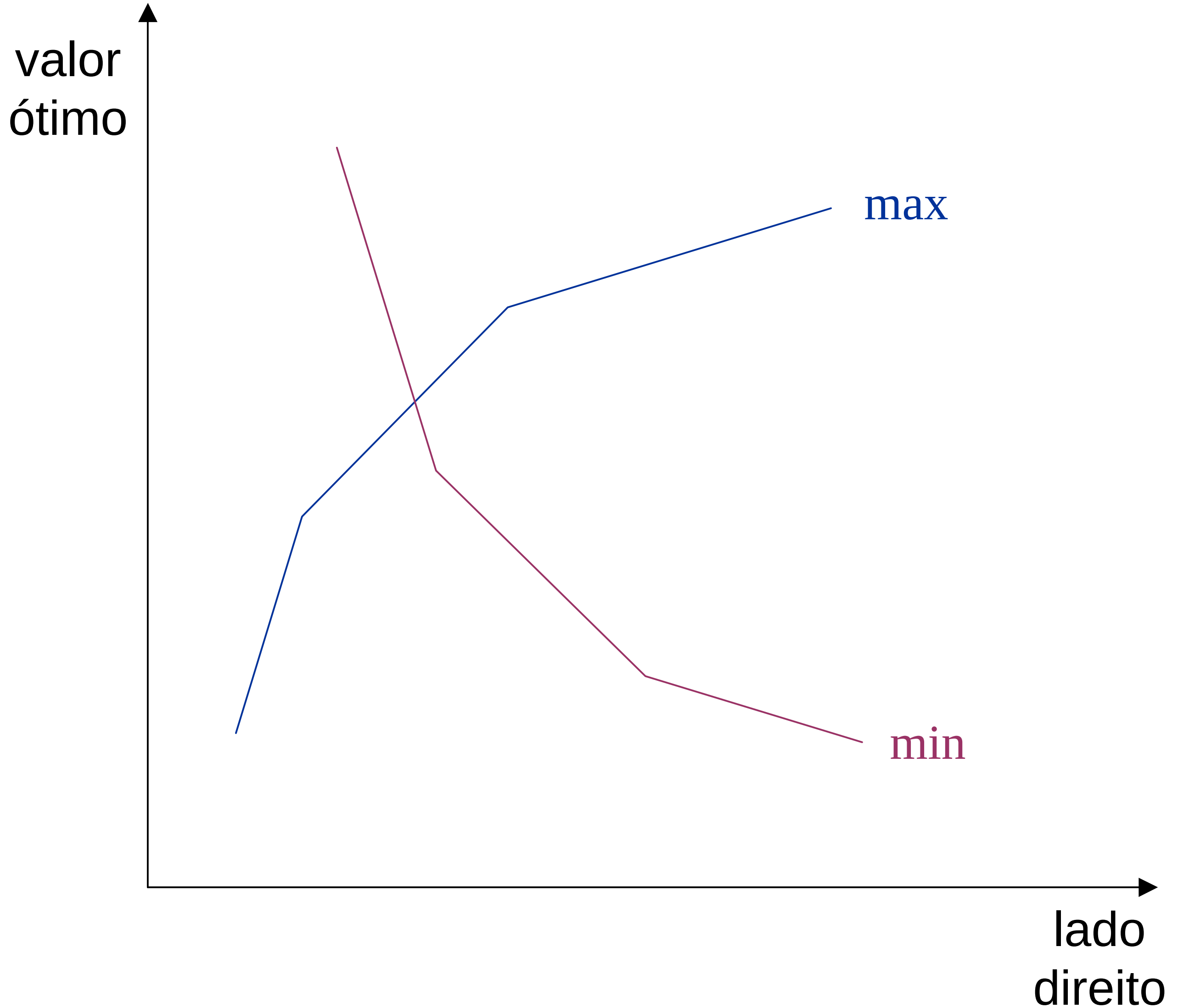
Variação de Oferta: Exemplo



