



## EA 044 Planejamento e Análise de Sistemas de Produção

# Algoritmo Simplex para Programação Linear I

# Modelo de Programação Linear

$$\begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.a.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x \ (n \times 1) \\ A \ (m \times n), \ b \ (m \times 1), \ c \ (1 \times n) \end{array}$$

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\} \quad \text{Poliedro}$$

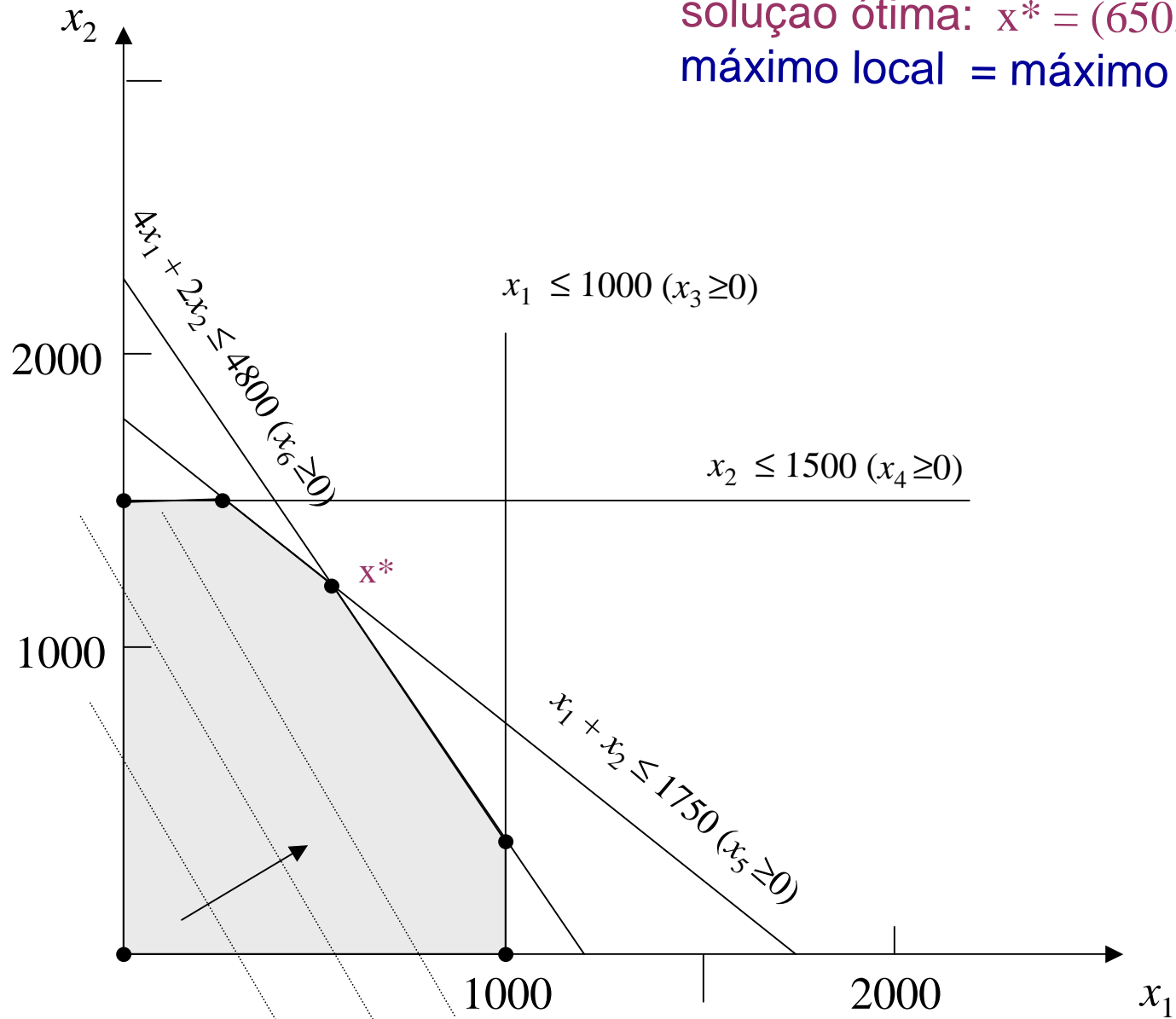
1-poliedros são conjuntos convexos

2- poliedros podem ser limitados ou ilimitados

# Exemplo

$$\begin{aligned} \max \quad & 12x_1 + 9x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 \leq 1000 \\ & x_2 \leq 1500 \\ & x_1 + x_2 \leq 1750 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 4800 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

