Algoritmo Simplex para Programação Linear II

Forma Matricial do Simplex

$$A = [B, D] \quad x = (x_B, x_D) \quad c = [c_B, c_D]$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min & c_B\, x_B + c_D x_D \\ \text{s.a.} & B x_B + D x_D = b \\ & x_B \geq 0,\; x_D \geq 0 \end{array}}$$

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} D x_D$$

$$z = c_B (B^{-1} b - B^{-1} D x_D) + c_D x_D$$

$$r = c_D - c_B B^{-1} D$$

$$\left[\begin{array}{c:c} A & b \\ \hdashline c & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c:c} B & D & b \\ \hdashline c_B & c_D & 0 \end{array}\right]$$

Se B é utilizada como uma base, então:

$$\left[\begin{array}{c:c:c} \mathbf{I} & B^{-1}D & B^{-1}b \\ \hdashline \mathbf{0} & c_D - c_B B^{-1}D & -c_B B^{-1}b \end{array}\right] = T$$

Algoritmo Simplex Revisado

Se B é a base corrente, então:

$$x_B = B^{-1}b$$

solução básica

$$\Delta x = -B^{-1}a^j$$

componentes básicos da direção para não básica x_j

$$a^j = \text{coluna de A correspondente à } x_j$$

							t = 0
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
max c	12	9	0	0	0	0	
	1	0	1	0	0	0	1000
A	0	1	0	1	0	0	1500
	1	1	0	0	1	0	1750
	4	2	0	0	0	1	4800
	N	N	B	B	B	B	
x^0	0	0	1000	1500	1750	4800	$cx^0 = 0$
$\Delta x(x_1)$	1	0	-1	0	-1	-4	$\underline{c}_1 = 12$
$\Delta x(x_2)$	0	1	0	-1	-1	-2	$\underline{c}_2 = 9$
λ			$\boxed{1000/-(-1)}$		1750/-(-1)	4800/-(-4)	

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 1500 \\ 1750 \\ 4800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1500 \\ 750 \\ 800 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_4 \\ \Delta x_5 \\ \Delta x_6 \end{bmatrix} = B^{-1}a^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

							$t = 1$
	B	N	N	B	B	B	
x^1	1000	0	0	1500	750	800	$cx^1 = 12000$
$\Delta x\ (x_2)$	0	1	0	-1	-1	-2	$\underline{c}_2 = 9$
$\Delta x\ (x_3)$	-1	0	1	0	1	4	$\underline{c}_3 = -12$
λ				1500/-(-1)	750/-(-1)	$\boxed{800/-(-2)}$	

Atualização de B $^{-1}$

$$(\text{nova } B^{-1}) = E\ (\text{anterior } B^{-1})$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -\dfrac{\Delta x_{1st}}{\Delta x_{leave}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\dfrac{\Delta x_{2nd}}{\Delta x_{leave}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & -\dfrac{1}{\Delta x_{leave}} & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\dfrac{\Delta x_{mth}}{\Delta x_{leave}} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Variáveis no simplex revisado entram na base na mesma posição sequencial que as variáveis que saem

							t = 1
	B	N	N	B	B	B	
x^1	1000	0	0	1500	750	800	$cx^1 = 12000$
$\Delta x\,(x_2)$	0	1	0	-1	-1	-2	$\underline{c}_2 = 9$
$\Delta x\,(x_3)$	-1	0	1	0	1	4	$\underline{c}_3 = -12$
λ				1500/-(-1)	750/-(-1)	$\boxed{800/\text{-}(\text{-}2)}$	

$$\text{nova } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = E\,(\text{anterior } B^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -(\;0/-2) \\ 0 & 1 & 0 & -(-1/-2) \\ 0 & 0 & 1 & -(-1/-2) \\ 0 & 0 & 0 & -(\;1/-2) \end{bmatrix} (\text{anterior } B^{-1})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -0.5 \\ 1 & 0 & 1 & -0.5 \\ -2 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Custo Reduzido