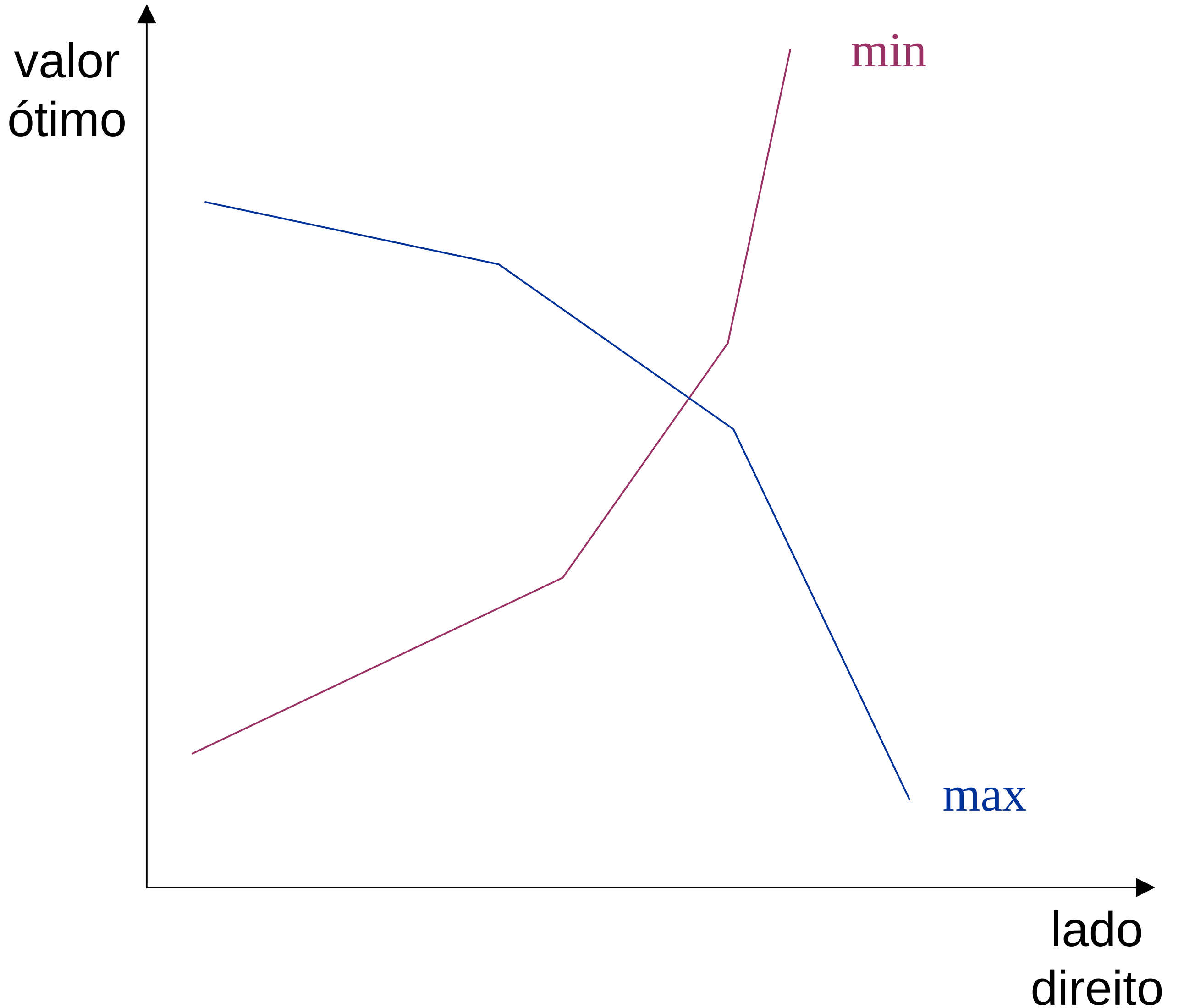
Variação de Oferta: Exemplo



