

NOTAS DE AULA – EE300

Capítulo 2 – Teoria Quântica da Radiação

Romis Attux, Cristiano C. Cruz, Diogo C. Soriano

FEEC/UNICAMP, Segundo Semestre de 2012

Capítulo 2 – Teoria Quântica da Radiação

Sem dúvida, a Teoria Quântica é uma construção científica de notável originalidade e solidez experimental. Além de ter sido um dos pilares da física do século XX, essa teoria também levou a importantes mudanças de paradigma em domínios como o da filosofia da ciência. O alcance das idéias suscitadas pelo ramo então emergente pode ser intuído se não nos esquecermos de que seus fundamentos foram perscrutados por figuras da estatura de Einstein, Bohr, Schrödinger e outros. Parte desse debate, aliás, será objeto de discussão no capítulo 4.

Embora o domínio de aplicação da teoria quântica seja vasto, sua origem nos remete a um esforço muito específico: um trabalho de Planck dedicado à elucidação de aspectos fundamentais da emissão de radiação térmica. Convém, portanto, que iniciemos nosso estudo por essas idéias pioneiras.

O objetivo deste capítulo é situar historicamente as investigações acerca da chamada “radiação de um corpo negro”. Após definir os limites do problema, partiremos do cenário delineado por Kirchhoff e visitaremos algumas hipóteses que culminam na lei de Planck, cuja concordância com a experimentação é excelente.

2.1 – Corpo Negro e Radiação de Cavidade

A superfície de todo corpo que se encontra a uma temperatura maior que $T = 0\text{K}$ emite energia na forma de radiação térmica, a qual possui natureza eletromagnética. Para que possamos bem caracterizar tal fenômeno, precisamos obter respostas a questões fundamentais: qual será o conteúdo espectral desta radiação, ou seja, que frequências estarão presentes e em que “proporção”? Como a temperatura do corpo influirá no espectro emitido? Há alguma lei que relacione as grandezas pertinentes? Pensemos em nossas próprias experiências com a radiação térmica. Sabemos que o nosso corpo, que usualmente se encontra a uma temperatura de cerca de 310K , emite calor. Apesar disso, não conseguimos ver um corpo humano numa sala escura, o que significa que a maioria da radiação emitida, em tais condições, deve ter comprimentos de onda distintos daqueles capazes de excitar nosso aparelho visual¹. Uma barra de ferro aquecida, por sua vez, torna-se incandescente, o que indica que o aumento de sua temperatura provoca, de alguma maneira, um deslocamento do espectro para regiões mais próximas da faixa visível. Isso nos leva a intuir que o aumento da temperatura deve fazer com que se eleve o conteúdo espectral em altas frequências.

A radiação térmica que emerge de um corpo é gerada pelo movimento aleatório dos átomos que o constituem. Antes que a radiação atinja a superfície, ela é absorvida e emitida diversas vezes, o que tende a levá-la a um estado de equilíbrio térmico com os átomos. Esse processo complexo, aliás, termina por dar um aspecto contínuo ao espectro de emissão.

A emissão dessa radiação, como era de se esperar, está ligada às propriedades da superfície do corpo, que pode, em tese, bloquear parcialmente as ondas eletromagnéticas presentes em seu interior [Ohanian, 1995]. De certa maneira, há uma relação estreita entre a

¹ Equipamentos de visão noturna são construídos para captar esses comprimentos de onda predominantes, os quais pertencem à região espectral do infravermelho.

característica de emissão de um corpo e seu potencial de absorção, o que pode ser atestado por princípios fundamentais da termodinâmica. Num caso extremo, poderíamos conceber um corpo dotado de uma perfeita capacidade de absorção, ou seja, um sorvedouro ideal de toda a radiação incidente. Esse ente ideal recebe, graças a essa característica, o nome de *corpo negro*.

Do ponto de vista teórico, está perfeitamente determinado o que é um corpo negro, mas, na prática, não é simples imaginar a que pode corresponder um construto dessa natureza. Uma possibilidade, já aventada por Kirchhoff no âmbito dos esforços descritos na próxima seção, tornou-se um padrão: uma cavidade com algumas características peculiares. Normalmente, usa-se para emular um corpo negro uma caixa metálica com paredes à mesma temperatura e com um pequeno orifício. É lícito supor que um raio que adentre a caixa pelo orifício sofrerá sucessivas reflexões nas paredes, e, muito provavelmente, será absorvido. Ora, isso quer dizer que a caixa terá uma característica ideal de absorção, que é exatamente o que esperamos de um corpo negro! A Fig. 2.1 ilustra essa idéia.