solução ótima:  $x^* = (650, 1100)$   
máximo local = máximo global

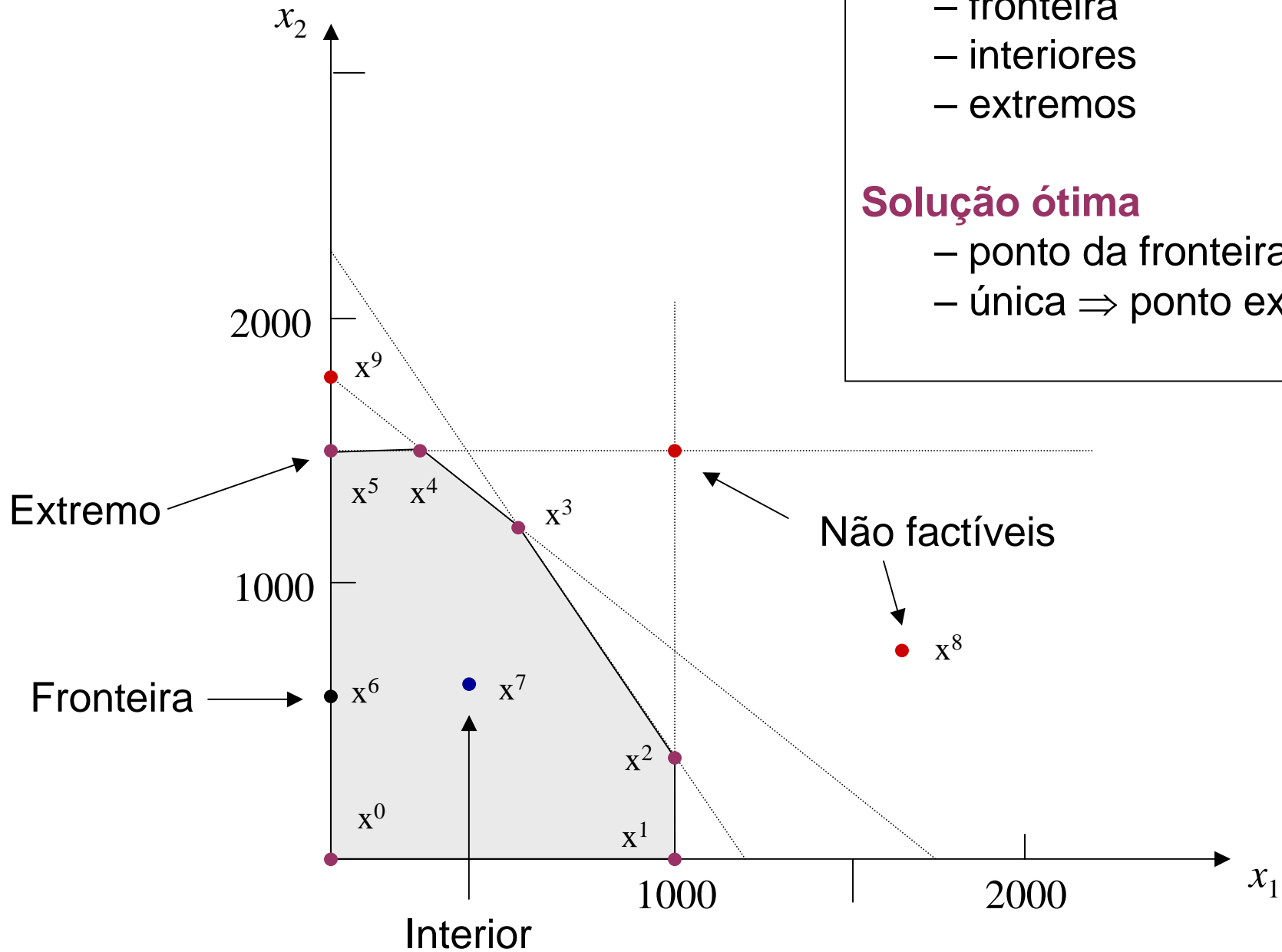


## Soluções factíveis

- fronteira
- interiores
- extremos

## Solução ótima

- ponto da fronteira
- única  $\Rightarrow$  ponto extremo



# Forma Padrão Modelos de PL

$$\max 12x_1 + 9x_2$$

$$\text{s.a.} \quad x_1 + x_3 = 1000$$

$$x_2 + x_4 = 1500$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 1750$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_6 = 4800$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$x_3, x_4, x_5, x_6$  : **variáveis de folga**

$$\min (\max) cx \quad c \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{s.a} \quad Ax = b \quad b \in \mathbb{R}^m$$

$$x \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}^n$$

**Forma padrão**

**OBS:** para restrições  $\geq$  subtrai-se  $x_i$ 's  $\rightarrow$  **variáveis de excesso**

$\min (\max) cx$	$c \in \mathbb{R}^n$
s.a $Ax = b$	$b \in \mathbb{R}^m$
$x \geq 0$	$x \in \mathbb{R}^n$

**Forma padrão**

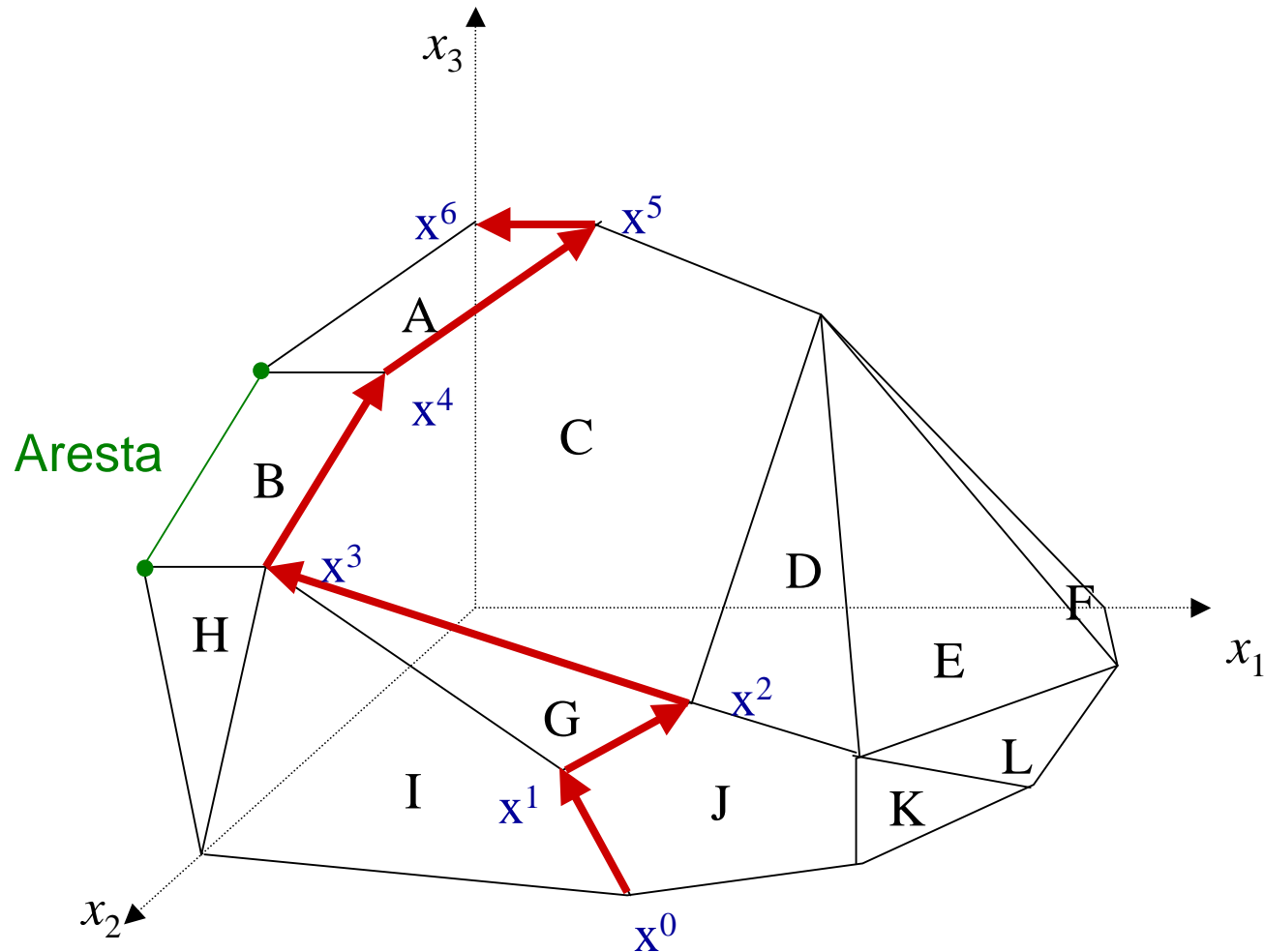
$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