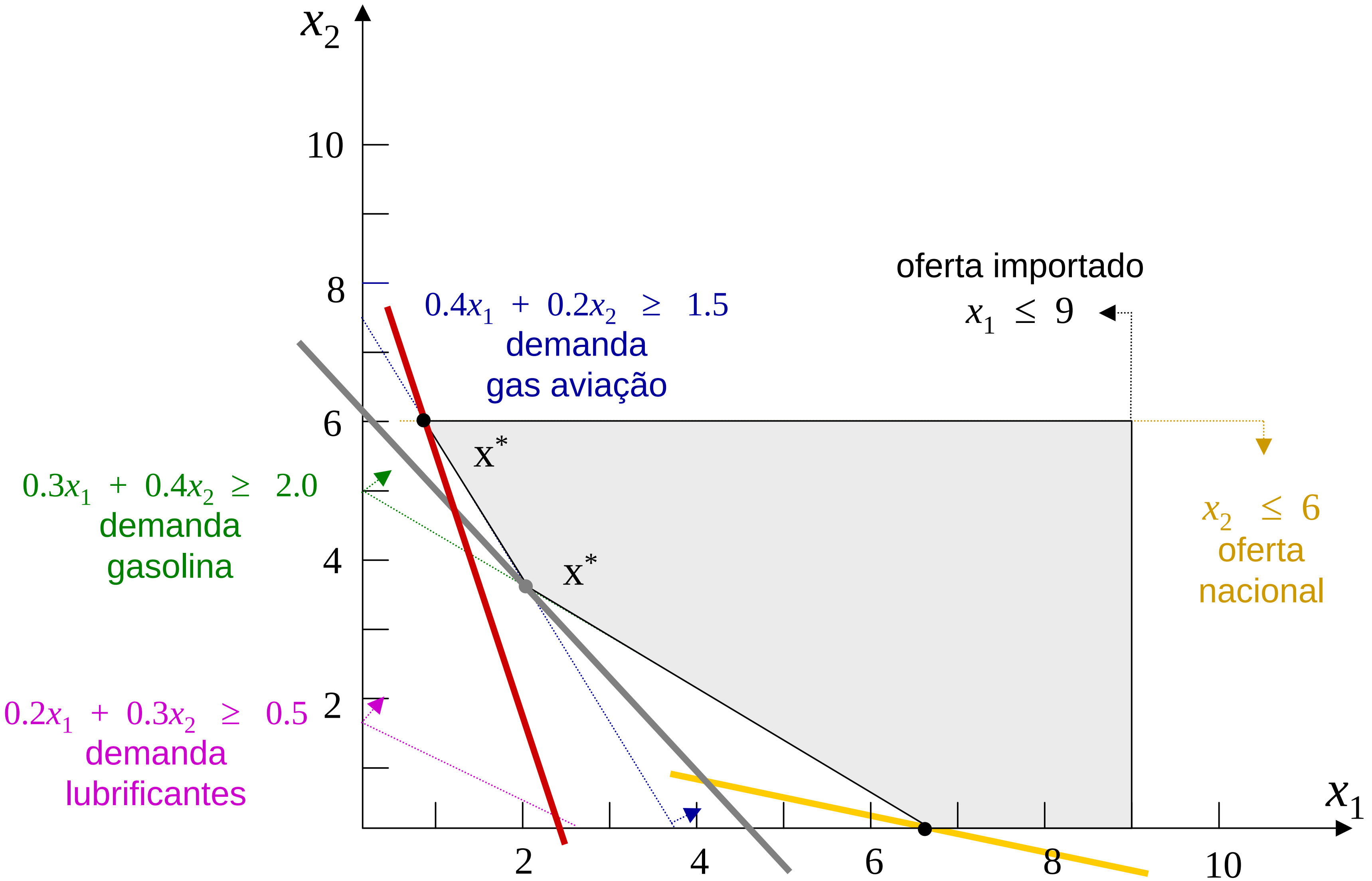
Em geral: Variação de Oferta ($\leq$)



