

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO  
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL

## **Geração de curvas planas adequadas**

**Autor: Marcelo Cordeiro Bernardes**

**Orientadora: Profa. Dr-Ing. Wu, Shin-Ting**

**Banca Examinadora:**

**Fernando Antonio Campos Gomide**

**Itala M. L. D'Ottaviano**

**Sueli Irene Rodrigues Costa**

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos parciais para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

14 de junho de 1996

# Resumo

Buscando a melhoria do desempenho do projetista e qualidade das curvas geradas, propõe-se que seja inserida uma camada de abstração e interface com o projetista - Interface Esperta. Esta Interface Esperta permite que o projetista trabalhe no nível semântico (geométrico ou subjetivo) das curvas, sem preocupar-se com o nível sintático (valores de parâmetros de ajuste). Para tanto, conceitos geométricos como curvatura e evoluta são utilizados para propor uma nova spline - C-spline. Na modelagem da subjetividade os conjuntos nebulosos são a palavra chave.

# Abstract

In searching for the improvement of the designer's efficiency and the quality of the generated curves, it is proposed to introduce an interface between the users and the underlying system - a Smart Layer. This layer allows that the designer works with the semantics of the curves (geometric or imprecise) without worrying on its syntax (their parameter values). To achieve it, we suggest a new class of curves based on geometric concepts such as curvature and evolute. We name it as C-splines. In order to model the subjectivity the fuzzy sets are employed.

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer a Luiz Henrique Figueiredo, Itala M. L. D'Ottaviano, Sueli Irene Rodrigues Costa, Marcelo Malheiro de Gomensaro e Luiz Gonzaga da Silveira Junior pelo apoio e ajuda. Sem vocês esta tese teria sido mais difícil e mais vazia. À Ting, não creio que possa agradecer o suficiente, apenas dizer que tornei-me uma pessoa melhor e um profissional mais competente devido ao seu apoio, paciência e perseverança. Seus ensinamentos vão acompanhar-me por toda minha vida.

# Dedicatória

A minha Família, aos meus Professores, aos meus Amigos e ao meu País. Obrigado hoje e sempre por serem parte da minha vida, e saibam que compartilho com vocês cada conquista.

# Sumário

<b>RESUMO</b>	<b>i</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>ii</b>
<b>AGRADECIMENTOS</b>	<b>iii</b>
<b>DEDICATÓRIA</b>	<b>iv</b>
<b>SUMÁRIO</b>	<b>v</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>viii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Conceitos preliminares</b>	<b>5</b>
2.1 Geometria Diferencial . . . . .	5
2.1.1 Definições . . . . .	5
2.1.2 Propriedades geométricas . . . . .	6
2.1.3 Diferenciabilidade e Continuidade Geométrica . . . . .	9
2.2 Conjuntos nebulosos . . . . .	10
2.2.1 Definições . . . . .	10
2.2.2 Processos de Fuzzyficação e Defuzzyficação . . . . .	11
2.3 Curvas em Modelagem Geométrica . . . . .	14
2.3.1 Curvas de Bézier . . . . .	14
2.3.2 B-splines . . . . .	15
2.3.3 Splines Geométricas . . . . .	17

<b>3</b>	<b>C-splines</b>	<b>21</b>
3.1	Definição . . . . .	22
3.2	Derivadas . . . . .	24
3.3	Grau . . . . .	24
3.4	Parâmetros de Ajuste . . . . .	24
3.5	Raio de curvatura nos pontos de $S$ . . . . .	25
3.6	Continuidade Geométrica . . . . .	27
3.7	Invariância sob Transformações Rígidas . . . . .	29
3.8	Manipulações Locais . . . . .	29
3.9	Aproximação/Interpolação . . . . .	30
3.10	Refinamentos . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Uma Implementação Exploratória</b>	<b>32</b>
4.1	Um sistema de geração de curvas adequadas . . . . .	33
4.2	Método de geração de curvas . . . . .	34
4.2.1	Pseudo-evoluta . . . . .	34
4.2.2	Continuidade $C^0$ . . . . .	37
4.2.3	Polígono de Bézier convexo . . . . .	37
4.2.4	Continuidade $GC^1$ . . . . .	38
4.2.5	Continuidade $GC^2$ . . . . .	39
4.3	Interface "Esperta" . . . . .	40
4.3.1	Fuzzyficação . . . . .	41
4.3.2	Defuzzyficação . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>48</b>
5.1	Resultados Geométricos . . . . .	48
5.2	Resultados utilizando Interface "Esperta" . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Conclusão e trabalhos futuros</b>	<b>59</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>61</b>
<b>A</b>	<b>Dedução da Condição de Ortogonalidade entre Raios-vetores e a Curva</b>	<b>63</b>

<b>B</b>	<b>Dedução da Curvatura</b>	<b>65</b>
B.1	Cálculo de $\ C^i(t) \times C^{ii}(t)\ $ . . . . .	66
B.2	Cálculo de $\ C^i(t)\ ^2$ . . . . .	73
B.3	Cálculo de $K_i(t)$ . . . . .	75
<b>C</b>	<b>Dedução da Igualdade entre os Módulos do Raio-vetor e Raio de Curvatura</b>	<b>77</b>
<b>D</b>	<b>Dedução da Condição de <math>GC^1</math></b>	<b>79</b>
<b>E</b>	<b>Dedução da Invariância sob Transformações Rígidas</b>	<b>83</b>
<b>F</b>	<b>Cálculo dos pontos de controle para satisfazer a Proposição 3</b>	<b>85</b>
<b>G</b>	<b>Cálculo de <math>T_i</math> sujeito à Proposição 3</b>	<b>88</b>
<b>H</b>	<b>Notações adotadas</b>	<b>92</b>

# Lista de Figuras

1.1	Introdução da Interface "Esperta". . . . .	3
2.1	Características geométricas de uma curva . . . . .	6
2.2	Obtenção da involuta tendo uma circunferência como evoluta. . . . .	8
2.3	Um conjunto nebuloso para o conceito <i>raio de curvatura pequeno</i> . . . . .	12
2.4	Um conjunto nebuloso para o conceito <i>raio de curvatura grande</i> . . . . .	12
2.5	Um conjunto nebuloso para o conceito <i>raio de curvatura adequado</i> . . . . .	13
2.6	Um conjunto nebuloso para o conceito <i>linhas quase paralelas</i> . . . . .	14
2.7	Parâmetros da curva de Bézier de grau 5. . . . .	15
2.8	Parâmetros da $\gamma$ -spline. . . . .	19
3.1	Manipulação local de uma spline. . . . .	30
3.2	Aproximação e interpolação de pontos dados. . . . .	30
4.1	Algoritmo da implementação utilizada. . . . .	33
4.2	Parâmetros utilizados na modelagem da <i>PE</i> no Caso 1. . . . .	35
4.3	Parâmetros utilizados na modelagem da <i>PE</i> no Caso 2. . . . .	36
4.4	Uma C-spline passando pelos pontos $P_0, P_1, P_2$ . . . . .	40
4.5	Um conjunto nebuloso para o conceito de adequabilidade de acordo com $G_1/G_2$ . . . . .	42
4.6	Um conjunto nebuloso para o conceito de adequabilidade de acordo com $G_3$ . . . . .	42
4.7	Quatro conjuntos nebulosos representando as condições $G_1$ e $G_2$ . . . . .	43
4.8	O conjunto nebuloso que representa o conceito <i>ondulação adequada</i> para $P_i$ . . . . .	43
4.9	C-spline interpolante passando pelos pontos dados. . . . .	45
4.10	Uma variante da Figura 4.9 com $R_1 = 4$ . . . . .	46
4.11	Uma variante da Figura 4.9 com $R_1 = 73$ . . . . .	46

4.12	Uma variante da Figura 4.9 com $R_1 = 146$ . . . . .	47
4.13	Uma variante da Figura 4.9 com $R_1 = 166$ . . . . .	47
5.1	C-spline não ortogonal às direções dos raios-vetores. . . . .	49
5.2	C-spline ortogonal às direções dos raios-vetores. . . . .	49
5.3	C-spline interpolando pontos da Tabela 5.1 com direções fornecidas pelo projetista. . . . .	50
5.4	C-spline interpolando pontos da Tabela 5.1 com avaliação sequencial até $P_4$ . . . . .	50
5.5	C-spline interpolando pontos da Tabela 5.1 com avaliação sequencial até $P_5$ . . . . .	51
5.6	C-spline interpolando pontos da Tabela 5.1 com avaliação sequencial até $P_6$ . . . . .	51
5.7	C-spline interpolando pontos da Tabela 5.1 com avaliação sequencial - resultado final. . . . .	52
5.8	C-spline interpolando pontos da Tabela 5.1 sem avaliação sequencial - resultado final. . . . .	52
5.9	C-spline interpolando pontos da Tabela 5.2 com direções iniciais calculadas pela Interface Esperta. . . . .	53
5.10	C-spline interpolando pontos da Tabela 5.2 com avaliação sequencial - resultado final. . . . .	53
5.11	C-spline interpolando pontos da Tabela 5.2 com avaliação sequencial - resultado final. . . . .	54
5.12	C-spline interpolando pontos da Tabela 5.2 alterando apenas as direções dos raios-vetores associados aos pontos $P_1$ , $P_3$ , $P_5$ e $P_7$ - resultado final. . . . .	54
5.13	C-spline interpolando pontos da Tabela 5.2 alterando apenas as direções dos raios-vetores associados aos pontos $P_2$ , $P_4$ , $P_6$ e $P_8$ - quatro possibilidades. . . . .	55
5.14	C-spline interpolando pontos da Tabela 5.2 alterando apenas as direções dos raios-vetores associados aos pontos $P_2$ , $P_4$ , $P_6$ e $P_8$ - resultado final com simetria. . . . .	55
5.15	C-spline interpolando pontos da Tabela 5.2 alterando apenas as direções dos raios-vetores associados aos pontos $P_2$ , $P_4$ , $P_6$ e $P_8$ - resultado final com simetria. . . . .	56
5.16	"Suavização" da C-spline da Figura 5.15. . . . .	56
5.17	C-spline interpolando pontos da Tabela 5.3 com direções calculadas pela aplicação. . . . .	57
5.18	"Suavização" da C-spline da Figura 5.17. . . . .	57
5.19	"Suavização" da C-spline da Figura 5.17. . . . .	57
5.20	"Suavização" da C-spline da Figura 5.17. . . . .	58

F.1	Pontos de controle de uma curva de Bézier cúbica que satisfazem à Proposição 3. . . . .	87
-----	---	----

# Capítulo 1

## Introdução

Encontrar uma curva adequada<sup>1</sup> que interpole uma dada seqüência de pontos é um dos problemas que vêm desafiando os pesquisadores há muito tempo. Métodos clássicos, como Lagrange e Newton, geram curvas descritas por polinômios cujo grau é dependente do número de pontos dados. Assim, quanto maior o número de pontos dados (e portanto maior o grau do polinômio), mais oscilações tendem a aparecer na curva [13]. A fim de evitar tal problema, Schoenberg introduziu em 1946 a técnica de interpolação por splines [1, 6]. Esta técnica não aproxima a curva por um único polinômio de grau alto, ao contrário, utiliza um conjunto de funções polinomiais de menor grau que satisfazem certas condições de continuidade. Dentre as diversas funções spline, aquelas cujos parâmetros possuem algum significado geométrico, como splines cardinais, B-splines, Bézier splines [9] e Beta splines [2], têm sido utilizadas em sistemas para modelagem geométrica assistida por computador<sup>2</sup>. Isto porque tais splines permitem manipulações sobre a forma geométrica das curvas, de maneira mais direta. Encontram-se na literatura [2, 16, 18] diversas tentativas de caracterizar a influência de cada parâmetro de uma função spline sobre a forma da curva por ela representada. Entretanto, infelizmente, a correspondência entre os valores assumidos por esses parâmetros e uma dada curva desejada não é biunívoca, fazendo com que seja difícil definir um algoritmo capaz de realizar modificações nos valores destes parâmetros para chegar à forma desejada. Esta dificuldade é ainda maior quando se deseja gerar adaptativamente as curvas adequadas por estes métodos.

O conceito de adequabilidade de uma curva é uma noção subjetiva. Para torná-lo computacionalmente processável, tem-se adotado estratégias de quantificação, como, por exemplo, a sugerida por Su e Liu [19]. De acordo com estes autores, uma curva plana é dita

---

<sup>1</sup>do inglês *fair*

<sup>2</sup>do inglês *Computer Aided Geometric Design*

adequada se as seguintes condições forem satisfeitas:

- a curva apresenta continuidade  $GC^2$  (conceito de suavidade);
- a curva não apresenta pontos de inflexão indesejados; e
- a curvatura desta curva varia de forma regular.