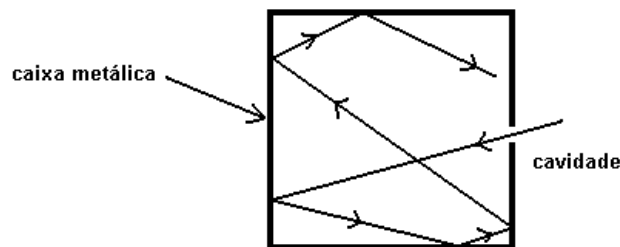


Figura 2.1

Como as características de interesse dessa caixa devem ser muito próximas das previstas para um corpo negro, não se espante o leitor ao se deparar com a expressão “*radiação de cavidade*”.

2.2 – O Teorema de Kirchoff

Num trabalho clássico, publicado em 1859, Gustav Kirchoff lançou a fundação do estudo da radiação térmica. Ele mostrou, a partir de bases puramente termodinâmicas, que um corpo capaz de absorver toda a radiação nele incidente (ou seja, um corpo negro) teria uma característica de emissão que seria função apenas de sua temperatura e da frequência de interesse. Em outras palavras, as propriedades de tal emissor não guardariam qualquer relação com fatores como formato, material constituinte etc., o que, sem dúvida, conduziria a busca a um domínio muito mais tratável e produtivo do ponto de vista físico.

Para que possamos expressar a importante contribuição de Kirchoff em termos mais rigorosos, denominemos $E_f df$ a quantidade de energia emitida pelo corpo negro, por unidade de área e por unidade de tempo, no intervalo delimitado pelas frequências f e $f+df$. Podemos entender a função E_f , que denominaremos *emitância espectral*, como uma espécie de densidade de energia emitida para uma dada frequência. O teorema de Kirchoff afirma que tal função pode ser escrita da seguinte forma:

$$E_f = E_f(f,T) \quad (2.1)$$

onde f é a frequência da radiação e T é a temperatura do corpo negro. Trazer a dependência para bases tão simples já é uma contribuição estupenda, mas Kirchoff foi ainda mais longe e, como já antecipamos, sugeriu o uso de um “forno” a temperatura uniforme dotado de uma cavidade como êmulo de um corpo negro [Born, 1986]. Por fim, o eminente físico conclamou seus pares à busca dessa função [Pais, 1995], cuja enorme importância advém, num certo sentido, da marcante simplicidade da relação expressa em (2.1). Kirchoff não poderia fazer idéia da extensão da influência que seu apelo teria sobre o futuro da ciência.

2.3 – A Lei de Stefan-Boltzmann

Em 1879, Josef Stefan propôs que a “energia total” (por unidade de tempo e por unidade de área) emitida por um corpo seria proporcional à quarta potência de sua temperatura absoluta (em kelvin). Ludwig Boltzmann, em 1884, mostrou que a lei proposta por Stefan é válida, com tal grau de generalidade, apenas para corpos negros [Pais, 1995]. Com isso, chegamos à lei de Stefan-Boltzmann, que representaremos da seguinte forma:

$$E_{\text{total}} = \sigma T^4 \quad (2.2)$$

sendo $\sigma = 5.6703 \cdot 10^{-8}$ watt/(m².K⁴). À luz da função $E_f(f,T)$, por nós definida na seção anterior, podemos detalhar a equação (2.2):

$$E_{\text{total}} = \int_0^{\infty} E_f(f, T).df = \sigma T^4 \quad (2.3)$$

Ainda não se conhecia a forma de E_f , mas já era possível, graças a uma engenhosa argumentação baseada na termodinâmica e no eletromagnetismo, ter conhecimento de uma importante propriedade de tal função.

2.4 – A Lei do Deslocamento de Wien

É hora de travarmos contato com mais um dos protagonistas desta busca: Wilhelm Wien. Em 1893, ele propôs a célebre *lei do deslocamento*:

$$E_f(f,T) = f^3 \cdot F(f/T) \quad (2.4)$$

cuja dedução se baseou em considerações extraídas da termodinâmica e do eletromagnetismo. Trata-se de uma lei de grande alcance teórico, mais restritiva que o resultado de Stefan e Boltzmann: a função que desejamos encontrar deve ser constituída pelo produto entre um termo cúbico e uma função da razão entre f e T . De fato, todas as leis que veremos a seguir obedecem, sem escapatória, à lei do deslocamento.