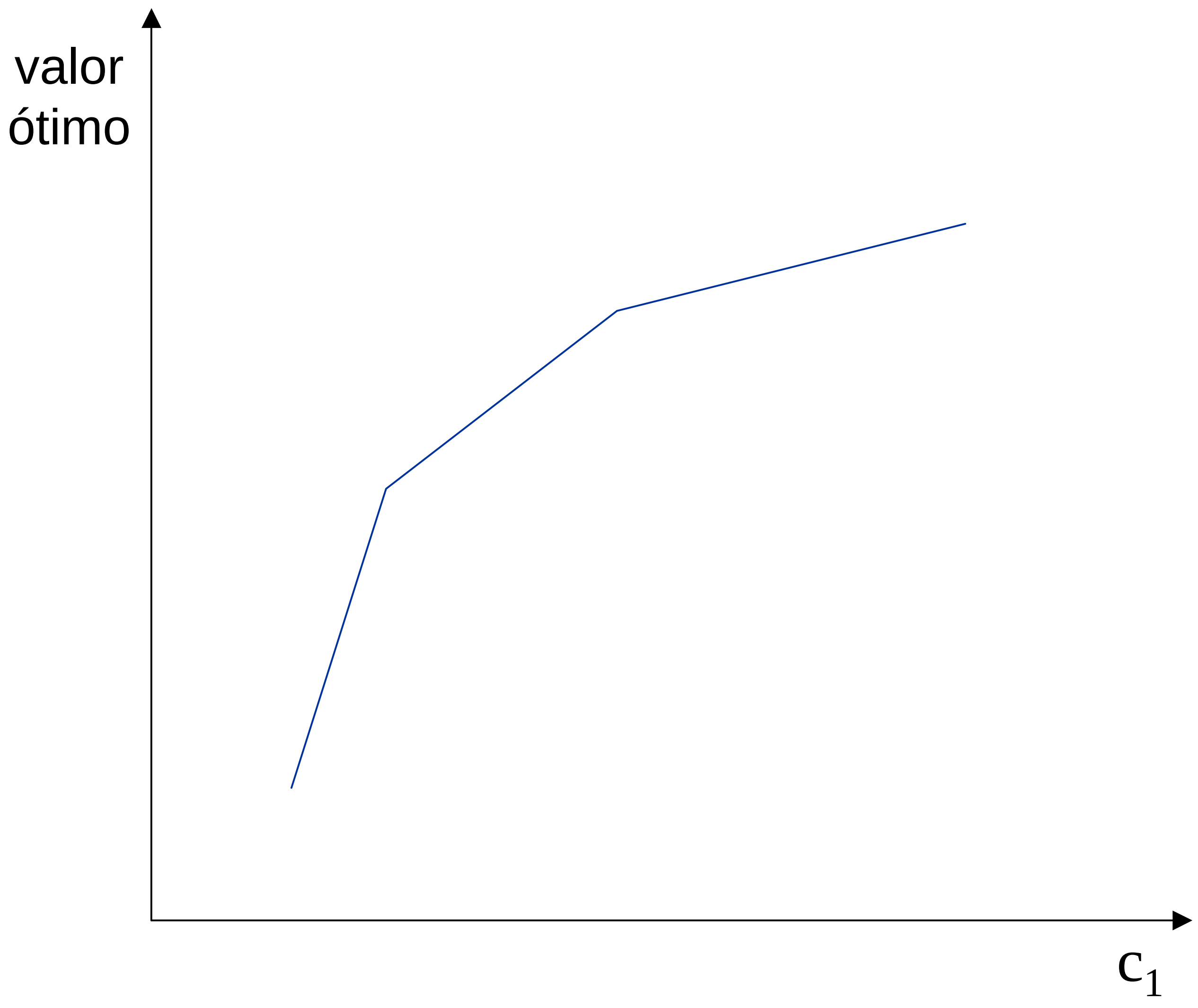
Em geral: Variação de Demanda ($\geq$)