Dentro deste enfoque, as soluções propostas para determinar boas curvas que aproximem uma dada seqüência de pontos consistem, basicamente, em minimizar o número de pontos extremos da curvatura. O que se considera como adequabilidade da curva é de fato expresso pela suavidade desta curva. O conceito subjetivo de "pontos de inflexão indesejados" é expresso como inexistência de pontos de inflexão, enquanto a "regularidade da curvatura" é expressa como uma variação praticamente linear da curvatura entre dois pontos consecutivos dados. Tais soluções podem ser classificadas em duas categorias, a saber: as que modificam toda a seqüência dada de pontos e as que modificam apenas parte desta seqüência de pontos. Os métodos de quadrados mínimos, energia e *bounce* são exemplos de métodos que modificam toda a seqüência. Os métodos de spline cardinal e curvatura discreta podem ser considerados como métodos de escolha de pontos a serem modificados. Estas classes de soluções têm sido utilizadas com sucesso nas indústrias automobilística, aeronáutica e náutica [9, 19]. Uma terceira forma de interpolar suavemente uma seqüência de pontos seria levar em consideração a distribuição espacial dos pontos a serem interpolados, isto é, a parametrização da curva. Entre as estratégias de parametrização destacam-se as parametrizações uniforme, cordal e angular [14].

Entretanto, uma questão pode ser levantada: Por que uma curva adequada pressupõe ausência de ondulações, uma vez que a noção de adequabilidade de uma curva é extremamente subjetiva e imprecisa? Suponha que uma seqüência de pontos dispostos em *zig-zag* é dada e que o projetista deseja obter uma curva adequada passando por estes pontos. Seria estranho gerar uma curva sem o padrão *zig-zag*. Entretanto, é o que as técnicas existentes normalmente tendem a garantir, uma vez que tais técnicas não provêem formas diretas que permitam ao projetista adequar a função objetivo aos próprios requisitos. Mais ainda, as técnicas existentes requerem uma certa configuração na distribuição espacial dos pontos dados para assegurar resultados satisfatórios.

Isto motivou a procura de uma nova técnica interativa que pudesse gerar, do ponto de vista do projetista, uma curva adequada que passe através de uma dada seqüência de pontos, não importando quão estranho e ambíguo seja o conceito de adequabilidade de curvas do tal

projetista. Em outras palavras, desejar-se-ia que pudesse ser incluído no enunciado clássico do problema de interpolação:

"Dada uma seqüência de  $N$  pontos  $P_i, 1 \leq i \leq N$  determine uma curva adequada"

o conceito de adequabilidade, de forma que a curva gerada seja próxima da intenção do projetista, e não necessariamente do conceito de adequabilidade expresso apenas pelas condições de contorno.

Este trabalho apresenta um estudo exploratório de uma nova estratégia para modelar o conceito de adequabilidade. O problema de interpolação passa então a ser formulado como:

"Dada uma seqüência de  $N$  pontos  $P_i, 1 \leq i \leq N$  com o respectivo grau de adequabilidade<sup>3</sup> desejado de uma curva plana interpolante, ou seja,  $S = ((P_0, bicuda), (P_1, suave), \dots, (P_{N-1}, bicuda))$ , determine a curva que melhor se aproxime da intenção do projetista."

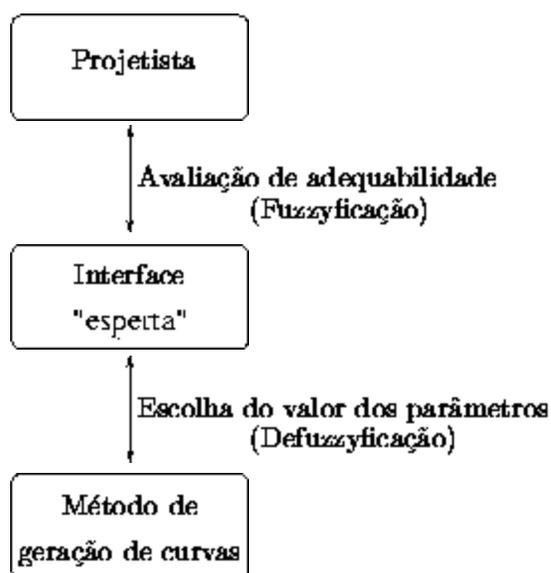


Figura 1.1: Introdução da Interface "Esperta".

Uma proposta de solução deste problema de interpolação é representada na Figura 1.1. Nesta proposta torna-se desnecessário que o projetista conheça detalhes sobre quais valores os parâmetros das funções de splines devem assumir para obter determinado comportamento em um trecho da curva gerada. Para tanto, é inserida, entre o projetista e o método de geração de curvas, uma camada de abstração chamada de Interface "Esperta". Tal interface

<sup>3</sup> explicado no Capítulo 3.

procura, com a utilização do ferramental fornecido pelos conjuntos nebulosos, gerar valores apropriados para os parâmetros a partir de caracterizações, dadas pelo projetista, sobre o comportamento desejado para segmentos da curva. Portanto, o custo computacional da definição da Interface "Esperta" está fortemente relacionado ao método de geração de curvas adotado. Deve-se escolher, preferencialmente, o método de geração de curvas que utilize diretamente parâmetros que possam modelar as caracterizações de comportamento a serem disponibilizadas para o projetista.

Com este intuito, foram estabelecidos como objetivos deste trabalho:

- a proposta de uma nova classe de splines planas que se julga possuir parâmetros de ajuste mais apropriados à avaliação de adequabilidade que os parâmetros de ajuste das splines disponíveis na literatura; e
- a experimentação exploratória do uso de conjuntos nebulosos para modelar alguns comportamentos adequados.

Esta dissertação está organizada em seis capítulos, dos quais esta Introdução é o primeiro. O Capítulo 2 apresenta alguns conceitos básicos necessários ao completo entendimento deste trabalho. No Capítulo 3 apresenta-se parte da solução proposta, fornecendo a descrição de uma nova spline. No Capítulo 4 descreve-se uma implementação exploratória utilizada para realizar estudos iniciais acerca da viabilidade da utilização do modelo de Interface "Esperta" (Figura 1.1) associado à spline proposta. No Capítulo 5 são mostrados alguns resultados obtidos considerando a implementação realizada, enquanto no Capítulo 6 são relatadas as conclusões finais.

# Capítulo 2

## Conceitos preliminares

Este capítulo apresenta os fundamentos da geometria diferencial de curvas planas e do uso de conjuntos nebulosos para representar conceitos inexatos. Serão descritas sucintamente algumas classes importantes de curvas utilizadas em Modelagem Geométrica.

### 2.1 Geometria Diferencial

Nesta seção são apresentados alguns conceitos sobre propriedades intrinsecamente geométricas de curvas, que serão úteis ao completo entendimento deste trabalho. Uma exposição mais minuciosa pode ser encontrada em [8].

#### 2.1.1 Definições

A curvatura de uma curva calculada em um de seus pontos expressa o quanto a curva "entorta" neste ponto. Formalmente,

**Definição 1** seja  $\alpha : I \rightarrow R^2$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco  $s \in I$ . O número

$$\left| \frac{d^2 \alpha(s)}{ds^2} \right| = k(s)$$

é chamado de CURVATURA de  $\alpha$  em  $s$ .

**Definição 2** O RAIOS DE CURVATURA é o inverso da curvatura  $R = \frac{1}{k}$  (Figura 2.1),  $k \neq 0$ .

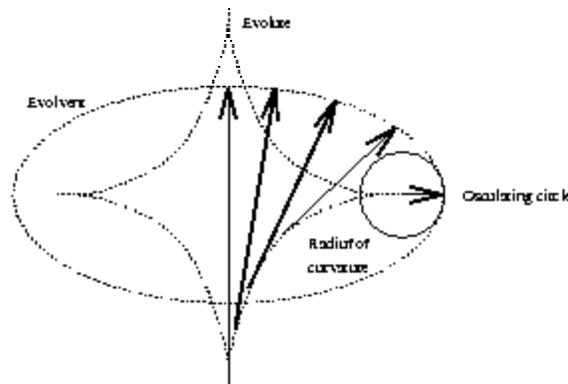


Figura 2.1: Características geométricas de uma curva

O círculo osculador é uma aproximação de segunda ordem de uma curva, assim como a tangente é uma aproximação de primeira ordem de uma curva. Formalmente,

**Definição 3** seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , com curvatura  $k(s) \neq 0, s \in I$ . A posição limite do círculo que passa através de  $\alpha(s), \alpha(s + h_1), \alpha(s + h_2)$  quando  $h_1, h_2 \rightarrow 0$  é o CÍRCULO OSCULADOR em  $s$ , cujo centro está localizado sobre a linha suporte do vetor normal  $n(s)$  e cujo raio é o raio de curvatura  $\frac{1}{k(s)}$  (Figura 2.1).

**Definição 4** A EVOLUTA de uma curva é o lugar geométrico dos centros de seus círculos osculadores. Assim, sendo  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva plana de parametrização regular (parâmetro  $t$  arbitrário), mostra-se que o centro de um círculo osculador está localizado sobre a reta suporte do vetor normal  $n = n(t)$  (na direção que aponta da tangente para a curva) e cujo raio é o inverso da curvatura  $k = k(t)$ ,  $k(t) \neq 0, t \in I$ . A curva

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}n(t), t \in I$$

é chamada de *evoluta* de  $\alpha$ . A curva  $\alpha$  é chamada de INVOLUTA de  $\beta$  (Figura 2.1).

### 2.1.2 Propriedades geométricas

**Propriedade 1** Uma forma de expressar a construção da involuta a partir da evoluta é dada por:

$$C_i(\vec{t}) = E_i(\vec{t}) + \frac{E'_i(\vec{t})}{\|E'_i(\vec{t})\|} \left( \int_a^{\vec{t}} \|E'_i(\vec{t})\| d\tilde{t} + R_i(\alpha) \right), \vec{t} \in [a, b] \quad (2.1)$$

com:

$$\int_a^b \|E^i(\tilde{t})\| d\tilde{t} = R_i(b) - R_i(a) \quad (2.2)$$

onde:

$C_i(\tilde{t})$  é o  $i$ -ésimo trecho de curva;

$E_i(\tilde{t})$  é a evoluta correspondente ao trecho de curva  $C_i(\tilde{t})$ ; e

$R_i(j)$ ,  $j = a, b$  é o módulo do raio de curvatura associado aos pontos extremos do trecho de curva  $C_i(\tilde{t})$ , com  $R_i(b) > R_i(a)$ .

Percebe-se que o lado esquerdo da igualdade em (2.2) é exatamente o comprimento de arco do trecho de evoluta. Isto permite inferir mais uma propriedade.

**Propriedade 2** O comprimento de arco entre dois pontos da evoluta  $\beta$  indica a variação do raio de curvatura da involuta  $\alpha$  no trecho associado, se não houver extremo (mínimo ou máximo local) de curvatura entre os pontos em questão. Caso haja um extremo de curvatura (cúspide na evoluta), o comprimento de arco entre os pontos é dado por:

$$s_{\beta}^k = \sum_i^n \Delta_i R_{\alpha}^+ - \sum_j^m \Delta_j R_{\alpha}^-, k = 1 \dots n + m \quad (2.3)$$

onde:

$n$  é o número de trechos da involuta  $\alpha$  que apresentam variação positiva dos raios de curvatura (raio de curvatura diminui, ou seja, curvatura aumenta);

$m$  é o número de trechos da involuta  $\alpha$  que apresentam variação negativa dos raios de curvatura (raio de curvatura aumenta, ou seja, curvatura diminui);

$\Delta_i R_{\alpha}^+$  indica a variação positiva dos raios de curvatura em um trecho da involuta  $\alpha$ ; e

$\Delta_j R_{\alpha}^-$  indica a variação negativa dos raios de curvatura em um trecho da involuta  $\alpha$ .

O termo  $\Delta_i R_{\alpha}^+$  equivale ao comprimento de arco do trecho  $k$  da evoluta  $\beta$  em questão, ou seja,  $\Delta_i R_{\alpha}^+ = s_{\beta}^k$ , enquanto o termo  $-\Delta_j R_{\alpha}^-$  equivale ao comprimento de arco do trecho  $k$  da evoluta  $\beta$  em questão, ou seja,  $\Delta_j R_{\alpha}^- = -s_{\beta}^k$ . Portanto, de (2.3) pode-se concluir a seguinte propriedade.

**Propriedade 3** *Seja  $\alpha$  uma curva fechada de classe  $C^2$ , então*

$$s_\beta = \sum_k s_\beta^k$$

$$e$$

$$\sum_i^n \Delta_i R_\alpha^+ = \sum_j^m \Delta_j R_\alpha^-$$

onde  $\beta$  é a evoluta de  $\alpha$  e  $s_\beta$  é o comprimento de arco de  $\beta$ .

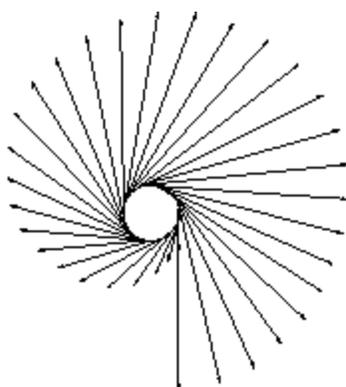


Figura 2.2: Obtenção da involuta tendo uma circunferência como evoluta.