**Poliedro forma padrão**

$x \in P$  **significa que  $x$  é uma solução factível**

OBS: poliedros são conjuntos convexos e podem ser limitados ou ilimitados

- **pontos extremos:** definidos pelas restrições que estão simultaneamente ativas nos pontos
- **pontos extremos adjacentes:** restrições ativas diferem de um elemento
- **aresta:** segmento de reta que conecta dois pontos extremos



# Soluções Básicas

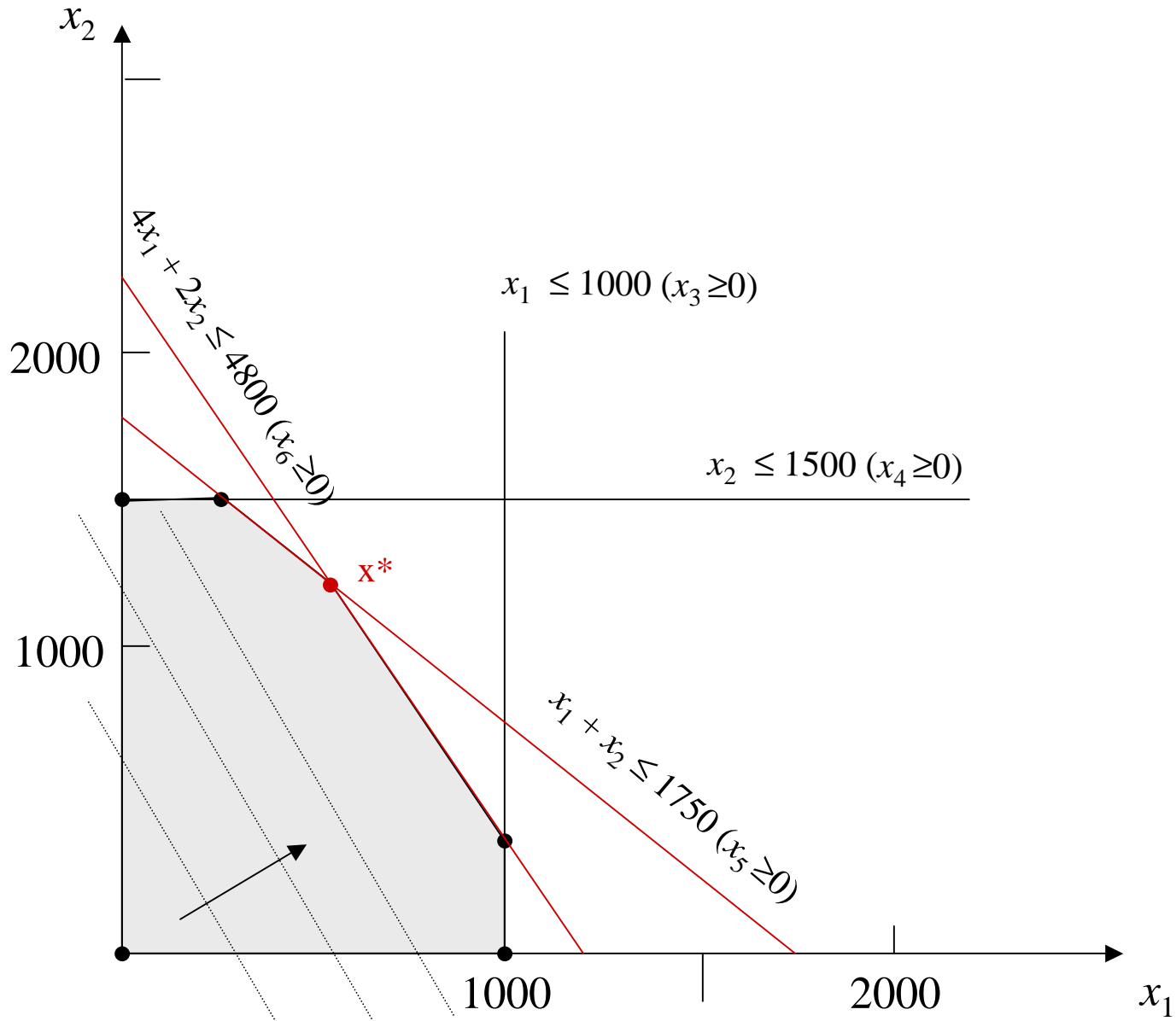
$$\begin{array}{l} \max \quad 12x_1 + 9x_2 \\ \text{s.a.} \quad x_1 \quad \quad \quad + x_3 \quad \quad \quad = 1000 \\ \quad \quad \quad x_2 \quad \quad \quad + x_4 \quad \quad \quad = 1500 \\ \quad \quad \quad x_1 + x_2 \quad \quad \quad + x_5 \quad \quad \quad = 1750 \\ \quad \quad \quad 4x_1 + 2x_2 \quad \quad \quad + x_6 = 4800 \\ \quad \quad \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 \quad \quad \quad + x_3 \quad \quad \quad = 1000 \\ \quad \quad \quad x_2 \quad \quad \quad + x_4 \quad \quad \quad = 1500 \\ x_1 + x_2 \quad \quad \quad + 0 \quad \quad \quad = 1750 \\ 4x_1 + 2x_2 \quad \quad \quad + 0 \quad \quad \quad = 4800 \end{array}$$

$$x_1 = 650, x_2 = 1100, x_3 = 350, x_4 = 400$$

**Básicas**

**Não básicas**



# Existência de Soluções Básicas

$$\begin{array}{rclcrcl} x_1 & & + x_3 & & = & 1000 \\ & x_2 & & + x_4 & = & 1500 \\ x_1 + & x_2 & & & + 0 & = 1750 \\ 4x_1 + & 2x_2 & & & + 0 & = 4800 \end{array}$$