Usualmente, o trabalho experimental não se dirige à busca de $E_f(f, T)$, mas sim de $E_\lambda(\lambda,T)$, que, como podemos de imediato perceber, deve ter íntima relação com a emitância em frequência. Sabia-se, desde os primeiros experimentos envolvendo a radiação de cavidade, que a função E_λ tinha um máximo pronunciado em um comprimento de onda λ_{max} . Sabia-se ainda que o valor de λ_{max} diminuía com a temperatura. A lei proposta por Wien recebe este nome justamente por indicar como se dá este deslocamento. Para analisar

a emitância em termos de comprimentos de onda, temos de nos lembrar que a função E_f indica uma densidade de energia para o intervalo df . Por analogia, devemos fazer:

$$E_f(f,T).df = E_\lambda(\lambda,T).d\lambda \quad (2.5)$$

Como $\lambda = c/f$, temos:

$$df = (-c/\lambda^2).d\lambda \quad (2.6)$$

O sinal negativo indica que o aumento do comprimento de onda significa uma diminuição em frequência e vice-versa. Temos, portanto,

$$E_\lambda(\lambda,T) = (-c/\lambda^2). E_f(f,T) \quad (2.7)$$

A lei do deslocamento pode então ser escrita como:

$$E_\lambda(\lambda,T) = (c^4/\lambda^5).F(c/\lambda T) \quad (2.8)$$

O sinal negativo pôde ser desprezado, pois consideramos uma variação $d\lambda$ positiva. Para que obtenhamos o comprimento de onda para o qual há máxima emissão, precisamos derivar E_λ com respeito a λ e igualar o resultado a zero:

$$\frac{c^4}{\lambda^5} \left\{ \frac{-5}{\lambda} F\left(\frac{c}{\lambda T}\right) - \frac{c}{\lambda^2 T} F'\left(\frac{c}{\lambda T}\right) \right\} = 0 \quad (2.9)$$

Percebemos que o máximo, caso exista, obedecerá à restrição [Born, 1986]

$$\lambda_{\max}.T = \text{constante}_1 \quad (2.10)$$

Esta é a forma pelo qual λ_{\max} se desloca: de maneira inversamente proporcional à temperatura do corpo. A constante acima vale $2.898.10^{-3}$ m.K. A expressão (2.10) pode ser escrita em frequência como sendo²:

$$f_{\max} = \text{constante}_2 .T \quad (2.10b)$$

sendo a constante igual a $5.880.10^{10}$ Hz/K.

Note que $\lambda_{\max}. f_{\max} \neq c$. A razão para isto é que a relação entre E_f e E_λ não é “trivial”, pois o comprimento de onda é inversamente proporcional à frequência, e, por serem as funções densidades, sua forma depende do intervalo da variável de interesse (f ou λ), definido segundo (2.6).

² Como exercício, busque o leitor deduzir de (2.4) a relação em frequência.

Podemos ainda provar que a lei do deslocamento de Wien tem, como caso particular, a lei de Stefan-Boltzmann. Para tanto, voltemos à forma da equação (2.4). Realizemos a integral para todas as frequências, como em (2.3):

$$E_{\text{total}} = \int_0^{\infty} E_f(f, T).df = \int_0^{\infty} f^3.F(f/T).df = T^4 \int_0^{\infty} x^3.F(x).dx = T^4.\sigma \quad (2.11)$$

que é justamente a forma expressa em (2.2). A mudança de variável efetuada foi $x = f/T$.

2.5 – A Lei de Wien

Desde o desafio inicial de Kirchoff, surgiram diversas expressões para E_f . A maioria delas foi “esquecida” com o passar dos anos, mas houve uma que marcou época, e foi considerada, por algum tempo, a resposta definitiva ao problema. Trata-se da lei da radiação de Wien, o mesmo cientista que propôs a lei do deslocamento³. Sua expressão, publicada em 1896, tem a seguinte forma:

$$E_f(f, T) = \alpha f^3.\exp(-\beta f/T) \quad (2.12)$$

sendo α e β parâmetros livres.