Finalmente, chega-se à propriedade mais importante.

**Propriedade 4** *Construtivamente (Figura 2.2) é possível obter a involuta  $\alpha$  a partir da evoluta  $\beta$  e um ponto da involuta [8], pois:*

1. *as tangentes da evoluta são normais da involuta. Portanto, dada uma evoluta, uma família a um parâmetro de involutas está determinada; e*
2. *dado um ponto da involuta, relativo a um ponto da evoluta, pode-se determinar qual é a involuta desejada dentre as curvas da família de curvas determinada.*

**Prova:**

*Dada a evoluta  $\beta$ , têm-se as direções das normais da involuta  $\alpha$  associada a  $\beta$ . Quando se tem um ponto da curva, fica determinado um raio de curvatura de  $\alpha$  e como os raios de curvatura de  $\alpha$  são relacionados pelo comprimento de arco da evoluta  $\beta$ ,  $\alpha$  está completamente determinada.*

### 2.1.3 Diferenciabilidade e Continuidade Geométrica

Considere que  $\alpha = \alpha(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ ,  $t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$  é a representação paramétrica de

uma curva no  $\mathbb{R}^3$ , com  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  diferenciáveis em  $t$ . Sob estas circunstâncias, diz-se que a parametrização é regular se

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{bmatrix} \neq 0, t \in [\alpha, \beta]$$

**Definição 5** Diz-se que uma curva é  $GC^m$ , ou apresenta grau de continuidade geométrica  $n$ , se existe uma reparametrização regular após a qual a curva torna-se  $C^n$  (de classe  $n$ ).

Obviamente esta definição equivale à exigência de: continuidade  $C^{m-2}$  da curvatura  $k$  e continuidade  $C^{n-3}$  da torção  $\tau$  (apenas para curvas no espaço).

O conceito de continuidade geométrica é importante quando se está tratando de curvas que são compostas de vários segmentos.

Seja  $\alpha_-$  o extremo direito de um segmento e  $\alpha_+$  o extremo esquerdo do segmento adjacente no ponto  $P$ . Uma curva será contínua no ponto  $P$  se  $\alpha_- = \alpha_+$ . Se, além disto,

$$\frac{d\alpha_+}{dt} = \delta \frac{d\alpha_-}{dt}, \delta > 0, \frac{d\alpha_-}{dt} \neq 0$$

a curva é  $GC^1$  no ponto  $P$ .

Quando além disto a curvatura e o plano osculador dos dois segmentos de curva adjacentes forem coincidentes, ou seja,

$$\frac{d^2\alpha_+}{dt^2} = \delta^2 \frac{d^2\alpha_-}{dt^2} + \epsilon \frac{d\alpha_-}{dt}$$

então tem-se  $GC^2$  no ponto  $P$ . Observamos que uma curva  $\alpha$  é  $GC^2$  se  $\alpha$  for duas vezes diferenciável com relação ao comprimento de arco (mas não necessariamente duas vezes diferenciável com relação à parametrização atual), portanto, curvas onde o vetor tangente se anula não podem ser  $GC^2$ .

## 2.2 Conjuntos nebulosos

Incerteza é um tipo de imprecisão inerente a certas classes que não apresentam fronteiras bem definidas. Como é sabido da literatura, os conjuntos nebulosos, que foram introduzidas por Zadeh [20], aparecem quando se deseja descrever ambigüidade e ambivalência em modelos matemáticos de fenômenos empíricos. Em particular, simulações por computador de sistemas com alta cardinalidade, tão comuns no mundo real, demandam algumas formulações matemáticas não clássicas especiais que possam lidar com descrições imprecisas. Conjuntos nebulosos, que são classes que admitem a possibilidade de pertinência parcial, parecem ser uma ferramenta adequada para tratar tal natureza de problemas [12, 15, 20].

### 2.2.1 Definições

Seja  $X$  um espaço de objetos. Um conjunto nebuloso  $A$  em  $X$  é um conjunto de pares ordenados  $A = \{(x, \chi_A(x)) | x \in X \text{ e } \chi_A(x) \in [0, 1]\}$ , com  $\chi_A(x)$  sendo o "grau de pertinência de  $x$  em  $A$ ". Neste trabalho assume-se, por simplicidade, como em [20], que  $\chi_A(x)$  é um número no intervalo de números reais  $[0, 1]$ , ao invés de considerar tais valores variando em uma estrutura algébrica mais genérica, como citado em [7, 12]. Logo, questões como  $x \in X$  podem ter respostas diferentes de sim ( $\chi_A(x) = 1$ , ou seja, pertinência de  $x$ ) ou não ( $\chi_A(x) = 0$ , ou seja, não pertinência de  $x$ ).

Observe-se que o grau de pertinência  $\chi_A(x)$  de um objeto  $x$  em  $A$  pode ser interpretado como o grau de compatibilidade do predicado associado a  $A$  e o objeto  $x$ . Também é possível interpretar  $\chi_A(x)$  como o grau de possibilidade de  $x$  ser o valor de um parâmetro nebulosamente restrito a  $A$ .

As operações OU ( $\vee$ ), E ( $\wedge$ ) e NÃO ( $\neg$ ) entre sub-conjuntos nebulosos  $A$  e  $B$  sobre  $X$  podem ser definidas de várias formas, como por exemplo [12]:

- OU:

- $A \cup B = \{(x, \text{Min}(1, \chi_A(x) + \chi_B(x))) | x \in X\}$ ; e

- \*  $A \cup B = \{(x, \text{Max}(\chi_A(x), \chi_B(x))) | x \in X\}$ .

- E:

- $A \cap B = \{(x, \text{Max}(0, \chi_A(x) + \chi_B(x) - 1)) | x \in X\}$ ; e

- \*  $A \cap B = \{(x, \text{Min}(\chi_A(x), \chi_B(x))) | x \in X\}$ .

- NÃO:

$$* \neg A = \{(x, 1 - \chi_A(x)) | x \in X\}.$$

Neste trabalho são adotadas as definições marcadas com "\*".

## 2.2.2 Processos de Fuzzyficação e Defuzzyficação

Diz-se que um conceito está sendo fuzzyficado quando um conjunto nebuloso é definido para expressar este conceito. De forma inversa, diz-se que um conceito está sendo defuzzyficado quando um valor representativo (*crisp*) é escolhido, a partir do conjunto nebuloso associado, para descrever tal conceito. Há várias técnicas de fuzzyficação e de defuzzyficação. A escolha de um par de técnicas (fuzzyficação, defuzzyficação) em especial depende da aplicação em estudo. Entretanto, é importante que fique clara a interdependência do par de técnicas. Para uma dada aplicação, a técnica de fuzzyficação não pode ser escolhida sem considerar a técnica de defuzzyficação, e vice-versa.

**Exemplo 1** *Pode-se definir o conceito raio de curvatura pequeno por um conjunto nebuloso A. As seguintes classificações, arbitrárias, dos raios de curvatura  $x$  são utilizadas:*

- raios de curvatura entre 0 e 50 são pequenos, portanto, neste caso, assume-se que o grau de pertinência desses valores ao conceito raio de curvatura pequeno seja unitário ( $\chi_A(x) = 1, 0 \leq x < 50$ );
- raios de curvatura entre 50 e 100 são mais ou menos pequenos, portanto, neste caso, assume-se que o grau de pertinência dos valores nesta faixa ao conceito raio de curvatura pequeno varie linearmente de 1 a 0 ( $\chi_A(x) = \frac{100-x}{50}, 50 \leq x < 100$ ); e
- raios de curvatura acima de 100 não são pequenos, portanto, neste caso, assume-se que o grau de pertinência desses valores ao conceito raio de curvatura pequeno seja nulo ( $\chi_A(x) = 0, x \geq 100$ ).

A Figura 2.3 mostra uma representação gráfica do conjunto nebuloso que descreve o conceito raio de curvatura pequeno, de acordo com esta classificação.

Pode-se ainda definir o conceito raio de curvatura grande por um conjunto nebuloso B. As seguintes classificações, arbitrárias, dos raios de curvatura  $x$  são utilizadas:

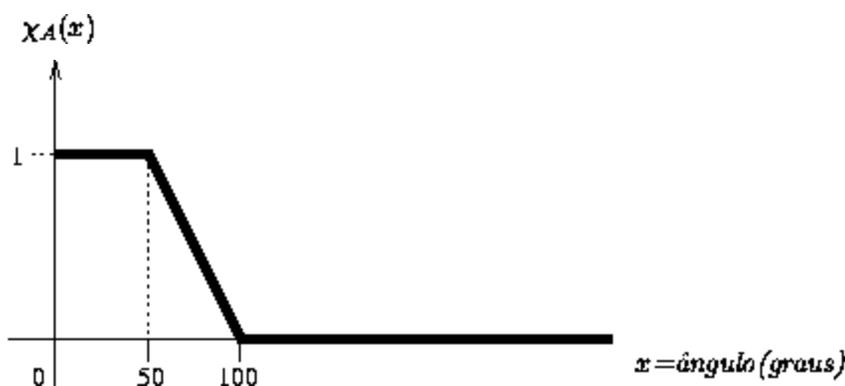


Figura 2.3: Um conjunto nebuloso para o conceito raio de curvatura pequeno.

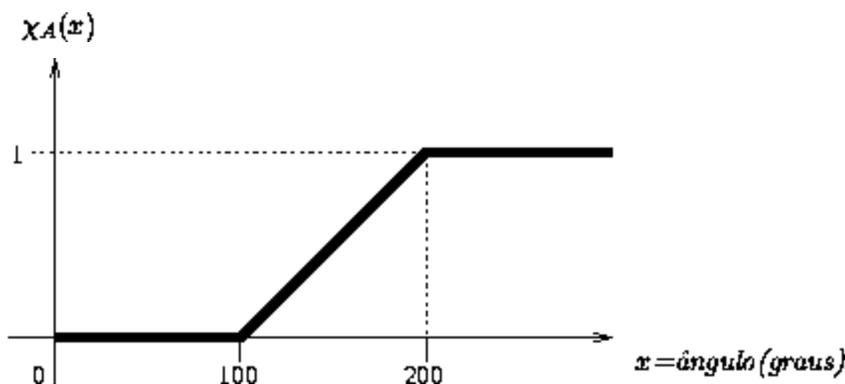


Figura 2.4: Um conjunto nebuloso para o conceito raio de curvatura grande.

- raios de curvatura entre 0 e 100 não são grandes, portanto, neste caso, assume-se que o grau de pertinência desses valores ao conceito raio de curvatura grande seja nulo ( $\chi_B(x) = 0, 0 \leq x < 100$ );
- raios de curvatura entre 100 e 200 são mais ou menos grandes, portanto, neste caso, assume-se que o grau de pertinência dos valores nesta faixa ao conceito raio de curvatura grande varie linearmente de 0 a 1 ( $\chi_B(x) = \frac{x-100}{100}, 100 \leq x < 200$ ); e
- raios de curvatura acima de 200 são grandes, portanto, neste caso, assume-se que o grau de pertinência desses valores ao conceito raio de curvatura grande seja unitário ( $\chi_B(x) = 1, x \geq 200$ ).

A Figura 2.4 mostra uma representação gráfica do conjunto nebuloso que descreve esse conceito raio de curvatura grande.

Suponha agora que se deseje representar um conjunto nebuloso  $C$  que descreva valores adequados a um raio de curvatura. Por valores adequados a um raio de curvatura vai-se arbitrar raios de curvatura que não são nem grandes e nem pequenos. Tal raio de curvatura

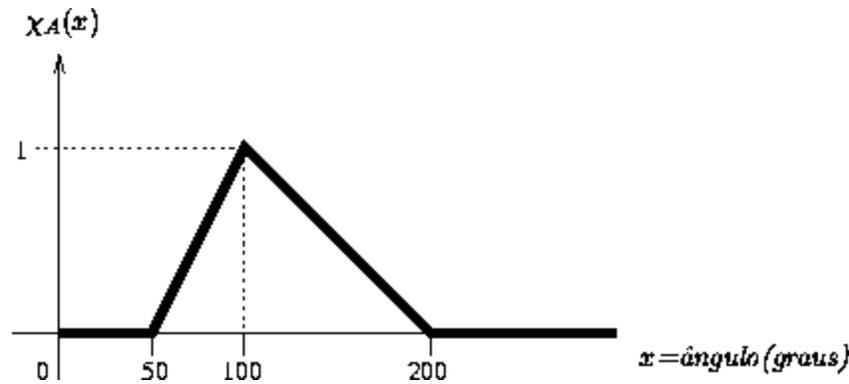


Figura 2.5: Um conjunto nebuloso para o conceito *raio de curvatura adequado*.

pode ser descrito como não pertencendo ao conceito *raio de curvatura pequeno* e nem ao conceito *raio de curvatura grande*, que permitiria descrever o conjunto nebuloso  $C$  por:

$$C = \{(x, \text{Min}(1 - \chi_A(x), 1 - \chi_B(x))) | x \in X\}$$

A Figura 2.5 mostra uma representação gráfica do conjunto nebuloso que descreve o conceito *raio de curvatura adequado* estabelecido.