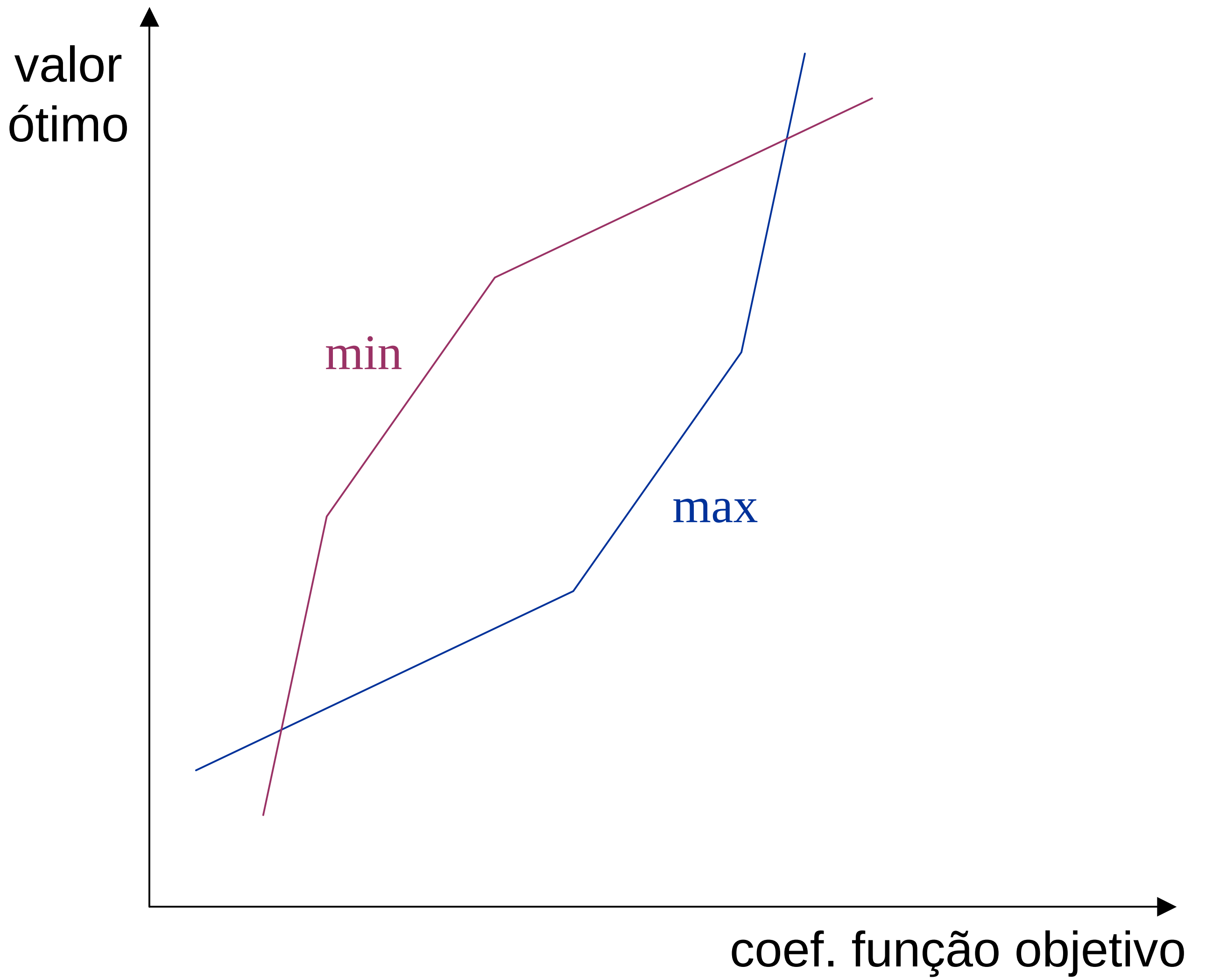
Variação Função Objetivo: Exemplo (custo)