Trata-se de uma função que une um termo cúbico a um fator exponencial de maneira consistente com a lei do deslocamento. O produto das duas parcelas gera um perfil dotado de um máximo pronunciado, o que, tendo em vista os resultados experimentais de então, era esperado. A Fig. 2.2 traz um gráfico da função (2.12), com as melhores constantes, para algumas temperaturas.

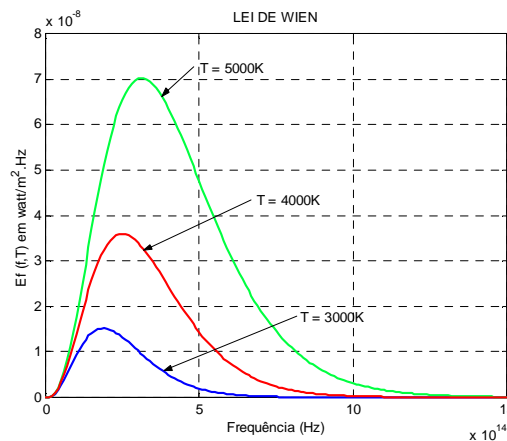


Figura 2.2

Friedrich Paschen testou a expressão proposta por Wien no domínio infravermelho próximo (de $\lambda = 1\mu\text{m}$ a $8\mu\text{m}$), onde obteve uma boa concordância com os dados obtidos. Paschen chegou a afirmar: “Parece muito difícil encontrar uma outra função que represente

³ Wien receberia, em 1911, o prêmio Nobel de Física “por suas descobertas envolvendo as leis que governam a radiação de calor”.

os dados com tão poucas constantes” [Pais, 1995]. Tal veredicto imperou por alguns anos, durante os quais parecia ser a equação (2.12) a resposta para a indagação de Kirchoff. No entanto, o avanço das possibilidades experimentais permitiu que houvesse estudos na faixa do infravermelho longínquo, domínio em que a lei de Wien, como veremos, não seria capaz de se sustentar. Antes, porém, de chegarmos a essa discussão, convém analisar o que a Física Clássica tinha a dizer sobre a forma da função que se desejava encontrar.

2.6 – A Lei de Rayleigh-Einstein-Jeans

Até que ponto a Física Clássica pode nos levar na análise do problema da radiação do corpo negro? O que ela tem a nos dizer? Podemos, a partir de seu arcabouço teórico, encontrar a resposta definitiva para a indagação de Kirchoff? Os trabalhos de Lord Rayleigh, Albert Einstein e James Jeans forneceram uma perturbadora resposta a essas questões.

Voltemos a nossa caixa metálica dotada de uma cavidade. Supõe-se que a radiação térmica na cavidade seja composta por ondas estacionárias, cada uma correspondente a um “modo de vibração” [Ohanian, 1995]. Cada modo, por sua vez, pode ser associado à idéia de um oscilador harmônico. Através de um raciocínio baseado principalmente no eletromagnetismo, chega-se a uma equação que relaciona a energia média dos osciladores à função E_f procurada:

$$E_f(f, T) = \frac{2\pi f^2}{c^2} \epsilon_{\text{med}} \quad (2.13)$$

onde ϵ_{med} é a energia média a que nos referimos.

O passo final é determinar o valor dessa energia média, o que, como logo veremos, é a escolha fundamental. Na abordagem clássica, faz-se uso do *teorema da equipartição*, um sólido resultado da Física Estatística que produz a seguinte fórmula para a energia média:

$$\epsilon_{\text{med}} = kT \quad (2.14)$$

sendo k a constante de Boltzmann, que vale $1,3807 \cdot 10^{-23}$ J/K. Se desejarmos verificar de maneira um pouco mais detalhada como se chega a (2.14), precisaremos recorrer a um resultado muito elegante, o teorema de Boltzmann. Segundo esse teorema, a ocorrência de um oscilador com energia ϵ se daria com probabilidade relativa $\exp(-\epsilon/kT)$. Portanto,

$$p(\epsilon) = \frac{\exp(-\epsilon/kT)}{\int_0^{\infty} \exp(-\epsilon/kT) \cdot d\epsilon} \quad (2.15)$$

sendo a integral do denominador necessária para fazer com que a integral de $p(\epsilon)$ de zero a infinito seja igual a um, como requer uma função de densidade de probabilidade. Empregando a definição de média de uma variável aleatória qualquer,

$$x_{\text{med}} = \int_{-\infty}^{\infty} x.p(x).dx \quad (2.16)$$

chegamos à expressão:

$$\epsilon_{\text{med}} = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon.\exp(-\epsilon/kT).d\epsilon}{\int_0^{\infty} \exp(-\epsilon/kT).d\epsilon} = kT \quad (2.17)$$