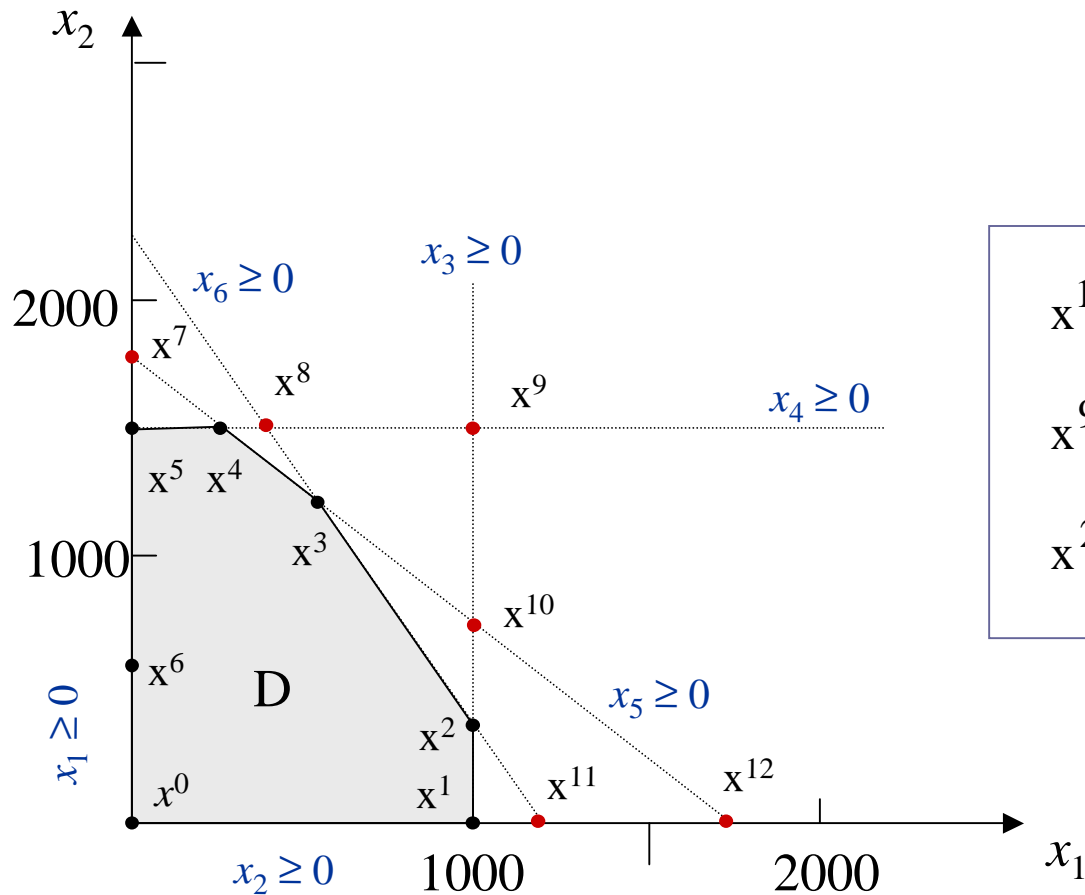
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

$$\begin{array}{rclcrcl} x_1 & & + x_3 & & = & 1000 \\ & 0 & & + 0 & = & 1500 \\ x_1 + & 0 & & & + x_5 & = 1750 \\ 4x_1 + & 0 & & & + x_6 & = 4800 \end{array}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Solução básica existe se e somente se as colunas das restrições de igualdade correspondentes às  $m$  variáveis básicas são linearmente independentes (formam uma base)(solução não degenerada).

- Solução básica factível: solução básica não negativa
- Soluções básicas factíveis: pontos extremos de D



$$x^{11} = (1200, 0, -200, 1500, 550, 0)$$

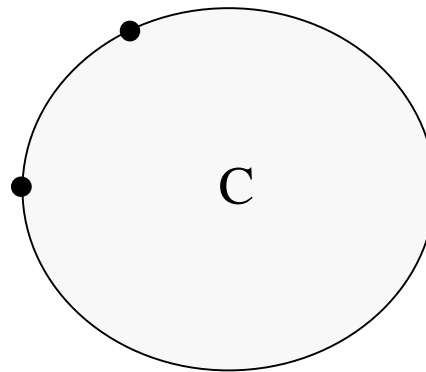
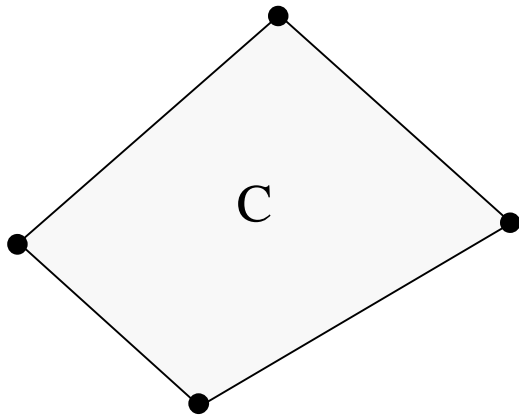
$$x^9 = (1000, 1500, 0, 0, -750, -2200)$$

$$x^2 = (1000, 400, 0, 1100, 350, 0)$$

## Ponto extremo: definição

Um ponto  $x$  de um conjunto convexo  $C$  é um ponto extremo se não existem dois pontos distintos,  $x^1$  e  $x^2$  em  $C$  tal que, para algum  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$

$$x = \alpha x^1 + (1 - \alpha) x^2$$



# Resumo dos Resultados Importantes

## Teorema 1: equivalência de pontos extremos e soluções básicas

Considere um poliedro não vazio  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \text{ e } x \geq 0\}$ . Um vetor  $x$  é um ponto extremo de  $P$  se e somente se  $x$  é uma solução básica factível de  $Ax = b, x \geq 0$ .

## Teorema 2: representação de soluções básicas factíveis

Considere um modelo de PL na forma padrão e sejam  $x^1, \dots, x^k$  soluções básicas factíveis do modelo. Então, qualquer ponto  $x \in P$  pode ser escrito como

$$x = d + \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$$

onde ou  $d = 0$  ou é uma direção ilimitada e  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$

## **Teorema 3: resultado fundamental da programação linear**

Dado um modelo de programação linear na forma padrão, então:

3.1 se existe uma solução factível, então existe uma solução básica factível

3.2 se existe uma solução factível ótima, então existe uma solução básica factível ótima.

(resultado fundamental da PL sob o ponto de vista algébrico)

## **Colorário 1: existência de pontos extremos**

Se um poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \text{ e } x \geq 0\}$  é não vazio, então  $P$  possui no mínimo um ponto extremo.

## **Colorário 2: solução ótima finita é um ponto extremo**

Se existe uma solução ótima finita para um modelo de PL, então existe uma solução ótima finita que é um ponto extremo de  $P$ .

### **Colorário 3: número de pontos extremos**

O poliedro  $P$  possui no máximo um número finito de pontos extremos.

### **Colorário 4: representação de poliedros limitados**

Se o poliedro  $P$  é limitado e não vazio, então  $P$  é o conjunto dos pontos que são combinações convexas de seus pontos extremos.

## Teorema 4: resultado fundamental da programação linear

Uma função objetivo linear  $cx$  atinge seu mínimo sobre um poliedro limitado  $P$  em um ponto extremo de  $P$ .

Prova (Luenberger, 1973):

Sejam  $x^1, x^2, \dots, x^k$  pontos extremos de  $P$ . Como  $P$  é finito e convexo, todo ponto  $x \in P$  pode ser expresso como

$$x = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_k x^k, \quad \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, k; \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1$$

$$\text{Logo } cx = \alpha_1 (cx^1) + \alpha_2 (cx^2) + \dots + \alpha_k (cx^k)$$

$$\text{Seja } z = \min \{cx^i, i = 1, \dots, k\}. \text{ Então } cx \geq (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k)z = z$$

Logo, o mínimo de  $cx$  sobre  $P$  é  $z$ .