**Exemplo 2** *Pode-se definir e representar o conceito linhas quase paralelas por um conjunto nebuloso  $D$ . Dadas duas linhas  $L_1$  e  $L_2$ , as seguintes classificações de  $x$  - o valor absoluto, em graus, da diferença entre as inclinações de  $L_1$  e  $L_2$ , ( $x = |\text{inclinação}(L_1) - \text{inclinação}(L_2)|$ ) - foram assumidos:*

- $x$  é nulo. As linhas  $L_1$  e  $L_2$  são paralelas, portanto, neste caso, opta-se por associar grau de pertinência unitário ao conceito de linhas quase paralelas ( $\chi_D(x) = 1, x = 0$ );
- $x$  variando de 0 a 10. As linhas  $L_1$  e  $L_2$  são mais ou menos paralelas, portanto, neste caso, pode-se associar grau de pertinência ao conceito de linhas quase paralelas variando linearmente de 1 a 0 ( $\chi_D(x) = \frac{10-x}{10}, 0 \leq x < 10$ ); e
- $x$  acima de 10. As linhas  $L_1$  e  $L_2$  não são paralelas, portanto, neste caso, escolhe-se associar grau de pertinência nulo ao conceito de linhas quase paralelas ( $\chi_D(x) = 0, x \geq 10$ ).

A Figura 2.6 mostra uma representação gráfica do conjunto nebuloso que descreve esse conceito *linhas quase paralelas*.

As classificações (subjetivas) utilizadas nos dois exemplos acima são na verdade as estratégias de fuzzyficação adotadas pelo projetista para expressar o seu conceito de *raio*

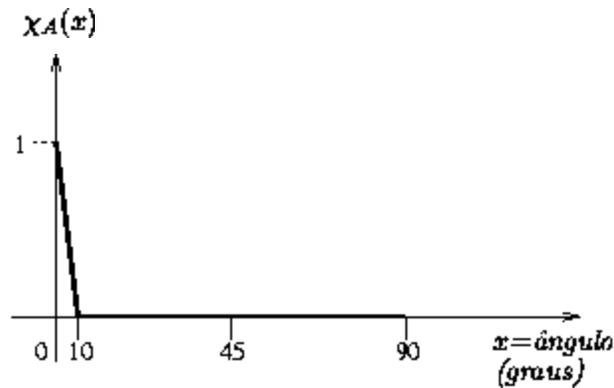


Figura 2.6: Um conjunto nebuloso para o conceito *linhas quase paralelas*.

*de curvatura pequeno, raio de curvatura grande, raio de curvatura adequado e linhas quase paralelas.*

Considere-se agora o conjunto nebuloso representado na Figura 2.6. Qual número poderia realmente descrever o conceito subjetivo *linhas quase paralelas*? Suponha que a técnica de defuzzificação adotada pelo projetista escolheu o valor  $x = 3$ . Logo  $x = 3$  representa de forma objetiva o conceito *linhas quase paralelas* no ponto de vista do projetista. Um processo de defuzzificação análogo poderia ser utilizado sobre o conjunto nebuloso da Figura 2.5. Outros exemplos podem ser vistos em [12, 15, 20].

## 2.3 Curvas em Modelagem Geométrica

### 2.3.1 Curvas de Bézier

#### Definição

A curva de Bézier  $C$  (Figura 2.7) é definida pela equação paramétrica

$$C(t) = \sum_{k=0}^n F_k^n(t) B_k, \forall t \in [0, 1]$$

onde:

$B_k$  são os pontos de controle; e

$F_k^n(t)$  são as funções de base Bernstein, dadas por

$$F_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \text{ sendo que } \binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

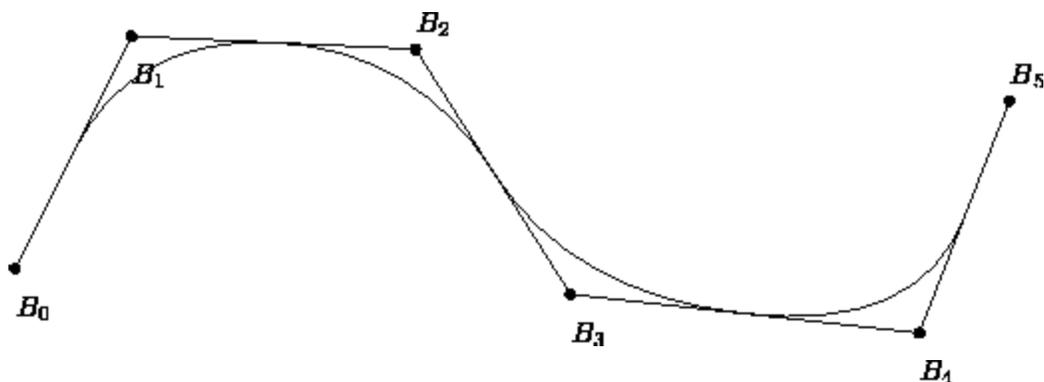


Figura 2.7: Parâmetros da curva de Bézier de grau 5.

### Propriedades

Algumas das propriedades importantes das curvas de Bézier são [9]:

- **Invariância sob transformações afins:** a transformação afim aplicada a uma curva de Bézier equivale à curva de Bézier com esta mesma transformação afim aplicada aos respectivos pontos de controle;
- **Fecho convexo:** a curva de Bézier está contida no fecho convexo do seu polígono de controle;
- **Diminuição de oscilação:** o número de intersecções entre a curva de Bézier e o plano (ou a reta, para curva de Bézier 2D) deve ser, no máximo, igual ao número de intersecções entre a curva e o polígono de controle;
- **Interpolação dos extremos:** a curva de Bézier passa pelos pontos de controle extremos do polígono de controle; e
- **Facilidade de determinação da tangente dos extremos:** a direção da tangente dos extremos da curva coincide com a direção determinada por dois pontos de controle de cada extremo do polígono de controle.

### 2.3.2 B-splines

Considerando a classificação dada por [10] pode-se dizer que uma função  $s$  composta de sub-funções polinomiais de grau  $n$  é chamada:

- a) spline, se  $s$  for  $(n - 1)$  vezes continuamente diferenciável; e
- b) sub-spline, se for ao menos contínua, mas a) não seja atendida.

Particularmente, na Modelagem Geométrica assistida por computador, prefere-se trabalhar com classes de splines que satisfazem à seguinte definição [5].

**Definição 6** Seja  $B_k \in \mathfrak{R}^3$ , com  $k = 0, \dots, n$ , um conjunto de pontos chamados pontos de controle, e seja  $F_k : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{R}$ , com  $k = 0, \dots, n$ , um conjunto de funções de base, a spline gerada pelos pares  $(P_k, F_k)$  é a curva  $C$  definida pela equação paramétrica:

$$C(t) = \sum_{k=0}^n F_k(t) B_k, \forall t \in [0, 1] \quad (2.4)$$

Dependendo das funções de base, a curva resultante irá aproximar os pontos de controle ou interpolá-los. Uma classe de splines de grande aplicação é representada pelas B-splines.

### Definição

A B-spline  $C$  é definida pela equação paramétrica

$$C(t) = \sum_{i=1}^{n+1} F_i^k(t) B_i, t_{\min} \leq t < t_{\max}, 2 \leq k \leq n+1$$

onde:

$B_i$  são os pontos de controle; e

$$F_i^k(t) = \frac{(t-x_i)^{k-1}(t-x_{i+1})}{x_{i+k}-x_i} + \frac{(x_{i+k}-t)^{k-1}(t-x_{i+1})}{x_{i+k}-x_{i+1}}, \text{ sendo que } F_i^1(t) = \begin{cases} 1 & x_i \leq t < x_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

### Propriedades

Algumas das propriedades importantes das B-splines são:

- Invariância sob transformações afins: a transformação afim aplicada a uma B-splines equivale à aplicação desta mesma transformação aos respectivos pontos de controle;
- Fecho convexo: a B-spline está contida no fecho convexo do seu polígono de controle;
- Diminuição de oscilação: o número de intersecções entre a B-spline e o plano (ou a reta, para splines 2D) é, no máximo, igual ao número de intersecções entre a curva e o polígono de controle;
- Controle local: cada ponto de controle influencia a forma de um trecho da B-spline;

- Formas suaves/Formas de bico: uma B-spline permite tanto bicos quanto formas suaves, e mais ainda, misturar ambos comportamentos na mesma curva;
- Parâmetros de ajuste intuitivos: além dos pontos de controle, a B-spline fornece outros graus de liberdade, chamados parâmetros de ajuste;
- Existência de algoritmo de refinamento: a B-spline permite o uso de técnicas de refinamento ou sub-divisão;
- Representação de cônicas: a B-spline pode representar seções cônicas (ao menos de forma aproximada); e
- Aproximação: a B-spline aproxima os pontos de controle.

### 2.3.3 Splines Geométricas

As splines geométricas apareceram com o intuito que diminuir a dificuldade na obtenção de curvas "suaves". Estas splines na verdade não inseriram novas funções de base, mas sim novas formas de tratar a questão suavidade aplicadas às funções de base existentes na literatura.

Uma das formas de caracterizar splines geométricas, mas não a única, é dada pelo seguinte enunciado[11]:

"Diz-se que uma curva é uma spline geométrica se esta curva satisfaz alguma condição de suavidade que é mais geral que a suavidade  $C^r$ , e esta condição pode ser interpretada geometricamente."

Entre as condições de suavidade mais utilizadas está o conceito, vindo da geometria diferencial, de ordem de contato entre segmentos da spline. Há também splines que usam condições provenientes do cálculo variacional.

Nas seções seguintes, serão apresentadas algumas splines geométricas baseadas nos conceitos de ordem de contato, ou seja, continuidade geométrica. Portanto, os coeficientes  $\delta$  e  $\epsilon$  mostrados na Seção 2.1.3 serão extensamente utilizados para representar a continuidade geométrica entre os segmentos da spline geométrica em questão.

#### $\gamma$ -splines

##### Definição

A  $\gamma$ -spline  $C$  é composta pelos segmentos de curvas de Bézier [11]

$$C_i(t) = \sum_{k=0}^n F_k^m \left( \frac{t}{\mu_i} \right) B_{k,i}, \forall t \in [0, \mu_i], \mu_i \in \mathfrak{R}$$

onde:

$B_{k,i}$  são os pontos de controle; e

$$F_k^m(t) = \binom{n}{k} \frac{t^k (\mu_i - t)^{n-k}}{(\mu_i)^n}, \text{ sendo que } \binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Adicionalmente, as seguintes condições são satisfeitas nos pontos de junção:

$$\begin{aligned} B_{n,i-1} &= B_{0,i} \\ (1 + q_i \delta_i) B_{n,i-1} &= q_i \delta_i B_{n-1,i-1} + B_{1,i} \\ (1 + q_i \delta_i^2 \gamma_i) B_{n-1,i-1} &= q_i \delta_i^2 \gamma_i B_{n-2,i-1} + d_i \\ (\gamma_i + q_i) B_{1,i} &= \gamma_i B_{2,i} + q_i d_i \end{aligned}$$

onde:

$$q_i = \frac{\mu_i}{\mu_{i-1}};$$

$\delta_i$  (coeficiente da equação de  $GC^1$ ) é a razão entre as magnitudes dos vetores tangente à esquerda e à direita no ponto  $B_{0,i}$ ;

$$\gamma_i = \frac{1 + q_i \delta_i}{\delta_i (1 + q_i \delta_i) + \frac{\mu_i}{\mu_{i-1}} \epsilon_i};$$

$\epsilon_i$  é o coeficiente da equação de  $GC^2$ ; e

$d_i$  são os pontos auxiliares obtidos construtivamente a partir da intersecção das retas suporte dos pontos de controle  $B_{n-2,i-1}$ ,  $B_{n-1,i-1}$  e  $B_{1,i}$ ,  $B_{2,i}$  (Figura 2.8).

## Propriedades

A  $\gamma$ -spline possui as seguintes propriedades:

- é  $GC^1$  e  $GC^2$ ;
- provê o parâmetro  $\gamma_i$  associado à junção dos segmentos  $C_{i-1}$  e  $C_i$  para ajustes na forma da curva. Este parâmetro embute ajustes em  $GC^1$  e  $GC^2$  simultaneamente; e
- a  $\gamma$ -spline  $C$  pode não interpolar o conjunto de pontos  $\{B_{0,i}, B_{n,i}\}$ .