Variação no Coeficiente c_1: Exemplo



Em geral: Variação Coeficiente



Sensibilidade e Dualidade

- Modelo primal: modela a aplicação de interesse
- Modelo dual : modelo auxiliar que caracteriza sensibilidade dos resultados do modelo primal com relação a variação nos parâmetros do modelo
- Variáveis duais
  – uma para cada restrição do primal
  – refletem a taxa de variação do valor ótimo do primal por unidade de aumento no lado direito das restrições correspondentes

Tipo Restrição	Aumenta Lado Direito	Diminui Lado direito
Oferta ($\leq$)	Relaxa	Aperta
Demanda ($\geq$)	Aperta	Relaxa

Variável Dual

$\boldsymbol{v}_\mathrm{i}$

Primal	min	max
i é $\leq$	$v_\mathrm{i} \leq 0$	$v_\mathrm{i} \geq 0$
i é $\geq$	$v_\mathrm{i} \geq 0$	$v_\mathrm{i} \leq 0$
i é =	irrestrita	irrestrita

- Relaxa restrições
  - valor ótimo melhora ou permanece o mesmo
    - maior (max)
    - menor (min)

- Aperta restrições
  - valor ótimo piora ou permanece o mesmo
    - menor (max)
    - maior (min)

i-ésima restrição

$$\min \quad 20x_1 + 15x_2$$

$$\begin{array}{llcllll}
\text{s.a.} & 0.3x_1 + 0.4x_2 & \geq & 2.0 & v_1 \geq 0 & \text{demanda gasolina} \\
 & 0.4x_1 + 0.2x_2 & \geq & 1.5 & v_2 \geq 0 & \text{demanda gas aviação} \\
 & 0.2x_1 + 0.3x_2 & \geq & 0.5 & v_3 \geq 0 & \text{demanda lubrificantes} \\
 & x_1 & \leq & 9 & v_4 \leq 0 & \text{oferta petróleo importado} \\
 & \qquad\quad x_2 & \leq & 6 & v_5 \leq 0 & \text{oferta petróleo nacional}
\end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

v_1 (1000 $ / 1000 barris): custo implícito para produzir os últimos 1000 barris de gasolina quando a demanda é de 2000 barris (preço marginal da gasolina)

v_4 (1000 $ / 1000 barris): valor de 1000 barris adicionais de petróleo importado quando o nível oferta é 9000 barris

Formulação Modelo Dual

$$\min \sum_{j} c_j x_j \qquad\qquad \max \sum_{i} \mathrm{b}_i v_i$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad\qquad \text{s.a.} \quad \sum_{i} a_{ij} v_i \leq c_j$$

$$x_j \geq 0 \qquad\qquad v_i \geq 0$$

Primal **Dual**

Exemplo

$$\begin{array}{llcll}
\min & 20x_1 + 15x_2 & & & \\
\text{s.a.} & 0.3x_1 + 0.4x_2 & \geq & 2.0 & \text{demanda gasolina} \\
& 0.4x_1 + 0.2x_2 & \geq & 1.5 & \text{demanda gas aviação} \\
& 0.2x_1 + 0.3x_2 & \geq & 0.5 & \text{demanda lubrificantes} \\
& x_1 & \leq & 9 & \text{oferta petróleo importado} \\
& x_2 & \leq & 6 & \text{oferta petróleo nacional} \\
& x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}$$