De posse desse valor, podemos voltar a (2.13) e obter a fórmula desejada:

$$E_f(f, T) = \frac{2\pi f^2}{c^2} kT \quad (2.18)$$

que é a *lei de Rayleigh-Einstein-Jeans*. Essa lei, como afirmamos, representa, de certa maneira, o limite ao qual se pode chegar através dos caminhos da Física Clássica. Na Fig. 2.3, mostramos as curvas previstas por (2.18) para algumas temperaturas.

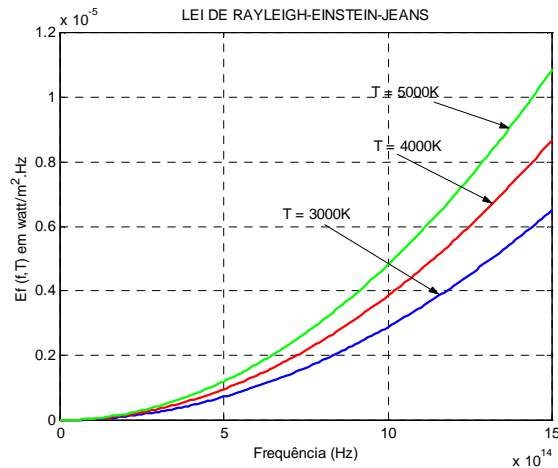


Figura 2.3

Convém expor um pouco da história dessa fórmula, narrada em [Pais, 1995]. Lord Rayleigh sugeriu, em 1900, que se aplicasse a idéia de equipartição, que delineamos acima, ao problema da radiação de cavidade. A partir dessa noção crucial, ele obteve uma expressão do tipo:

$$E_f(f, T) = c_1.f^2.T \quad (2.19)$$

sem, no entanto, calcular c_1 . Podemos perceber que esta equação tem (2.18) como um caso particular. Ele também já percebera que esta lei devia ser encarada como um caso-limite para baixas frequências. O motivo para isso é o seguinte: como podemos notar, (2.18) e (2.19) levam a valores de E_f que aumentam explosivamente com o aumento de f . Trata-se de um comportamento totalmente incoerente com a experiência, razão pela qual se dá a ele

o sugestivo nome de *catástrofe ultravioleta* (vide Fig. 2.3). Para solucionar, *ad hoc*, tal problema, Rayleigh sugeriu a introdução de um fator de corte exponencial, o que gerou uma lei do tipo:

$$E_f(f,T) = c_1 \cdot f^2 \cdot T \cdot \exp(-c_2 \cdot f / T) \quad (2.20)$$

que ficou conhecida como *lei de Rayleigh*.

Em 1905, Einstein chegou à equação (2.18) ao comentar o resultado de Planck (que veremos na próxima seção). No mesmo ano, Rayleigh enviou uma carta à revista Nature, na qual calculou a constante c_1 e obteve um valor distinto do correto por um fator de 8. Em 1905, James Hopwood Jeans corrigiu o erro de Rayleigh e chegou à expressão final. Devido a essa cronologia, percebemos a razão pelo qual a equação (2.18), usualmente denominada *lei de Rayleigh-Jeans*, poderia, conforme sugere Abraham Pais, receber o nome de *lei de Rayleigh-Einstein-Jeans*.

Apesar de coerente com o espírito das mais sólidas formulações teóricas da época, saiba-se de antemão que a lei era bastante problemática. A primeira dificuldade, é a já mencionada catástrofe ultravioleta ($E_f \rightarrow \infty$ se $f \rightarrow \infty$). Um outro “calcanhar de Aquiles” é que:

$$E_{\text{total}} = \int_0^{\infty} E_f(f, T) df = C \cdot \int_0^{\infty} f^2 df \rightarrow \infty \quad (2.21)$$

sendo C um valor independente de f . Tal resultado está, literalmente, infinitamente distante da lei de Stefan-Boltzmann (2.2 e 2.3).