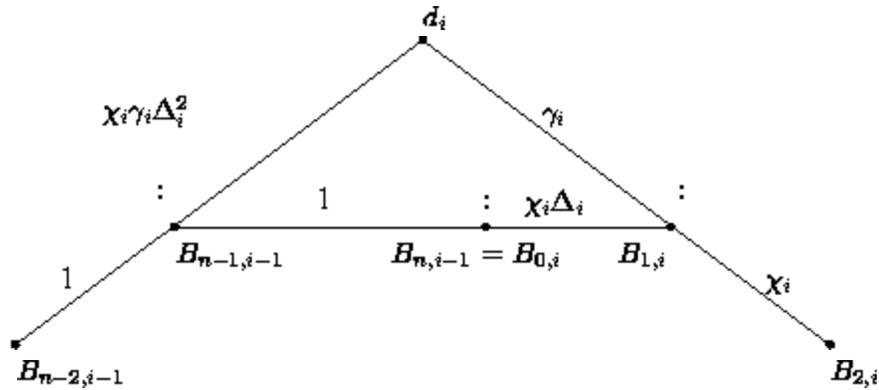


Figura 2.8: Parâmetros da  $\gamma$ -spline.

### $\nu$ -splines

#### Definição

A  $\nu$ -spline  $C$  é uma  $\gamma$ -spline onde:

- $\delta_i = 1$ ; e
- $\epsilon_i = \nu_i = \frac{2}{\mu_i} (1 + q_i) \left( \frac{1}{\gamma_i} - 1 \right)$

#### Propriedades

A  $\nu$ -spline possui as seguintes propriedades:

- é  $C^1$  (pois  $\delta_i = 1$ ) e  $GC^2$ ; e
- provê  $\nu_i$  como parâmetro de ajuste. Este parâmetro embute ajustes em  $GC^2$ .

### $\beta$ -splines

#### Definição

A  $\beta$ -spline  $C$  é composta pelos segmentos  $C_i$  definidos pela equação paramétrica

$$C_i(t) = \sum_{k=-3}^0 F_k(t) B_{k,i}, \forall t \in [0, 1]$$

onde:

- $B_{k,i}$  são os pontos de controle; e

$$\bullet F_k(u) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} [2u^3] & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ \frac{1}{\beta} [2 + 6\beta_1 u + (3\beta_2 + 6\beta_1^2) u^2 - (2\beta_2 + 2\beta_1^2 + 2\beta_1 + 2) u^3] & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}] \\ \frac{1}{\beta} \left[ \begin{array}{l} (\beta_2 + 4\beta_1^2 + 4\beta_1) + (6\beta_1^3 - 6\beta_1) u \\ - (3\beta_2 + 6\beta_1^3 + 6\beta_1^2) u^2 + (2\beta_2 + 2\beta_1^3 + 2\beta_1^2 + 2\beta_1) u^3 \end{array} \right] & t \in [t_{i+2}, t_{i+3}] \\ \frac{1}{\beta} [2\beta_1^3 - 6\beta_1^3 u + 6\beta_1^3 u^2 - 2\beta_1^3 u^3] & t \in [t_{i+3}, t_{i+4}] \end{cases}$$

com:

$$\beta = 2\beta_1^3 + 4\beta_1^2 + 4\beta_1 + \beta_2 + 2$$

### Propriedades

A  $\beta$ -splines  $C$  é uma  $\gamma$ -spline com:

- $\delta_i = \beta_1$ ; e
- $\epsilon_i = \beta_2$ .

Além desta, outras propriedades importantes das  $\beta$ -splines são:

- é  $GC^1$  e  $GC^2$ ; e
- provê  $\beta_1$  e  $\beta_2$  como parâmetros de ajuste. O parâmetro  $\beta_1$  embute ajustes em  $GC^1$  enquanto o parâmetro  $\beta_2$  embute ajustes em  $GC^2$ .

## Capítulo 3

### C-splines

Considerando o problema enunciado no Capítulo 1

”Dada uma seqüência de  $N$  pontos  $P_{i-1}, 1 \leq i \leq N$  com o respectivo grau de adequabilidade desejado de uma curva plana interpolante, ou seja,  $S = ((P_0, bicuda), (P_1, suave), \dots, (P_{N-1}, bicuda))$ , determine a curva que melhor se aproxime da intenção do projetista.”

é necessário prover formas de modelagem do conceito de adequabilidade, permitindo a atribuição de graus de adequabilidade às diversas configurações. Com este intuito, fez-se aqui a seguinte diferenciação:

- adequabilidade local: expressa a adequabilidade nos pontos de  $S$ . Por vezes, esta noção de adequabilidade é representada através de condições de continuidade geométrica nestes pontos; e
- adequabilidade global: expressa a adequabilidade da curva como um todo. A manipulação desta adequabilidade é um ponto nitidamente subjetivo, que não é atacado pelos métodos da literatura. Os métodos globais descritos na literatura utilizam funções-objetivo com propriedades globais da curva, sem no entanto permitir adequações das funções-objetivo aos objetivos do projetista. Uma vez que sob as mesmas condições de continuidade geométrica (e portanto mesma adequabilidade local) podem ser obtidas diversas soluções, é aqui que este trabalho propõe uma diferença: não pressupor funções-objetivo a priori, mas permitir que o projetista possa escolher dentre as diversas curvas possíveis de serem obtidas, a mais adequada segundo critérios pessoais.

Desta forma, pode-se dizer que, no que concerne à adequabilidade, o problema abordado passa a ser: Seja  $S$  a seqüência dada de pontos, acompanhados pela especificação de "adequabilidade" que a curva plana que passar por estes pontos (adequabilidade local) deva apresentar. É procurada a curva  $C$  que interpola adequadamente (adequabilidade global) os  $N$  pontos em  $S$ .

Observe-se que, pelo que foi dito sobre adequabilidade local e global, uma curva pode ser adequada localmente, sem entretanto ser adequada globalmente. Entretanto, se uma curva for adequada globalmente, ela será adequada localmente. Isto torna claro que existe uma relação entre adequabilidade local e global. Esta relação deve ser considerada na modelagem.

Considerando  $GC^2$  a condição usualmente almejada, a adequabilidade local pode ser modelada através do uso do raio de curvatura [19]. Ainda que a validade de condições de contorno não seja necessária, tem-se formas de associar comportamentos geométricos conhecidos à adequabilidade local, pois raios de curvatura grandes indicam formas mais suaves ("retas") enquanto raios de curvatura pequenos indicam formas mais oscilantes ("curvas").

Falta ainda modelar a adequabilidade global de forma a permitir que a relação entre as adequabilidades local e global seja razoável. Uma forma razoável de modelar a adequabilidade global é dizer que a adequabilidade global é a aplicação do conceito de adequabilidade local a todos os pontos e não apenas aos pontos de  $S$ . Como foi proposto utilizar o raio de curvatura para modelar a adequabilidade local, a adequabilidade global deve ser representada pelo conjunto de raios de curvatura da curva  $C$ . Mas o conjunto de raios de curvatura de uma curva é determinado pela evoluta desta curva! Portanto, a adequabilidade global será modelada utilizando a evoluta.

Um método de geração de curvas satisfazendo tais conceitos geométricos e de adequabilidade é proposto, sendo denominado C-spline. Neste capítulo são apresentadas a definição e algumas propriedades da C-spline.

### 3.1 Definição

Pelo que já foi dito, a definição de C-spline deve basear-se nos conceitos geométricos de raio de curvatura e evoluta. Entretanto, de acordo com a Seção 2.1, a evoluta de uma curva só pode ser determinada se a equação da curva for dada. Ou, reciprocamente, tendo a evoluta e um ponto da curva, é possível determinar a curva. O que deve ser feito para obter

uma curva  $C$  conhecendo apenas alguns dos pontos desta curva e tendo a adequabilidade local definida nestes pontos?

A proposta é fazer com que a curva  $C$  seja composta de segmentos  $C_i$  para permitir manipulações locais. Assim, um segmento da curva interpolante  $C_i(t)$  que passa por dois pontos consecutivos  $P_{i-1}$  e  $P_i$  é expresso como uma aproximação da equação (2.1)

$$C_i(t) = PE_i(t) + \frac{PE_i(t)}{\|PE_i(t)\|} \left( (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} \right) + R_i(t_{i-1}) \right), t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (3.1)$$

onde:

$PE_i(t)$  é a pseudo-evoluta correspondente ao trecho de curva  $C_i(t)$ ; e

$R_i(t_j)$ ,  $j = i, i-1$  é o módulo do raio-vetor associado aos pontos extremos do trecho de curva  $C_i(t)$ .

Comparando (3.1) e (2.1) percebe-se que elas serão idênticas se  $\|E_i(\vec{t})\|$  for constante.

A equação (3.1) busca aproximar a forma de obtenção de uma curva dada a evoluta correspondente. Entretanto, ao contrário da construção da involuta (Seção 2.1) esta abordagem pede que o segmento de curva passe por dois pontos dados. Vale a pena salientar que:

- a curva  $PE_i(t)$  utilizada é uma aproximação da evoluta do segmento de curva  $C_i(t)$  e não a própria evoluta do segmento de curva  $C_i(t)$ , sendo por isto chamada de pseudo-evoluta de  $C_i(t)$ ;
- o raio-vetor  $\vec{R}_i(t_j)$  é representado pelo par (magnitude, direção) sendo que apenas a magnitude  $R_i(t_j)$  aparece explicitamente na equação (3.1);
- a direção do raio-vetor  $\vec{R}_i(t_j)$  associado a um ponto  $P$  coincide com a direção da tangente à pseudo-evoluta associada a este mesmo ponto  $P$ ; e
- a  $PE$ , que é o conjunto dos segmentos  $PE_i(t)$ , embute o conceito de adequabilidade global de uma curva, enquanto o raio-vetor expressa o conceito de adequabilidade local de uma curva [3].

A seguir são mostradas algumas propriedades da C-spline dada pela equação (3.1).

### 3.2 Derivadas

Calculando as derivadas primeira e segunda de  $C_i(t)$  (3.1) em relação a  $t$  chega-se a:

$$C_i'(t) = PE_i'(t) + \frac{PE_i''(t)}{\|PE_i'(t)\|} \left( (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} \right) + R_i(t_{i-1}) \right) - \frac{PE_i'(t)(PE_i'(t), PE_i''(t))}{\|PE_i'(t)\|^2} \left( (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} \right) + R_i(t_{i-1}) \right) + \frac{PE_i'(t)}{\|PE_i'(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i-t_{i-1}} \right) \quad (3.2)$$

$$C_i''(t) = PE_i''(t) + \frac{PE_i'''(t)}{\|PE_i'(t)\|} \left( (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} \right) + R_i(t_{i-1}) \right) - 2 \frac{PE_i''(t)(PE_i'(t), PE_i''(t))}{\|PE_i'(t)\|^2} \left( (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} \right) + R_i(t_{i-1}) \right) + 2 \frac{PE_i''(t)}{\|PE_i'(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i-t_{i-1}} \right) + \frac{3PE_i''(t)(PE_i'(t), PE_i''(t))^2}{\|PE_i'(t)\|^3} \left( (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} \right) + R_i(t_{i-1}) \right) - 2 \frac{PE_i''(t)(PE_i'(t), PE_i''(t))}{\|PE_i'(t)\|^2} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i-t_{i-1}} \right) - \frac{PE_i'(t)((PE_i''(t), PE_i''(t)) + (PE_i'(t), PE_i'''(t)))}{\|PE_i'(t)\|^3} \left( (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} \right) + R_i(t_{i-1}) \right) \quad (3.3)$$

As equações das derivadas primeira (3.2) e segunda (3.3) mostram que a C-spline é uma sub-spline, segundo a classificação apresentada na Seção 2.3.2.

### 3.3 Grau

A C-spline mostrada na equação (3.1) é dada pela adição de duas parcelas. A primeira é a própria  $PE$  (polinomial de grau  $n$ ). A segunda é a derivada da  $PE$  (polinomial de grau  $n - 1$ ) multiplicada por um polinômio em  $t$  de grau 1. Tal multiplicação resulta em um polinômio de grau  $n$ . Portanto, ambas parcelas apresentam grau  $n$  e este será também o grau da C-spline mostrada em (3.1), ou seja, a C-spline tem o mesmo grau da  $PE$ .

### 3.4 Parâmetros de Ajuste

Os parâmetros de ajuste irão permitir que a curva sofra modificações de forma a apresentar as características geométricas desejadas.

A partir da equação (3.1) é fácil verificar que os parâmetros de ajuste são:

- os módulos dos raios-vetores  $R_i(t_i)$ ; e

- os parâmetros de ajuste do método de geração de curvas utilizado para modelar a  $PE$  - neste sentido pode-se dizer que o próprio método de geração de curvas utilizado para modelar a  $PE$  é um parâmetro de ajuste de (3.1).

Vale a pena observar que, pelo que foi dito na Seção 3.1, a direção do raio-vetor atua como uma restrição "implícita" sobre os parâmetros de ajuste do método de geração de curvas utilizado para modelar a  $PE$ .

### 3.5 Raio de curvatura nos pontos de $S$

A equação (3.1) apresenta uma aproximação do raio de curvatura, denominada raio-vetor. As Proposições 1 e 3 mostram condições sob as quais os raios-vetores, não só aproximam, mas são exatamente os raios de curvatura.