(resultado fundamental da PL sob o ponto de vista geométrico)

# Algoritmo Simplex

## 1-solução básica factível inicial: ponto extremo

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
max c	12	9	0	0	0	0	
A	1	0	1	0	0	0	1000
	0	1	0	1	0	0	1500
	1	1	0	0	1	0	1750
	4	2	0	0	0	1	4800
	N	N	B	B	B	B	
$x^0$	0	0	1000	1500	1750	4800	

## 2-Direções de busca (direções simplex)

**Direções simplex:** são construídas aumentando-se uma única variável não básica de tal forma que as variáveis não básicas restantes não sejam modificadas e determinando as correções correspondentes para as variáveis básicas necessárias para preservar as restrições de igualdade

$$A \Delta x = 0$$

umentando  $x_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 = 1 \\ \Delta x_2 = 0 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \\ \Delta x_5 \\ \Delta x_6 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Delta x = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad -4]$$

umentando  $x_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 = 0 \\ \Delta x_2 = 1 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \\ \Delta x_5 \\ \Delta x_6 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Delta x = [0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad -2]$$

20

### 3-Direções que melhoram objetivo e custo reduzido

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_n], \forall \mathbf{x}$$

$$\bar{c}_j = \mathbf{c} \Delta \mathbf{x}, \quad \Delta \mathbf{x} = \text{direção simplex que aumenta } x_j$$

**custo reduzido**

$\bar{c}_j > 0$  direção simplex melhora, para problemas de maximização

$\bar{c}_j < 0$  direção simplex melhora, para problemas de minimização

$$\bar{c}_1 = [12, 9, 0, 0, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = 12 > 0 ; \quad \bar{c}_2 = [12, 9, 0, 0, 0, 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = 9 > 0$$

## 4-Passo na direção de busca

$$\lambda = \min \left\{ \frac{x_j^t}{-\Delta x_j} : \Delta x_j < 0 \right\}$$

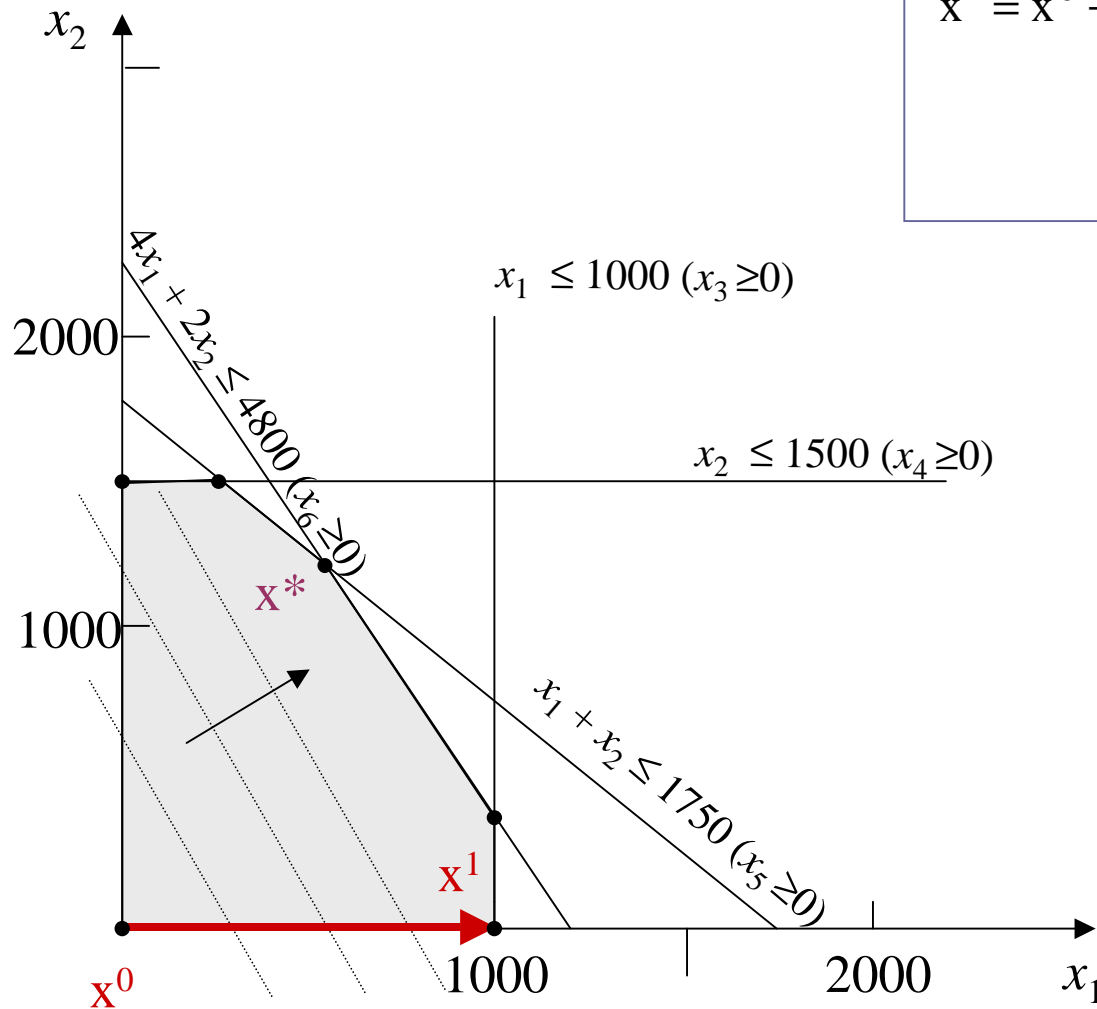
nenhuma componente de  $\Delta x$  para a solução básica corrente  $x^t$  negativo  $\rightarrow$  problema ilimitado

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
max c	12	9	0	0	0	0	
A	1	0	1	0	0	0	1000
	0	1	0	1	0	0	1500
	1	1	0	0	1	0	1750
	4	2	0	0	0	1	4800
	N	N	B	B	B	B	
$x^0$	0	0	1000	1500	1750	4800	
$\Delta x$	1	0	-1	0	-1	-4	
			1000/-(-1)		1750/-(-1)	4800/-(-4)	

$$\lambda = \min\{1000, 1750, 1200\} = 1000$$

## 5-Atualização da base

$$x^1 = x^0 + \lambda \Delta x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1000 \\ 1500 \\ 1750 \\ 4800 \end{bmatrix} + 1000 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 1500 \\ 750 \\ 800 \end{bmatrix}$$