Primal

$$\begin{array}{ll}
\max & 2\,v_1 + 15v_2 + 0.5v_3 + 9v_4 + 6v_5 \\
\text{s.a.} & 0.3v_1 + 0.4v_2 + 0.2v_3 + 1v_4 \leq 20 \\
& 0.4v_1 + 0.2v_2 + 0.3v_3 + 1v_5 \leq 15 \\
& v_1, v_2, v_3 \geq 0 \;\; ; v_4, v_5 \leq 0
\end{array}$$

Dual

Características do Modelo Dual

– Variáveis duais: fornecem preços implícitos de uma unidade marginal do recurso modelado por cada restrição quando o limite do lado direito é atingido

– Valor marginal implícito (minimização) ou preço (maximização) de uma unidade de atividade (variável primal) j devido à variável dual v_i é $\sum_i a_{ij} v_i$, onde a_{ij} = coeficiente da atividade j no lado esquerdo da i-ésima restrição

– A cada atividade x_j corresponde a restrição dual

- $\sum_i a_{ij} v_i \leq c_j$ minimização
- $\sum_i a_{ij} v_i \geq c_j$ maximização

Relações entre Modelo Primal e Dual

- Se primal possui solução ótima então $\sum_j c_j x_j^* = \sum_i b_i v_i^*$

- Folga complementar primal: ou a solução primal ativa a i-ésima restrição primal, ou $v_i = 0$

- Folga complementar dual: ou solução ótima primal é $x_j = 0$ ou v_i ativa j-ésima restrição dual

$$\left(\sum_{j} a_{ij} x_{j} - b_{i} \right) v_{i} = 0 \qquad \left(c_{j} - \sum_{i} v_{i} a_{ij} \right) x_{j} = 0$$

Dualidade fraca: para qualquer valor factível de x_j e v_i :

- $\sum_j c_j x_j \geq \sum_i b_i v_i$ primal é minimizar
- $\sum_j c_j x_j \leq \sum_i b_i v_i$ primal é maximizar

$$\sum_j c_j x_j - \sum_i b_i v_i = \sum_j c_j x_j \left(-\sum_i \sum_j v_i a_{ij} x_j + \sum_i \sum_j v_i a_{ij} x_j \right) - \sum_i b_i v_i$$

$$= \left(\sum_j c_j x_j - \sum_i \sum_j v_i a_{ij} x_j \right) + \left(\sum_i \sum_j v_i a_{ij} x_j - \sum_i b_i v_i \right) =$$

$$= \left(\sum_j c_j x_j - \sum_i \sum_j a_{ij} v_i x_j \right) + \left(\sum_i \sum_j a_{ij} x_j v_i - \sum_i b_i v_i \right) =$$

$$= \sum_j \left(c_j - \sum_i v_i a_{ij} \right) x_j + \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j - b_i \right) v_i$$

Dualidade forte: se o ou primal ou o dual possui uma solução ótima, então ambos possuem solução ótima e

$$\sum_j c_j x_j^* = \sum_i b_i v_i^*$$

$$vB = (c_{1st}, c_{2nd}, \cdots c_{mth})$$

$$\bar{c}_j = c_j - \sum_i a_{ij} v_i \geq 0 \qquad (\text{supondo minimização})$$

Se simplex revisado pára com uma solução ótima, então o vetor v é solução ótima para o modelo dual conrrespondente

1 - Se v satisfaz condições de otimalidade, então é solução factível do dual

se $\bar{c}_j = c_j - \sum_i a_{ij} v_i \geq 0$ $\forall$ variáveis j (forma padrão)

então $\sum_i a_{ij} v_i \leq c_j$ (supondo minimização)

2 - Valor da função objetivo do modelo dual para v que satisfaz condição de otimalidade do primal é idêntico ao valor da função objetivo do primal.