Como foi discutido na Seção 2.1, o raio de curvatura calculado em um ponto de uma dada curva é ortogonal à curva neste ponto. Entretanto, a comparação das equações (2.1) e (3.1) já mostrou que a equação (3.1) apenas aproxima a equação (2.1). Portanto, faz sentido avaliar quão boa é esta aproximação no que diz respeito aos conceitos geométricos.

A proposição a seguir trata sobre a posição relativa entre os raios-vetores e a curva.

**Proposição 1** *Considere um segmento  $C_i(t)$ , definido no intervalo  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ , de uma  $C$ -splíne  $C(t)$  plana e um segmento  $PE_i(t)$ , associado a  $C_i(t)$  e definido no mesmo intervalo, da  $PE$ . Se  $\|PE_i(t_0)\| \neq 0$  com  $t_0 \in [t_{i-1}, t_i]$ , então  $C_i(t_0)$  e  $PE_i(t_0)$  serão ortogonais se e somente se*

$$\|PE_i(t_0)\| = \frac{R_i(t_{i-1}) - R_i(t_i)}{t_i - t_{i-1}}$$

**Prova:**

*Ver Apêndice A.*

Em particular, se  $\|PE_i(t)\| \neq 0$  e constante,  $\forall t \in [t_{i-1}, t_i]$ , então as equações (3.1) e (2.1) são equivalentes. Isto sempre ocorrerá se  $C_i(t)$  estiver sendo parametrizada por um múltiplo do comprimento de arco.

Para se falar sobre o módulo do raio de curvatura necessita-se da seguinte proposição.

**Proposição 2** A curvatura nos extremos ( $t = t_{i-1}$  e  $t = t_i$ ) do segmento  $C_i(t)$  é expressa por

$$K_i(t) = \frac{1}{R_i(t)} - \frac{\langle PE_i^v(t), PE_i^u(t) \rangle}{(R_i(t))^2 \kappa_i(t) \|PE_i^v(t) \times PE_i^u(t)\|}$$

**Prova:**

Ver Apêndice B.

E, para que se tenha a igualdade dos módulos do raio de curvatura e raio-vetor, vem a seguinte proposição.

**Proposição 3** Suponha que em  $t = t_{i-1}$  e  $t = t_i$  (extremos do segmento  $C_i(t)$ ):

1. a Proposição 1 é satisfeita;
2.  $R_i(t) \neq 0$ ;
3.  $\|PE_i^v(t)\| \neq 0$ ; e
4.  $\|PE_i^v(t) \times PE_i^u(t)\| \neq 0$

então

$$\frac{1}{K_i(t)} = R_i(t)$$

$\Leftrightarrow$

$$\langle PE_i^v(t), PE_i^u(t) \rangle = 0$$

**Prova:**

Ver Apêndice C.

Em particular, se  $\langle PE_i^v(t), PE_i^u(t) \rangle = 0, \forall t \in [t_{i-1}, t_i]$ , então as equações (3.1) e (2.1) são equivalentes. Isto sempre ocorrerá se  $C_i(t)$  estiver sendo parametrizada por um múltiplo do comprimento de arco.

### 3.6 Continuidade Geométrica

Para que se possa garantir a continuidade entre segmentos da curva  $C$ , deve-se utilizar o conceito de continuidade geométrica expresso na Seção 2.1.3.

**Proposição 4** *Considere dois segmentos de curva consecutivos  $C_i(t)$  e  $C_{i+1}(t)$  (portanto com  $C_i(t_i) = C_{i+1}(t_i) = P_i$ ) de uma  $C$ -splíne  $C(t)$  plana. Se a Proposição 1 for satisfeita em  $t = t_i$ , então*

$$C'_i(t_i) = \alpha C'_{i+1}(t_i), \forall \alpha > 0$$

ou seja,  $C_i(t)$  e  $C_{i+1}(t)$  são  $GC^1$  em  $t = t_i$ .

**Prova:**

Ver Apêndice D.

Para que a curvatura na junção ( $t = t_i$ ) de dois trechos consecutivos seja a mesma, isto é, haja  $GC^2$  nas junções, só se precisa garantir que:

$$K_i(t_i) = K_{i+1}(t_i) \quad (3.4)$$

pois no presente caso, em que as curvas são planas, os dois trechos apresentam o mesmo plano osculador.

**Proposição 5** *Considere dois segmentos de curva consecutivos  $C_i(t)$  e  $C_{i+1}(t)$  (portanto com  $C_i(t_i) = C_{i+1}(t_i) = P_i$ ) de uma  $C$ -splíne  $C(t)$  plana. Para que  $C_i(t)$  e  $C_{i+1}(t)$  sejam  $GC^2$  em  $t = t_i$ , deve-se ter*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R_i(t_i)} - \frac{\langle P_{B'_i}(t_i), P_{B''_i}(t_i) \rangle}{(R_i(t_i))^2 \kappa_i(t_i) \|P_{B'_i}(t_i) \times P_{B''_i}(t_i)\|} \\ &= \frac{1}{R_{i+1}(t_i)} - \frac{\langle P_{B'_{i+1}}(t_i), P_{B''_{i+1}}(t_i) \rangle}{(R_{i+1}(t_i))^2 \kappa_{i+1}(t_i) \|P_{B'_{i+1}}(t_i) \times P_{B''_{i+1}}(t_i)\|} \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde:

$$\begin{aligned} \kappa_i(t_i) &= \frac{\|P_{B'_i}(t_i) \times P_{B''_i}(t_i)\|}{\|P_{B'_i}(t_i)\|^3}; \text{ e} \\ \kappa_{i+1}(t_i) &= \frac{\|P_{B'_{i+1}}(t_i) \times P_{B''_{i+1}}(t_i)\|}{\|P_{B'_{i+1}}(t_i)\|^3}. \end{aligned}$$

Observe que caso a Proposição 3 seja válida, a Proposição 5 pode ser reescrita da forma a seguir.

**Proposição 6** *Considere dois segmentos de curva consecutivos  $C_i(t)$  e  $C_{i+1}(t)$  (portanto com  $C_i(t_i) = C_{i+1}(t_i) = P_i$ ) de uma  $C$ -spline  $C(t)$  plana. Se a Proposição 3 for satisfeita em  $t = t_i$ , então a equação (3.4) é satisfeita em  $t = t_i$  se e somente se*

$$R_i(t_i) = R_{i+1}(t_i)$$

ou seja,  $C_i(t)$  e  $C_{i+1}(t)$  serão  $GC^2$  em  $t = t_i$  se e somente se os módulos dos dois raios-vetores associados ao ponto  $P_i$  forem iguais.

**Prova:**

Como a Proposição 3 é satisfeita em  $t = t_i$ , pode-se escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_i(t)} &= R_i(t) \\ &e \\ \frac{1}{K_{i+1}(t)} &= R_{i+1}(t) \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} K_i(t) &= \frac{1}{R_i(t)} \\ &e \\ K_{i+1}(t) &= \frac{1}{R_{i+1}(t)} \end{aligned}$$

Portanto a equação (3.4) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{R_i(t_i)} = \frac{1}{R_{i+1}(t_i)}$$

E como  $R_i(t_i) \neq 0$  e  $R_{i+1}(t_i) \neq 0$ , por hipótese da Proposição 3, chega-se a

$$R_i(t_i) = R_{i+1}(t_i)$$

### 3.7 Invariância sob Transformações Rígidas

Uma transformação é dita rígida (isometria) se não altera a distância entre dois pontos quaisquer. Portanto são transformações rígidas:

- r1 translação;
- r2 rotação;
- r3 espelhamento; e
- r4 qualquer composição das transformações rígidas anteriores.

Dizer que uma C-spline  $C(t)$  plana é invariante sob transformações rígidas significa dizer que as curvas  $C^*(t)$  e  $C^{**}(t)$ , obtidas pelos seguintes procedimentos, são equivalentes:

1. utilizar os parâmetros de ajuste para calcular a curva  $C(t)$  e aplicar a transformação rígida  $T$  à  $C(t)$  para calcular a curva  $C^*(t)$ ; e
2. aplicar a transformação rígida  $T$  aos parâmetros de ajuste e utilizar tais parâmetros de ajuste modificados para calcular a curva  $C^{**}(t)$ .

Como o procedimento 2 é computacionalmente menos custoso que o procedimento 1 e as curvas  $C^*(t)$  e  $C^{**}(t)$  resultantes dos dois procedimentos são equivalentes, é preferível utilizar o procedimento 2.

**Proposição 7** *Considere uma C-spline  $C(t)$  plana. Se  $PE(t)$  for invariante sob transformações afins então  $C(t)$  é invariante sob transformações rígidas.*

**Prova:**

*Ver Apêndice E.*

### 3.8 Manipulações Locais

A capacidade de manipulações locais está intimamente ligada ao intervalo de influência de cada parâmetro de ajuste. Diz-se que a manipulação é global quando a modificação de qualquer parâmetro de ajuste gera uma modificação em todos os segmentos da curva. Por outro lado, diz-se que a manipulação é local (exemplo na Figura 3.1) quando

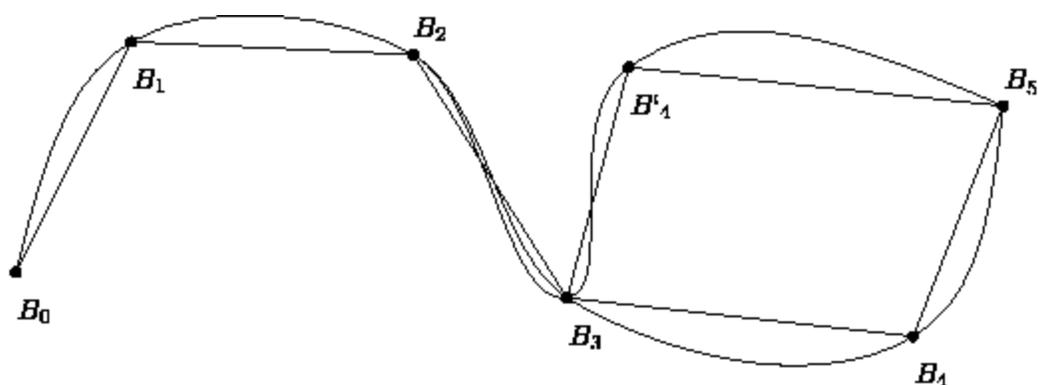


Figura 3.1: Manipulação local de uma spline.

a modificação de cada parâmetro de ajuste gera uma modificação em um número fixo de segmentos da curva (mas não todos).

A manipulação local é garantida fazendo com que  $C$  seja composta de segmentos  $C_i$ . Entretanto, a manipulação local de  $C$  só será possível se o método de geração de curvas utilizado para modelar  $PE$  permitir manipulações locais.

### 3.9 Aproximação/Interpolação

Considerando um conjunto de pontos dado, diz-se que uma curva interpola estes pontos se a curva passa por todos estes pontos (curva  $C_1$  da Figura 3.2). Caso a curva utilize estes pontos apenas como referência de regiões pelas quais deveria passar, sem entretanto interpolá-los, diz-se que a curva aproxima estes pontos (curva  $C_2$  da Figura 3.2). Neste sentido, o método de Lagrange é um método de interpolação de um conjunto de pontos dado, enquanto o método de quadrados mínimos é um método de aproximação de um conjunto de pontos dado.

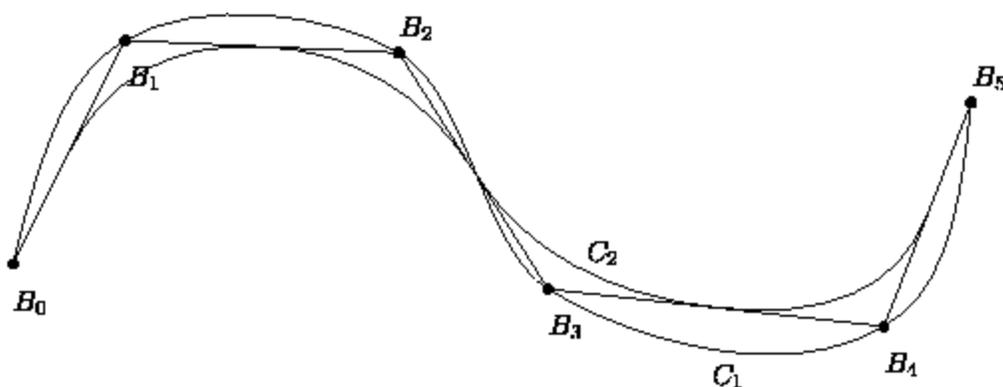


Figura 3.2: Aproximação e interpolação de pontos dados.

Para que a C-spline proposta na equação (3.1) interpole todos os pontos dados, é necessário que a seguinte condição seja válida

$$\vec{R}_i(t_j) = C_i(t_j) - PE_i(t_j), j = i, i - 1 \quad (3.6)$$

### 3.10 Refinamentos

Diz-se que uma curva pode ser refinada se o método de geração utilizado para obtê-la permite realizar modificações em apenas algumas regiões da curva, mantendo as outras regiões inalteradas. Para que um método de geração de curvas permita o refinamento das curvas por ele geradas, este método de geração de curvas deve possuir algoritmos de subdivisão, possibilitando "isolar" a região que deve ser modificada da região que deve permanecer inalterada. A maioria das splines apresenta algoritmos de subdivisão, por exemplo B-splines,  $\beta$ -splines e mesmo as curvas de Bézier.