- variável  $x_1$  entra na base
- variável  $x_3$  sai da base

# Algoritmo Simplex: Resumo

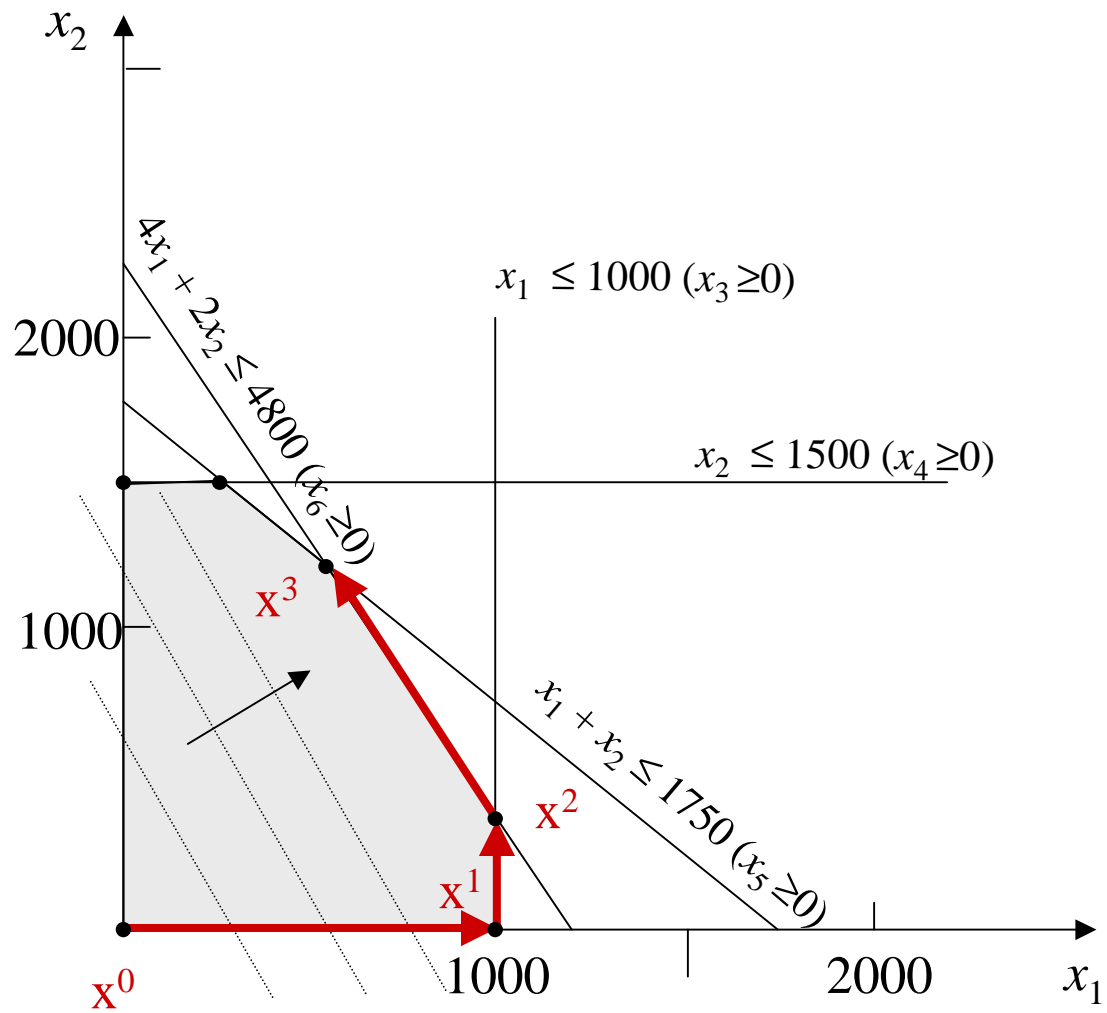
Passo 0 **Inicialização**: com solução básica factível  $x^0$ ,  $t \leftarrow 0$ ;

Passo 1 **Direções simplex**: construir  $\Delta x$  associada com não básica  $x_j$   
calcular custo reduzido  $\underline{c}_j = c \Delta x$ ;

Passo 2 **Otimidade**: se nenhuma direção melhora ( $\nexists \underline{c}_j > 0$  para max  
 $\underline{c}_j < 0$  para min), então parar,  $x^t$  é ótima; senão escolher nova  
direção  $\Delta x$  que melhora valor função objetivo; seja  $x_p$  a variável  
que entra na base;

Passo 3 **Passo**: se todos componentes de  $\Delta x$  forem não negativas, então  
parar, o modelo é ilimitado; senão determinar  $\lambda$  e escolher variável  
que deixa a base,  $x_r: \lambda \leftarrow (x_r / -\Delta x_r)$ ;

Passo 4 **Novo ponto e base**: determinar nova solução  $x^{t+1} = x^t + \lambda \Delta x^{t+1}$  e  
trocar  $x_r$  por  $x_p$ ;  $t = t + 1$ ; ir para o Passo 1;



# Tableau Simplex

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$\underline{a}_{11}$	$\underline{a}_{12}$	1	0	0	0	$\underline{b}_1$
$\underline{a}_{21}$	$\underline{a}_{22}$	0	1	0	0	$\underline{b}_2$
$\underline{a}_{31}$	$\underline{a}_{32}$	0	0	1	0	$\underline{b}_3$
$\underline{a}_{41}$	$\underline{a}_{42}$	0	0	0	1	$\underline{b}_4$
$\underline{c}_1$	$\underline{c}_2$	0	0	0	0	$-\underline{z}$

Método de eliminação de Gauss e o algoritmo simplex

- 1- Se  $\exists \underline{c}_j > 0$  ( $\underline{c}_j < 0$ , min) então coluna  $q = \max_j \{ \underline{c}_j, j \in N \}$   
 linha  $p = \min_i \{ \underline{b}_i / \underline{a}_{iq}, \underline{a}_{iq} > 0, i = 1, \dots, m \}$   
 Se  $\underline{c}_j < 0, \forall j$  ( $\underline{c}_j > 0$ , min) então solução ótima  
 Se  $\nexists \underline{a}_{iq} > 0$  então o modelo é ilimitado