custo reduzido para a j-ésima variável não básica

$$\bar{c}_j = c\Delta x = \sum_{k=1}^{n} c_k \Delta x_k = c_j + \sum_{k \in B} c_k \Delta x_k \,, \qquad \begin{bmatrix} \Delta x_{1st} \\ \Delta x_{2nd} \\ \vdots \\ \Delta x_{mth} \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} -a_{1j} \\ -a_{2j} \\ \vdots \\ -a_{mj} \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_j = c_j - [c_{1st},\, c_{2nd},\, \cdots,\, c_{mth}]\, B^{-1} \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\bar{c} = c_D - c_B B^{-1} D}$$

t = 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
max c	12	9	0	0	0	0	
	1	0	1	0	0	0	1000
A	0	1	0	1	0	0	1500
	1	1	0	0	1	0	1750
	4	2	0	0	0	1	4800
	B	N	N	B	B	B	
x^1	1000	0	0	1500	750	800	$cx^1 = 12000$
$\Delta x\,(x_2)$	0	1	0	-1	-1	-2	$\underline{c}_2 = 9$
$\Delta x\,(x_3)$	-1	0	1	0	1	4	$\underline{c}_3 = -12$
λ				1500/-(-1)	750/-(-1)	800/-(-2)	

$$v = [c_{1st}, c_{2nd}, \cdots, c_{mth}]B^{-1} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_2 = 9 - \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 9 \qquad \bar{c}_3 = 0 - \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -12$$

Algoritmo Simplex Revisado: Resumo

Passo 0 Inicialização: com uma base factível, determinar B^{-1} e variáveis básicas correspondentes, $x_B = B^{-1}b$ de x^0; não básicas $x_j \leftarrow 0$; $t \leftarrow 0$;

Passo 1 Custos reduzidos: usar inversa corrente para determinar $v = c_B B^{-1}$ calcular custos reduzidos $\underline{c}_j \leftarrow c_j - v\, a^j$;

Passo 2 Otimalidade: se $\nexists\ \underline{c}_j > 0$ para max ($\underline{c}_j < 0$ para min), então parar, x^t é ótima; senão escolher nova não básica x_p melhorando $\underline{c}_p$;

Passo 3 Direção simplex: construir Δx para não básica x_p usando inversa B^{-1} para determinar $\Delta x = - B^{-1} a^j$ para componetes básicas;

Passo 4 Passo: se todas componentes de Δx são não negativas, então parar pois o modelo é ilimitado; senão determinar λ e a variável que deixa a base x_r tal que

$$\frac{x_r^t}{-\Delta x_r} = \min_j \left\{ \frac{x_j^t}{-\Delta x_j^{t+1}} : \Delta x_j^{t+1} < 0 \right\},\ \lambda \leftarrow \frac{x_r^t}{-\Delta x_r}$$

Passo 5 Novo ponto e base: determinar nova solução $x^{t+1} = x^t + \lambda\, \Delta x^{t+1}$; trocar x_r por x_p ; Construir E e atualizar EB^{-1} , $t = t + 1$; ir para Passo 1;

$$
E's = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{-1}\right) & 0 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{0}{-1}\right) & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{-1}{-1}\right) & 0 & 1 & 0 \\ -\left(\frac{-4}{-1}\right) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\left(\frac{0}{-2}\right) \\ 0 & 1 & 0 & -\left(\frac{-1}{-2}\right) \\ 0 & 0 & 1 & -\left(\frac{-1}{-2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{1}{-2}\right) \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\left(\frac{-1}{-1}\right) & 0 \\ 0 & 1 & -\left(\frac{-2}{-1}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{1}{-1}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{2}{-1}\right) & 1 \end{bmatrix}
$$

Observação

Este material refere-se às notas de aula do curso EA 044 Planejamento e Análise de Sistemas de Produção da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp. Não substitui o livro texto, as referências recomendadas e nem as aulas expositivas. Este material não pode ser reproduzido sem autorização prévia dos autores. Quando autorizado, seu uso é exclusivo para atividades de ensino e pesquisa em instituições sem fins lucrativos.