$$1 - \quad c_j - \sum_i a_{ij} v_i \geq 0 \;\Rightarrow\; \sum_i a_{ij} v_i \leq c_j$$

$$a_{kj} = \begin{cases} +1 & \text{k} = \text{i e i é do tipo } \leq \\ -1 & \text{k} = \text{i e i é do tipo } \geq \\ \;\;0 & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad (\text{para variáveis de folga ou excesso})$$

$$\text{Se } \leq : -(+1 v_i) \geq 0 \;\Rightarrow\; v_i \leq 0$$

$$\text{Se } \geq : -(-1 v_i) \geq 0 \;\Rightarrow\; v_i \geq 0$$

$$2 - \sum_{i} b_i v_i = (c_{1st}, c_{2nd}, \cdots, c_{mth})B^{-1}b$$

$$(x_{1st}, x_{2nd}, \cdots, x_{mth}) = B^{-1}b \quad (\text{componentes não nulas são básicas})$$

$$\sum_{j} c_j x_j^* = c_{1st} x_{1st} + c_{2nd}\, x_{2nd} + \cdots + c_{mth} x_{mth} = (c_{1st}, c_{2nd}, \cdots, c_{mth})B^{-1}b$$

$$\sum_{j} c_j x_j^* \geq \sum_{i} b_i v_i \;\; (\textit{dualidade fraca}) \;\therefore\;\; \sum_{j} c_j x_j^* = \sum_{i} b_i v_i^*$$

Folga Complementar Ótimo Primal e Dual

$$0 = \sum_{j} c_j x_j^* - \sum_{i} b_i v_i^* =$$

$$= \sum_{j} \left(c_j - \sum_{i} v_i^* a_{ij} \right) x_j^* + \sum_{i} \left(\sum_{j} a_{ij} x_j^* - b_i \right) v_i^*$$

$$\Rightarrow \quad \left(c_j - \sum_{i} v_i^* a_{ij} \right) x_j^* = 0 \quad \text{e} \quad \left(\sum_{j} a_{ij} x_j^* - b_i \right) v_i^* = 0$$

Modelos Ilimitados e Infactíveis

$$\sum_{j} c_j x_j \geq \sum_{i} b_i v_i \qquad (\mathit{dualidade\ \ fraca})$$

modelo primal ilimitado $\Leftrightarrow$ modelo dual infactível

modelo dual ilimitado $\Leftrightarrow$ modelo primal infactível

Resultados Computacionais e Sensibilidade

Modelo Solver Excel: Petrolinea

Produto	Importado	Nacional	Objetivo	Tipo		
Quantidades (1000 barris)	2	3,5	92,5			
Custos ($)	20	15				
Restrições	Recurso		Total		Lado direito	Folga
Demanda Gasolina	0,30	0,40	2	$\geq$	2	0
Demanda Gas Aviação	0,40	0,20	1,5	$\geq$	1,50	0
Demanda Lubrificante	0,20	0,30	1,45	$\geq$	0,50	-0,95
Oferta Importado	1,00	0,00	2	$\leq$	9	7
Oferta Nacional	0,00	1,00	3,5	$\leq$	6	2,5

Microsoft Excel 8.0 Sensitivity Report
Worksheet: [PetrolineaSolver.xls]
Report Created: 07/09/03 22:37:52

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
B3	Quantidades (1000 barris) Importado	2	0	20	10	8,75
C3	Quantidades (1000 barris) Nacional	3,5	0	15	11,66666667	5

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
D9	Oferta Importado Total	2	0	9	1E+30	7
D10	Oferta Nacional Total	3,5	0	6	1E+30	2,5
D6	Demanda Gasolina Total	2	20	2	0,625	0,875
D7	Demanda Gas Aviação Total	1,5	35	1,5	1,166666667	0,5
D8	Demanda Lubrificante Total	1,45	0	0,5	0,95	1E+30

Observação

Este material refere-se às notas de aula do curso EA 044 Planejamento e Análise de Sistemas de Produção da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp. Não substitui o livro texto, as referências recomendadas e nem as aulas expositivas. Este material não pode ser reproduzido sem autorização prévia dos autores. Quando autorizado, seu uso é exclusivo para atividades de ensino e pesquisa em instituições sem fins lucrativos.