2- Atualizar elementos do tableau

# Atualização do Tableau Simplex

					q			
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	....	$x_q$	....	$x_n$	
	$y_{11}$	$y_{12}$	$y_{13}$	....		....	$y_{1n}$	$y_{1,n+1}$
	$y_{21}$	$y_{22}$	$y_{23}$	....		....	$y_{2n}$	$y_{2,n+1}$
	....	....	....	....	....	....	....	....
p	$y_{p1}$			....	$y_{pq}$	....		
	....	....	....	....	....	....	....	....
	$y_{m1}$	$y_{m2}$	$y_{m3}$	....		....	$y_{mn}$	$y_{m,n+1}$
	$y_{m+1,1}$	$y_{m+1,2}$	$y_{m+1,3}$	....		....	$y_{m+1,n}$	$y_{m+1,n+1}$

$$y'_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{pj}}{y_{pq}} y_{iq} \quad i \neq p$$

$$y_{pq} = \text{pivô}$$

$$y'_{pj} = \frac{y_{pj}}{y_{pq}} \quad i = p$$

$q = 1$   
↓

$t = 0$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$p = 1 \rightarrow$	1	0	1	0	0	0	1000
	0	1	0	1	0	0	1500
	1	1	0	0	1	0	1750
	4	2	0	0	0	1	4800
	12	9	0	0	0	0	0

$$q = \max_j \{ \underline{c}_1, \underline{c}_2 \} = \max_j \{ 12, 9 \} = 1$$

$$p = \min_i \left\{ \frac{\underline{b}_1}{\underline{a}_{11}}, \frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_{21}}, \frac{\underline{b}_3}{\underline{a}_{31}}, \frac{\underline{b}_4}{\underline{a}_{41}} \right\} = \min_i \{ 1000, \times, 1750, 1200 \} = 1$$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
	1	0	1	0	0	0	1000
	0	1	0	1	0	0	1500
	0	1	-1	0	1	0	750
$p = 4 \rightarrow$	0	2	-4	0	0	1	800
	0	9	-12	0	0	0	-12000

$$q = \max_j \{ \underline{c}_2, \underline{c}_3 \} = \max_j \{ 9, -12 \} = 2$$

$$p = \min_i \left\{ \frac{\underline{b}_1}{\underline{a}_{12}}, \frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_{22}}, \frac{\underline{b}_3}{\underline{a}_{32}}, \frac{\underline{b}_4}{\underline{a}_{42}} \right\} = \min_i \{ \infty, 1500, 750, 400 \} = 4$$

$q = 3$   
↓

$t = 2$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
	1	0	1	0	0	0	1000
	0	0	2	1	0	-0.5	1100
$p = 3 \rightarrow$	0	0	1	0	1	-0.5	350
	0	1	-2	0	0	0.5	400
	0	0	6	0	0	-4.5	-15600

$$q = \max_j \{ \underline{c}_3, \underline{c}_6 \} = \max_j \{ 6, -4.5 \} = 3$$

$$p = \min_i \left\{ \frac{\underline{b}_1}{\underline{a}_{13}}, \frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_{23}}, \frac{\underline{b}_3}{\underline{a}_{33}}, \frac{\underline{b}_4}{\underline{a}_{43}} \right\} = \min_i \{ 1000, 550, 350, \times \} = 3$$

t = 3

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
1	0	0	0	-1	0.5	650
0	0	0	1	-2	0.5	400
0	0	1	0	1	-0.5	350
0	1	0	0	2	-0.5	1100
0	0	0	0	-6	-1.5	-17700

$$\mathbf{x}^* = ( 650 \ 1100 \ 350 \ 400 \ 0 \ 0 )$$

# Algoritmo Simplex com Duas Fases

Passo 0 **Modelo Artificial**: se  $\exists$  solução básica factível  $x^0$ , então ir para 3; senão criar modelo artificial somando (subtraindo) variáveis artificiais;

Passo 1 **Fase I**: inicializar modelo artificial com solução básica artificial factível e minimizar soma das variáveis artificiais;

Passo 2 **Factibilidade**: se Fase I termina com soma  $> 0$ , então parar (modelo original infactível); senão utilizar solução final como solução básica factível inicial para o modelo original;

Passo 3 **Fase II**: aplicar algoritmo simplex inicializando-o com a solução básica factível obtida no Passo 2 para obter ou a solução ótima, ou detetar que o problema é ilimitado.

$$\begin{aligned}
 &\min 4x_1 + x_2 + x_3 \\
 &\text{s.a. } 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\
 &\quad 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\
 &\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

## Fase I

$$\begin{aligned}
 &\min x_4 + x_5 \\
 &\text{s.a. } 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\
 &\quad 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 3 \\
 &\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

**Modelo  
Artificial**

## Tableau inicial

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
2	1	2	1	0	4
3	3	1	0	1	3
0	0	0	-1	-1	0

## Primeiro tableau

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
2	1	2	1	0	4
3	3	1	0	1	3
5	4	3	0	0	7

## Segundo tableau

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
0	-1	4/3	1	-2/3	2
1	1	1/3	0	1/3	1
0	-1	4/3	0	-5/3	2

## Terceiro tableau

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
0	-3/4	1	3/4	-1/2	3/2
1	5/4	0	-1/4	1/2	1/2
0	0	0	-1	-1	0

$$\begin{aligned} \min \quad & 4x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## Fase II: tableau inicial