A C-spline proposta na equação (3.1) possui algoritmo de subdivisão desde que o método de geração de curvas utilizado para modelar  $PE$  possua um algoritmo de subdivisão que permita escrever a reparametrização da  $PE$  em função da parametrização original desta  $PE$ .

## Capítulo 4

# Uma Implementação Exploratória

A solução proposta para permitir uma interação mais semântica e menos sintática entre projetista e método de geração de curvas, mostrada na Figura 1.1, estabelece a inclusão de uma camada de abstração chamada de Interface "Esperta" (Capítulo 1). Entretanto, já no instante em que esta camada de abstração foi proposta, notou-se a grande interdependência entre ela e o método de geração de curvas utilizado.

Ao considerar o tipo de interação que se deseja disponibilizar para o projetista é possível definir as possíveis operações sobre a curva obtida. A partir dessas operações, deve-se buscar o método de geração de curvas que possua parâmetros de ajuste mais convenientes. Definido o método de geração de curvas, pode-se projetar uma Interface "Esperta" que seja capaz de arbitrar um conjunto de valores para os parâmetros de ajuste.

Tal Interface "Esperta" deve possuir conhecimento sintático sobre os parâmetros de ajuste do método de geração de curvas (por exemplo, o intervalo de valores válidos). Como é ela quem escolhe, de acordo com a interação solicitada pelo projetista, os valores exatos para os parâmetros de ajuste do método de geração de curvas, ela deve possuir também conhecimento semântico sobre as interações disponibilizadas para o projetista.

Pelo que foi exposto, conclui-se que a Interface "Esperta" acaba funcionando como analisador semântico e gerador sintático, recebendo informações semânticas do projetista e convertendo-as em informações sintaticamente corretas a serem utilizadas pelo método de geração de curvas. Devido à natureza, muitas vezes inexata, das informações semânticas providas pelos projetistas, propõe-se incluir na Interface "Esperta" um componente de inferência baseado em conjuntos nebulosos.

Este capítulo apresenta uma implementação exploratória desta Interface "Esperta".

## 4.1 Um sistema de geração de curvas adequadas

Considerando o que foi exposto no Capítulo 3, o algoritmo indicado na Figura 4.1 mostra a forma como se pretende realizar a implementação exploratória.

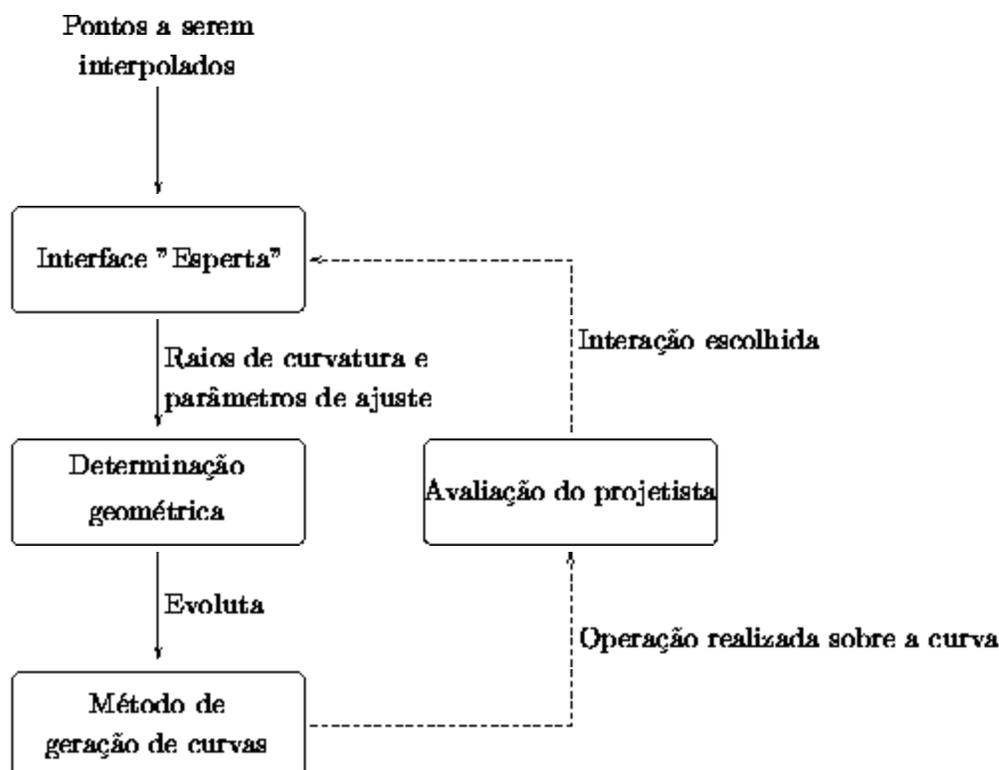


Figura 4.1: Algoritmo da implementação utilizada.

Sendo esta uma implementação exploratória, buscou-se implementar os componentes com as seguintes características:

- **interação:** o projetista pode solicitar que lhe seja fornecida uma nova curva mais adequada localmente a um dos pontos dados;
- **operação:** quando a interação for solicitada, deve ser fornecida ao projetista uma outra curva com modificações apenas dos valores dos parâmetros de ajuste associados ao ponto dado em questão;
- **parâmetros de ajuste:** como se está associando adequabilidade a variações de curvatura, é desejável que os parâmetros de ajuste possam modelar modificações locais de curvatura;
- **método de geração de curvas:** será utilizada a C-spline, pois permite a manipulação local da curvatura nos pontos dados; e

- **Interface "Esperta"**: a fim de permitir a manipulação dos parâmetros de ajuste, optou-se pela utilização de conjuntos nebulosos para modelar os processos de escolha de novos valores para os parâmetros de ajuste do método de geração de curvas adotado.

## 4.2 Método de geração de curvas

Observando a equação das C-splines - equação (3.1) - conclui-se que implementar a representação de curvas proposta significa definir uma forma de modelar a  $PE$ . Assim, a implementação do método de geração de curvas discutida nesta seção é apenas uma das implementações possíveis.

Considerando o problema enunciado no Capítulo 1

"Dada uma seqüência de  $N$  pontos  $P_{i-1}, 1 \leq i \leq N$  com o respectivo grau de adequabilidade desejado de uma curva plana interpolante, ou seja,  $S = ((P_0, bicuda), (P_1, suave), \dots, (P_{N-1}, bicuda))$ , determine a curva que melhor se aproxime da intenção do projetista",

descreve-se na Seção 4.2.1 uma forma de determinação da curva que melhor se aproxima à intenção do projetista.

### 4.2.1 Pseudo-evoluta

A  $PE$  é representada por um conjunto de curvas de Bézier ( $PE_i$ ) associadas aos polígonos de controle ( $BP_i$ ). Baseado nos  $N$  pontos de  $S$ , os polígonos de Bézier  $BP_i$ ,  $1 \leq i \leq N$  para curvas fechadas ou  $1 \leq i < N$  para curvas abertas, são determinados, cada um associado a um segmento  $C_i$  da curva  $C$ . A opção pelas curvas de Bézier foi baseada na facilidade de controle de algumas das características geométricas, a saber:

- a posição dos pontos extremos da curva de Bézier, que permite a determinação do módulo dos raios-vetores dos pontos em  $S$ ;
  - o módulo e a direção dos vetores tangentes dos pontos extremos da curva de Bézier, que permitem a determinação das direções dos raios-vetores referentes aos pontos em  $S$  e facilitam a garantia de  $GC^1$  e  $GC^2$  conforme mostram as equações (A.2) e (3.5);
  - a convexidade da curva garantida pela convexidade do polígono de controle, que assegura que os vetores derivadas primeira e segunda não sejam nulos em ponto algum;
- e



$$B_{i,j} = P_i - \alpha_{i,j} \vec{R}_i(t_i), j = n-1, n \quad (4.2)$$

**Caso 2:**  $\|R_i(t_{i-1})\| < \|R_i(t_i)\|, t_i < t_{i-1}$

Os pontos de controle de  $BP_i$  são dados por (Figura 4.3):

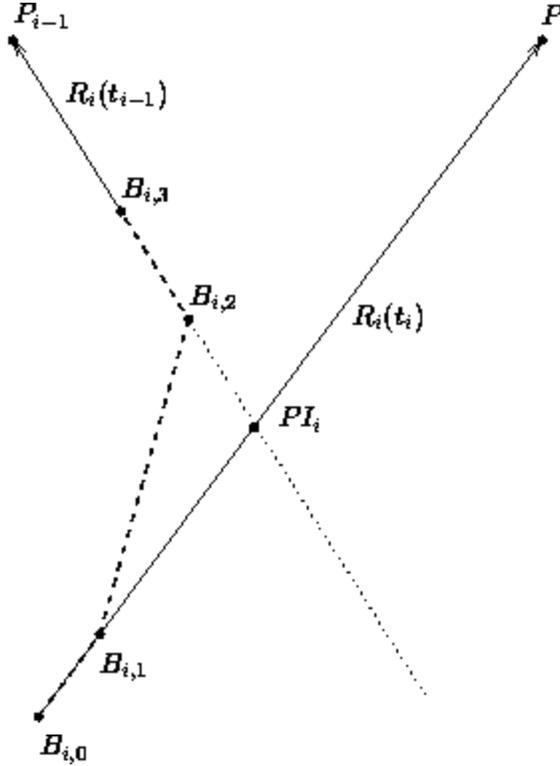


Figura 4.3: Parâmetros utilizados na modelagem da  $PE$  no Caso 2.

$$B_{i,j} = P_{i-1} - \alpha_{i,j} \vec{R}_i(t_{i-1}), j = n-1, n; e \quad (4.3)$$

$$B_{i,j} = P_i - \alpha_{i,j} \vec{R}_i(t_i), j = 0, 1 \quad (4.4)$$

Cabe ressaltar que a direção de parametrização da curva de Bézier é muito importante, sendo que as únicas direções de parametrização aceitas são as expressas pelos equacionamentos apresentados nas equações (4.1), (4.2), (4.3), e (4.4). Tais direções de parametrização das curvas de Bézier são as únicas que garantem que o segmento de curva  $C_i$  não apresentará auto-intersecção

Nas seções seguintes serão discutidas as distintas configurações dos pontos de controle do polígono  $BP_i$  para obter C-splines com:

1.  $C^0$ ;
2. polígono de Bézier  $BP_i$  convexo;
3.  $GC^1$ ; e
4.  $GC^2$ .

#### 4.2.2 Continuidade $C^0$

Para que a C-spline apresente  $C^0$ , a equação (3.6) deve ser satisfeita. Em termos do polígono de Bézier  $BP_i$  isto significa que:

$$\begin{aligned}\alpha_{i,0} &= 1 \\ \alpha_{i,n} &= 1.\end{aligned}$$

#### 4.2.3 Polígono de Bézier convexo

Para que a C-spline possua polígonos de Bézier convexos, os valores de  $\alpha_{i,1}$  e  $\alpha_{i,n-1}$  devem ser dados por (onde  $PI_i$  é o ponto de interseção das retas suportes dos raios-vetores  $\vec{R}_i(t_{i-1})$  e  $\vec{R}_i(t_i)$ ):

**Caso 1:**  $\|R_i(t_{i-1})\| > \|R_i(t_i)\|, t_i > t_{i-1}$

- $\alpha_{i,1} \in ]\alpha_{i,\min}, 1[$ ,  $\alpha_{i,\min} = \frac{\|P_{i-1} - PI_i\|}{\|\vec{R}_i(t_{i-1})\|} < 1$ ; e
- $\alpha_{i,n-1} \in ]1, \alpha_{i,\max}[$ ,  $\alpha_{i,\max} = \frac{\|P_i - PI_i\|}{\|\vec{R}_i(t_i)\|} > 1$ .

Sob tais circunstâncias, os módulos dos raios-vetores estão compreendidos nos seguintes intervalos:

- $\|P_{i-1} - PI_i\| < \|\vec{R}_i(t_{i-1})\| < \infty$
- $0 < \|\vec{R}_i(t_i)\| < \|P_i - PI_i\|$ 
  - se  $\|P_{i-1} - PI_i\| \leq \|P_i - PI_i\|$  então  $0 < T_i < \infty$
  - se  $\|P_i - PI_i\| < \|P_{i-1} - PI_i\|$  então  $\frac{\|P_{i-1} - PI_i\| - \|P_i - PI_i\|}{n} < T_i < \infty$

**Caso 2:**  $\|R_i(t_{i-1})\| < \|R_i(t_i)\|, t_i < t_{i-1}$

- $\alpha_{i,1} \in ]1, \alpha_{i,\max}[$ ,  $\alpha_{i,\max} = \frac{\|P_{i-1} - PI_i\|}{\|\vec{R}_i(t_{i-1})\|} > 1$ ; e

- $\alpha_{i,n-1} \in ]\alpha_{i,\min}, 1[$ ,  $\alpha_{i,\min} = \frac{\|\vec{R}_i(t_i)\|}{\|\vec{R}_i(t_i)\|} < 1$ .