O problema que origina a catástrofe ultravioleta é que se assume que cada configuração oscilatória tem a mesma energia kT , como mostra a equação (2.18). Porém, o “número” de configurações permitidas entre uma frequência f e outra $f+df$ aumenta com a própria frequência, o que faz a energia irradiada aumentar também, sem limites, justamente por ser a energia média kT independente da frequência. Com tudo isso, vemos que a física clássica não é capaz de fornecer uma resposta adequada ao problema da radiação de cavidade.

Observação: Em muitos livros, não se trabalha com a emitância espectral $E_f(f, T)$ e sim com a densidade espectral de energia $u_f(f, T)$. Ambas são idênticas a menos de uma constante:

$$E_f(f, T) = (c/4) \cdot u_f(f, T) \quad (2.22)$$

Neste capítulo, trabalhamos sempre com E_f , mesmo quando mencionamos trabalhos em que o desenvolvimento original se deu através do emprego de u_f .

2.7 – Dos experimentos de Lummer, Pringsheim, Rubens e Kurlbaum à Lei da Radiação de Planck

Max Karl Ernst Ludwig Planck é, indiscutivelmente, o pai da Teoria Quântica. Ele não só propôs a melhor fórmula para a função $E_f(f, T)$, como, para justificá-la, lançou a hipótese da quantização da energia, que teria um papel de enorme destaque no pensamento físico do século XX. No entanto, Planck não tinha, à época, idéia do alcance da hipótese de que lançara mão para encontrar uma expressão coerente com a experimentação e dotada de alguma fundamentação física. Foi apenas com advento do trabalho de Einstein sobre a natureza da luz, e, posteriormente, com as contribuições de de Broglie, Böhr, Heisenberg, Schrödinger e outros, que a nova revolução “ganhou corpo”. Não obstante, o mérito de Planck e a importância de sua revolucionária hipótese, sobre cuja essência agora nos debruçaremos, são enormes.

2.7.1 – Os experimentos de Lummer, Pringsheim, Rubens e Kurlbaum

Não se pode dissociar a proposta de Planck dos resultados extremamente precisos que obtiveram dois grupos de pesquisadores do Physikalisch Technische Reichsanstalt, que, naquela época, era um dos laboratórios mais bem equipados do mundo [Pais, 1995]. O primeiro grupo, formado por Otto Lummer e Ernst Pringsheim analisou o espectro de emissão na região que ia de $\lambda = 12\mu\text{m}$ até $\lambda = 18\mu\text{m}$. Em 1900, a conclusão foi forte: “A Lei de Wien falha naquela região” [Pais, 1995]. Trata-se de um resultado muito importante, pois os principais resultados obtidos até então (em outras faixas de comprimento de onda) davam suporte a tal lei, como discutimos anteriormente. No mesmo ano, a segunda equipe, formada por Heinrich Rubens e Ferdinand Kurlbaum estendeu a mesma conclusão ao domínio de uma faixa ainda mais distante da visível: $\lambda = 30\mu\text{m}$ até $\lambda = 60\mu\text{m}$ (no infravermelho longínquo). É preciso frisar que a obtenção destes dados não foi, definitivamente, um processo trivial, mas sim uma contribuição experimental de primeiríssima grandeza. Além da lei de Wien, outras leis, como a de Rayleigh (equação 2.20), não foram capazes de se ajustar à observação. Os novos resultados experimentais mostravam com clareza que nenhum dos esforços anteriores tinha esgotado o problema. Ainda restava a mais importante das respostas.

Planck foi um dos físicos mais motivados pelo desafio de Kirchoff, o que atestam anos de procura pela expressão de $E_f(f, T)$. Graças à sua posição de professor em Berlim, ele podia ter acesso aos mais representativos resultados experimentais, o que comprova a pequena história a seguir, extraída de [Pais, 1995]. No dia 7 de outubro de 1900, um domingo, Heinrich Rubens e sua esposa visitaram Planck na parte da tarde. Durante a conversa, Rubens mencionou que havia descoberto que $E_f(f, T)$ era proporcional a T para pequenos valores de f . Inspirado pelo diálogo, Planck voltou ao trabalho no mesmo dia e encontrou uma interpolação entre o que foi dito por Rubens e a lei de Wien. Ele chegou à lei:

$$E_f(f, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{f^3}{\exp(hf/kT) - 1} \quad (2.23)$$

sendo h uma constante. Na Fig. 2.4, temos esta expressão representada para três valores distintos de temperatura.