$x_1$	$x_2$	$x_3$	
0	-3/4	1	3/2
1	5/4	0	1/2
-4	-1	-1	0

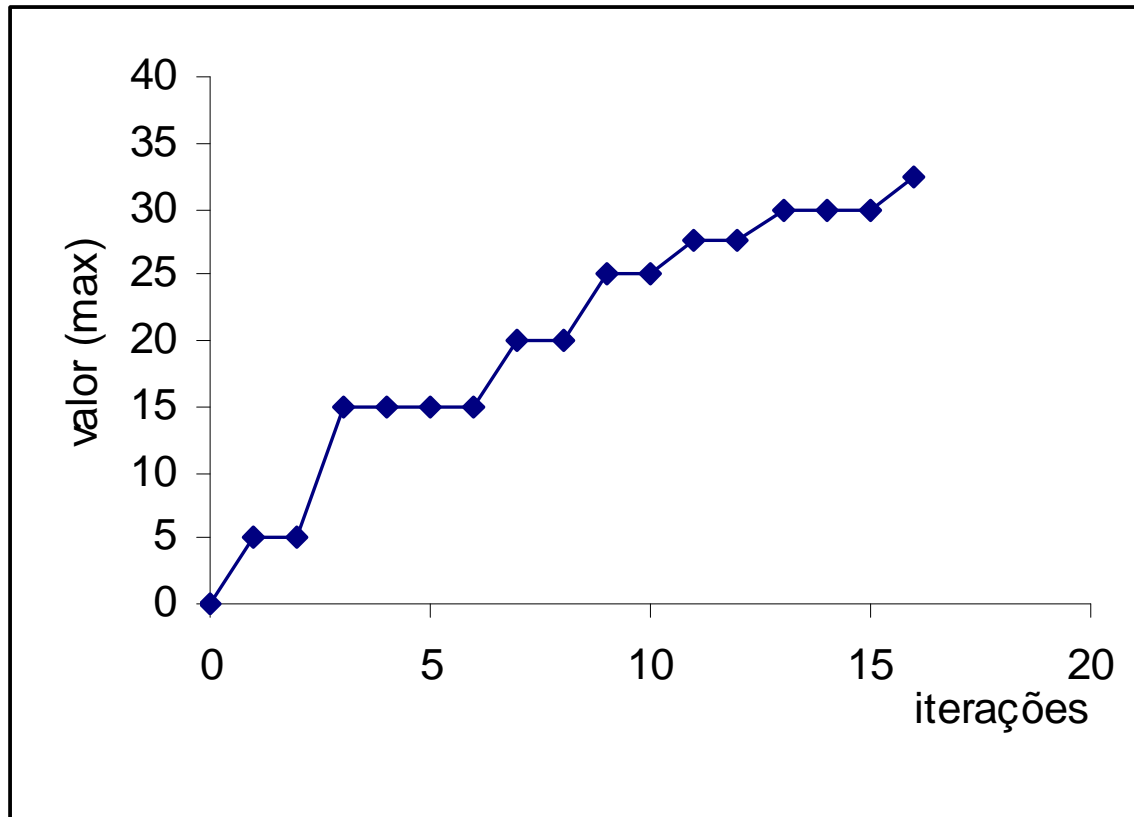
### Primeiro tableau

$x_1$	$x_2$	$x_3$	
0	$-3/4$	1	$3/2$
1	$5/4$	0	$1/2$
0	$13/4$	0	$7/2$

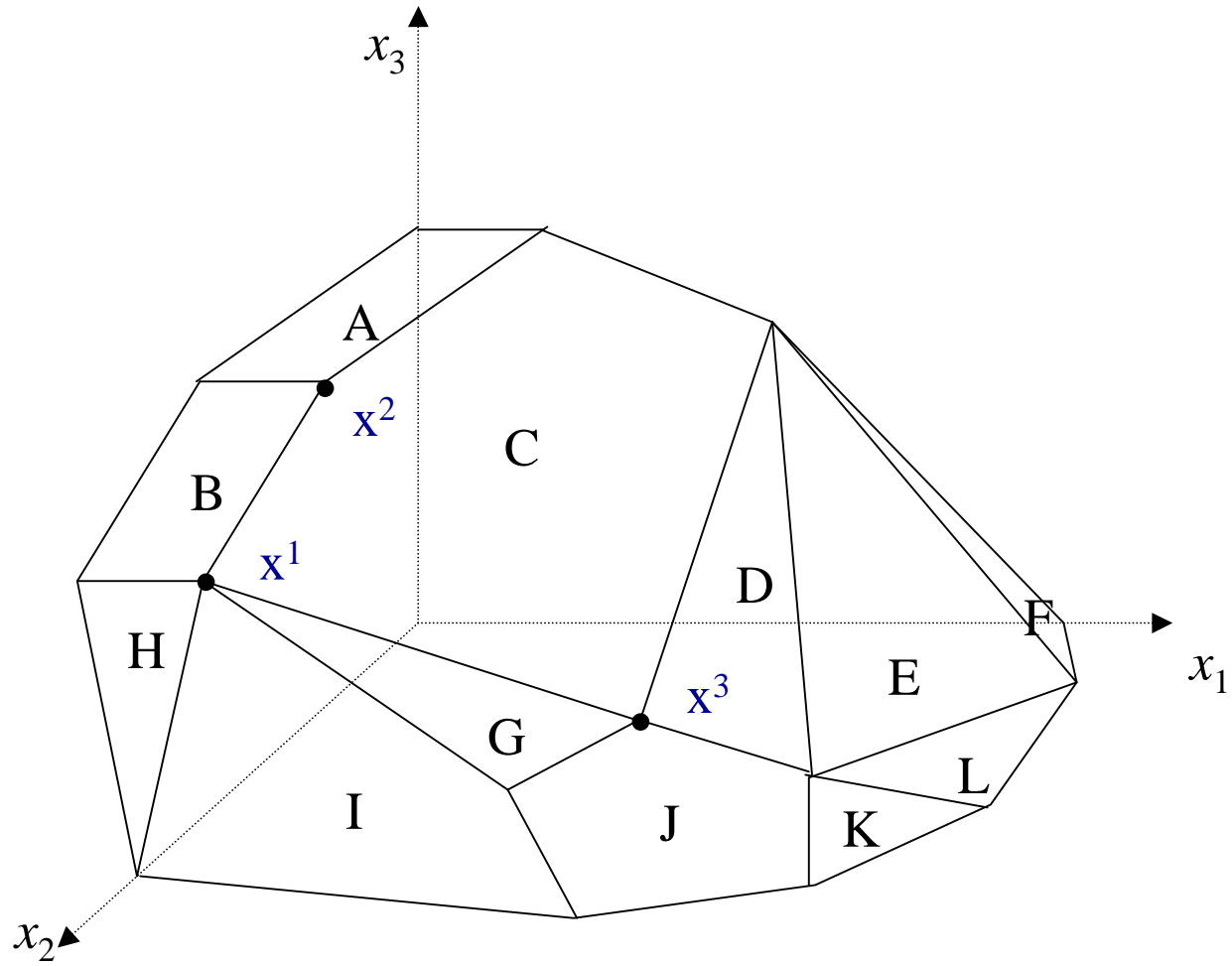
### Segundo tableau

$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$3/5$	0	1	$9/5$
$4/5$	1	0	$2/5$
$-13/5$	0	0	$11/5$

# Soluções degeneradas



**Solução básica factível é degenerada** se restrições de não negatividade para algumas variáveis básicas estão ativas ( algumas variáveis básicas são nulas )  $\leftrightarrow$  várias bases produzem a mesma solução básica



# Convergência e Ciclagem

- se a cada iteração existe um valor  $\lambda > 0$ , então o algoritmo simplex pára após um número finito de iterações, indicando ou a solução ótima ou concluindo que o modelo é ilimitado.
- com o algoritmo de duas fases, pode-se também detetar infeasibilidade.
- existência de soluções degeneradas pode provocar que  $\lambda = 0$ .
- sequência de soluções pode se repetir → ciclagem

$$\text{n}^{\circ} \text{ máximo de bases} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

# Observação

Este material refere-se às notas de aula do curso EA 044 Planejamento e Análise de Sistemas de Produção da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp. Não substitui o livro texto, as referências recomendadas e nem as aulas expositivas. Este material não pode ser reproduzido sem autorização prévia dos autores. Quando autorizado, seu uso é exclusivo para atividades de ensino e pesquisa em instituições sem fins lucrativos.