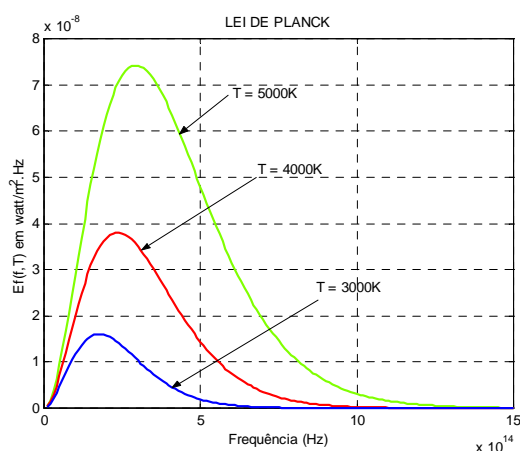


Figura 2.4

Ele enviou a fórmula para Rubens no mesmo dia e apresentou-a publicamente no dia 19 de outubro, após uma apresentação de Kurlbaum.

A equação (2.23) se reduz à lei de Wien (equação 2.12) para $hf \gg kT$ (que era justamente a faixa na qual trabalhou Paschen, vide seção 2.5) e à lei de Rayleigh-Einstein-Jeans para f próximo de zero. Isto mostra que a lei de Planck se reduz às leis conhecidas justamente no domínio em que elas têm o melhor desempenho, o que é altamente positivo. Além disso, a equação (2.23) se ajusta muito bem aos dados experimentais para todos os valores de λ e T testados. Nas palavras de Pringsheim, “a equação de Planck apresenta tão bom acordo com a experiência que pode ser considerada, pelo menos com grande aproximação, como a expressão matemática da função de Kirchoff” [Pais, 1995].

Planck havia atingido seu objetivo maior; no entanto, faltava ainda uma outra resposta: como justificar, teoricamente, a expressão (2.23)? Foi necessário, nas palavras do próprio Planck, “um ato de desespero” para “obter um resultado positivo, de qualquer modo e a qualquer preço” [Ohanian, 1995]. Esse ato de desespero foi, sem dúvida, revolucionário.

2.7.2 – A hipótese dos quanta

Para obter a expressão (2.23), Planck precisou recorrer a uma idéia ousada: a *quantização da energia*. Em termos simples, ele supôs que os osciladores materiais que compõem as paredes da caixa com cavidade (o nosso “forno metálico”) só poderiam assumir valores discretos de energia. Matematicamente, as energias permitidas seriam:

$$\epsilon = n \cdot \epsilon_0 \quad (2.24)$$

sendo ϵ_0 um valor fundamental de energia e n um número natural. Essa equação é uma expressão direta da noção de *quantum de energia*, ou seja, de um patamar energético ϵ_0 que “forma” todos os valores aceitáveis de energia.

O raciocínio de Planck pode ser considerado idêntico ao de Rayleigh, Einstein e Jeans até a equação (2.13)⁴. É justamente a determinação de ϵ_{med} que se torna o “pomo da discórdia” entre as duas teorias. Na teoria clássica, supõe-se aplicável o teorema da equipartição, como discutimos na seção 2.6. Esse teorema nos conduziu a $\epsilon_{\text{med}} = kT$ e à catástrofe ultravioleta. A equação (2.24) pode nos salvar desta catástrofe? Vejamos.

Continuemos a assumir que a probabilidade relativa de ocorrência de um oscilador com energia ϵ é $\exp(-\epsilon/kT)$. Dessa forma, chegaremos à seguinte expressão:

$$\epsilon_{\text{med}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \epsilon_0 \cdot \exp(-n\epsilon_0 / kT)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\epsilon_0 / kT)} \quad (2.25)$$

Fazendo $\beta = 1 / kT$, temos que:

$$\epsilon_{\text{med}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \epsilon_0 \cdot \exp(-n\epsilon_0 / kT)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\epsilon_0 / kT)} = -\frac{d}{d\beta} \ln \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta n\epsilon_0) = -\frac{d}{d\beta} \ln \frac{1}{1 - \exp(-\beta\epsilon_0)} = \frac{\epsilon_0}{\exp(\beta\epsilon_0) - 1} \quad (2.26)$$

Substituindo (2.26) em (2.13), chegamos a:

$$E_f(f, T) = \frac{2\pi f^2 \epsilon_0}{c^2} \frac{1}{\exp(\epsilon_0 / kT) - 1} \quad (2.27)$$

Para que a equação (2.27) obedeça à lei do deslocamento de Wien (equação (2.4)), é preciso que valha a relação:

$$\epsilon_0 = h \cdot f \quad (2.28)$$

sendo h uma constante, que depois veio a ser conhecida como *constante de Planck*. Planck obteve, com os dados experimentais de que dispunha, o valor $h = 6.55 \cdot 10^{-34}$ J.s. O melhor valor, atualmente, é de $6.626 \cdot 10^{-34}$ J.s, o que deixa claro quão notável foi o trabalho experimental da época.

Podemos indagar: o que há na hipótese quântica que pôde prevenir a catástrofe ultravioleta? Imaginemos um oscilador quiescente, ou seja, com energia nula. Para que ele possa oscilar com uma frequência f qualquer, é preciso que lhe seja fornecida uma energia diretamente proporcional a f (vide a equação (2.28)). Isso mostra que, para frequências muito altas, será preciso fornecer uma grande quantidade de energia para que haja a oscilação. Isto impõe sérias restrições ao conteúdo energético nessa região, o que previne a ocorrência de algo como a catástrofe do ultravioleta.

⁴ Nossa exposição dos passos que levam à lei de Planck não deve ser encarada como uma seqüência rigorosa dos passos seguidos pelo físico alemão. Aqui, nossa “linha mestra” privilegiará a didática, e não a cronologia.

Havia sido dada uma resposta altamente satisfatória à pergunta de Kirchoff. Porém, foi alto preço pago: introduziu-se uma hipótese completamente estranha ao mundo clássico. Poderia a quantização da energia se sustentar? A resposta, literalmente, está nos próximos capítulos...

Apêndice A: Comparação entre as Leis

Traçamos as curvas correspondentes às três leis que estudamos, a de Wien, a de Rayleigh-Einstein-Jeans e a de Planck, para $T = 5000\text{K}$.

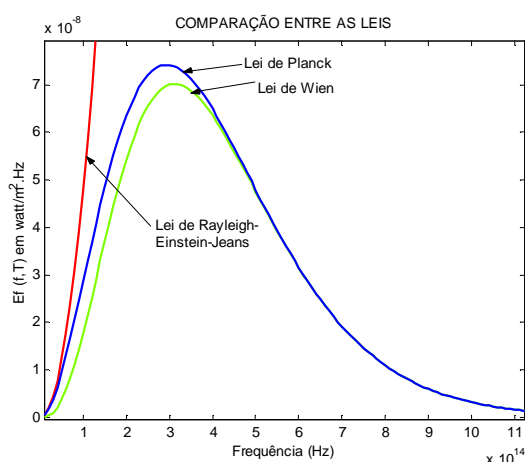


Figura 2.6

Percebemos que, de fato, as leis de Wien e Rayleigh-Einstein-Jeans falham em alguns domínios. Como já havíamos mencionado, a lei de Rayleigh vale para baixas frequências, e a de Wien, para $f \gg kT/h$. No caso acima, o domínio de validade da lei de Wien deveria ser $f \gg 1.04 \cdot 10^{14}$ Hz. De fato, só quando f assume um valor seis vezes maior que este limitante, paramos de perceber a diferença entre a Lei de Wien e a de Planck.

Bibliografia do Capítulo 2:

[Born 1986] **M. Born**, *Física Atômica*, Fundação Calouste Gulbenkian, 1986.

[Eisberg 1961] **R. Eisberg**, *Fundamentals of Modern Physics*, Wiley, 1961.

[Halliday e Resnick 1994] **D. Halliday**, **R. Resnick**, *Fundamentos da Física*, LTC, 1994.

[Ohanian 1995] **H. Ohanian**, *Modern Physics*, Prentice Hall, Second Edition, 1995.

[Pais 1995] **A. Pais**, *Sutil é o Senhor: a Ciência e a Vida de Albert Einstein*, Nova Fronteira, 1995.

[Serway 1990] **R. Serway**, *Physics for Scientists and Engineers*, Saunders College Publishing, Third Edition, 1990.