Sob tais circunstâncias, os módulos dos raios-vetores estão compreendidos nos seguintes intervalos:

- $\|P_i - PI_i\| < \|\vec{R}_i(t_i)\| < \infty$
- $0 < \|\vec{R}_i(t_{i-1})\| < \|P_{i-1} - PI_i\|$ 
  - se  $\|P_{i-1} - PI_i\| < \|P_i - PI_i\|$  então  $\frac{\|P_i - PI_i\| - \|P_{i-1} - PI_i\|}{n} < T_i < \infty$
  - se  $\|P_i - PI_i\| \leq \|P_{i-1} - PI_i\|$  então  $0 < T_i < \infty$

#### 4.2.4 Continuidade $GC^1$

Para que a C-spline apresente  $GC^1$ , a Proposição 4 deve ser satisfeita. Em termos do polígono de Bézier  $BP_i$  isto significa que:

**Caso 1:**  $\|R_i(t_{i-1})\| > \|R_i(t_i)\|$ ,  $t_i > t_{i-1}$

- em  $P_{i-1}$

$$\|B_{i,1} - B_{i,0}\| = T_i$$

- em  $P_i$

$$\|B_{i,n} - B_{i,n-1}\| = T_i$$

**Caso 2:**  $\|R_i(t_{i-1})\| < \|R_i(t_i)\|$ ,  $t_i < t_{i-1}$

- em  $P_{i-1}$

$$\|B_{i,n} - B_{i,n-1}\| = T_i$$

- em  $P_i$

$$\|B_{i,1} - B_{i,0}\| = T_i$$

sendo que

$$T_i = \frac{\|\|\vec{R}_i(t_i)\| - \|\vec{R}_i(t_{i-1})\|\|}{n} \quad (4.5)$$

Observando-se estas condições, conclui-se que só será possível garantir  $GC^1$  permitindo manipulações sobre os pontos de controle se  $n > 2$ . Portanto, escolheu-se  $n = 3$  e, de agora em diante, estar-se-á trabalhando com curvas de Bézier cúbicas.

### 4.2.5 Continuidade $GC^2$

A Proposição 9 irá mostrar que não é possível realizar manipulações para obter  $GC^2$  utilizando-se a Proposição 3 e curvas de Bézier de grau  $n = 3$ . Para tanto, utilizar-se-á a seguinte proposição auxiliar.

**Proposição 8** *Para que a Proposição 3 seja válida, os pontos de controle  $B_{i,0}$ ,  $B_{i,1}$ ,  $B_{i,n-1}$ , e  $B_{i,n}$  devem satisfazer:*

**Caso 1:**  $\|R_i(t_{i-1})\| > \|R_i(t_i)\|, t_i > t_{i-1}$

$$B_{i,1} = PI_i + \frac{PI_i - P_{i-1}}{\|PI_i - P_{i-1}\|} (D_i + T_i) \quad (4.6)$$

$$B_{i,0} = B_{i,1} + \frac{PI_i - P_{i-1}}{\|PI_i - P_{i-1}\|} T_i \quad (4.7)$$

$$B_{i,n-1} = PI_i + \frac{P_i - PI_i}{\|P_i - PI_i\|} (D_i + T_i) \quad (4.8)$$

$$B_{i,n} = B_{i,n-1} + \frac{P_i - PI_i}{\|P_i - PI_i\|} T_i \quad (4.9)$$

onde

$$\|P_i - PI_i\| > (D_i + 2T_i)$$

**Caso 2:**  $\|R_i(t_{i-1})\| < \|R_i(t_i)\|, t_i < t_{i-1}$

$$B_{i,1} = PI_i + \frac{PI_i - P_i}{\|PI_i - P_i\|} (D_i + T_i) \quad (4.10)$$

$$B_{i,0} = B_{i,1} + \frac{PI_i - P_i}{\|PI_i - P_i\|} T_i \quad (4.11)$$

$$B_{i,n-1} = PI_i + \frac{P_{i-1} - PI_i}{\|P_{i-1} - PI_i\|} (D_i + T_i) \quad (4.12)$$

$$B_{i,n} = B_{i,n-1} + \frac{P_{i-1} - PI_i}{\|P_{i-1} - PI_i\|} T_i \quad (4.13)$$

onde

$$\|P_{i-1} - PI_i\| > (D_i + 2T_i)$$

Seja  $D_i$  dado por

$$D_i = T_i \cos \sigma_i \frac{1 + \cos \sigma_i}{(\sin \sigma_i)^2}$$

onde  $\sigma_i$  é o ângulo formado pelas retas suporte de  $\vec{R}_i(t_{i-1})$  e  $\vec{R}_i(t_i)$ .

**Prova:**

Ver Apêndice F.

**Proposição 9** *Sejam os pontos de controle dados pela Proposição 8. Sob estas circunstâncias, apenas os seguintes valores de  $T_i$  são possíveis:*

$$T_i = (\|P_i - PI_i\| - \|PI_i - P_{i-1}\|) \frac{1 - (\cos \sigma_i)^2}{2 \cos \sigma_i - 5(\cos \sigma_i)^2 + 7}$$

ou

$$T_i = (\|P_i - PI_i\| - \|PI_i - P_{i-1}\|) \frac{(1 - \cos \sigma_i)}{(1 + \cos \sigma_i)}$$

**Prova:**

Ver Apêndice G.

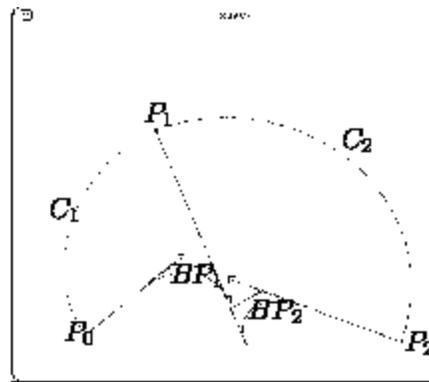


Figura 4.4: Uma C-spline passando pelos pontos  $P_0, P_1, P_2$ .

A Figura 4.4 mostra uma C-spline aberta passando através de três pontos dados  $\{P_0, P_1, P_2\}$  e as correspondentes estimativas da evolvente - PE - (duas curvas cúbicas de Bézier associadas a  $BP_1$  e  $BP_2$ ).

### 4.3 Interface "Esperta"

O equacionamento desenvolvido na Seção 3.1 mostra condições sobre as derivadas da PE e os módulos dos raios-vetores. Entretanto, não há restrições explícitas sobre as

direções dos raios-vetores. Uma vez que há este grau de liberdade e não se consegue um equacionamento para determinar explicitamente apenas um valor, mas sim um intervalo de valores válidos para tais direções, decidiu-se fuzzyficar justamente estes parâmetros de ajuste: as direções dos raios-vetores. Portanto, a Interface "Esperta" irá operar sobre os valores a serem atribuídos a estes parâmetros de ajuste.

Na verdade, os processos de fuzzyficação e defuzzyficação das direções de um raio-vetor executados pela Interface "Esperta" visam a redução do espaço de busca de boas direções deste raio-vetor, facilitando assim a avaliação de adequabilidade por parte do projetista.

Discutir a implementação da Interface "Esperta" significa discutir a implementação dos processos de fuzzyficação e defuzzyficação utilizados, bem como as justificativas para as escolhas adotadas.

### 4.3.1 Fuzzyficação

Adequabilidade é um conceito muito vago. No que diz respeito a curvas, pode-se dizer que uma curva apresenta, por exemplo, um comportamento ondulante adequado, não ondulante adequado ou ainda uma mudança de concavidade de forma adequada. Todos estes (e outros) comportamentos adequados formam, em conjunto, o conceito de adequabilidade de curvas. No presente caso, reduziu-se o problema inicial (Capítulo 1) à construção de uma curva adequada a partir de um conjunto de curva cúbicas de Bézier *PE* (Seção 4.2.1). Os pontos de controle das curvas de Bézier são determinados a partir de:

- pontos em  $S$ ;
- direções dos raios-vetores associados a estes pontos; e
- $\alpha_j$ .

Os pontos em  $S$  são dados pelo projetista, portanto pode-se apenas manipular as direções dos raios-vetores e os  $\alpha_j$  para obter a curva adequada desejada. Entretanto, os  $\alpha_j$  são utilizados para garantir  $GC^1$ . Logo, pode-se fuzzyficar o conceito de adequabilidade de curvas pela atribuição de graus de pertinência aos valores das direções dos raios-vetores.

A fim de reduzir o espaço de busca para "bons" valores das direções dos raios-vetores, fuzzyfica-se cada comportamento adequado (e portanto o conceito de adequabilidade) pela atribuição de grau de pertinência a estas direções. A direção de um raio-vetor é representada

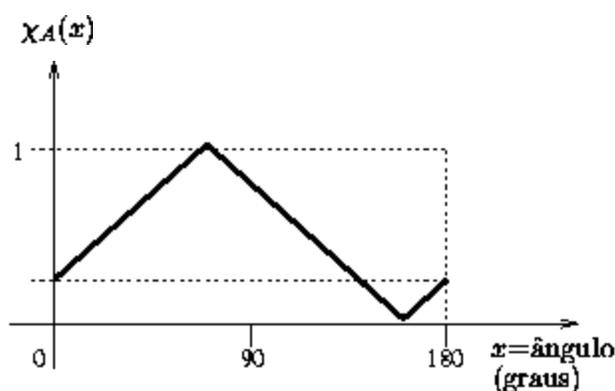


Figura 4.5: Um conjunto nebuloso para o conceito de adequabilidade de acordo com  $G_1/G_2$ .

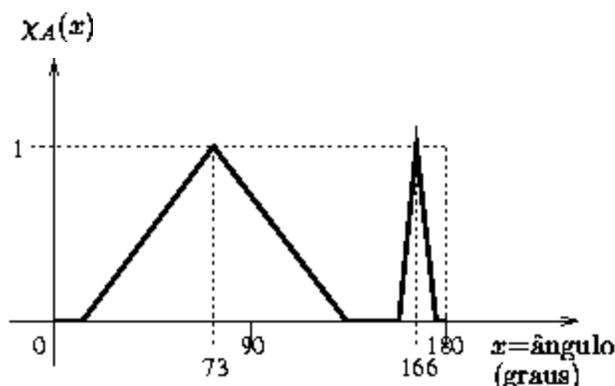


Figura 4.6: Um conjunto nebuloso para o conceito de adequabilidade de acordo com  $G_3$ .

por um ângulo, que varia de 0 a 180 graus, entre o raio-vetor e uma linha de referência. Sem perda de generalidade esta linha de referência é tomada como sendo o eixo  $x$  do sistema de coordenadas adotado. O intervalo  $[0, 180]$  pode ser utilizado, ao invés de  $[0, 360]$ , porque apenas a direção (e não a orientação ou sentido) do raio-vetor é necessária na determinação dos polígonos de controle das curvas de Bézier, para cada  $C_i$ , uma vez que tal determinação de polígonos é feita em função do ponto de intersecção entre as retas suportes dos raios-vetores associados a  $C_i$ .

Pela atribuição do grau de pertinência (fuzzyficação) às direções dos raios-vetores, acabou-se por definir entidades então denominadas "regiões de perigo" ("danger zones") que são caracterizadas por evitar os valores de direção do raio-vetor que levariam a curvas mal comportadas. As regiões de perigo permitem formalizar e quantificar efetivamente o conceito de adequabilidade de uma curva expresso pelo projetista. A partir destas regiões de perigo é possível perceber o intervalo de valores que as direções de cada raio-vetor podem/devem ou não assumir. Em termos de grau de pertinência, pode-se dizer que as direções de raios-vetores que estão nas regiões de perigo apresentam um baixo grau de pertinência a um determinado

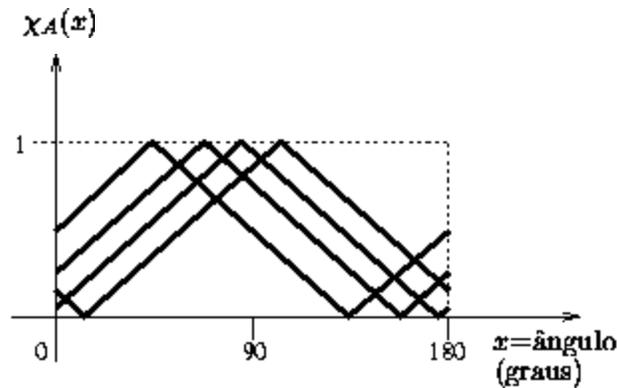


Figura 4.7: Quatro conjuntos nebulosos representando as condições  $G_1$  e  $G_2$ .

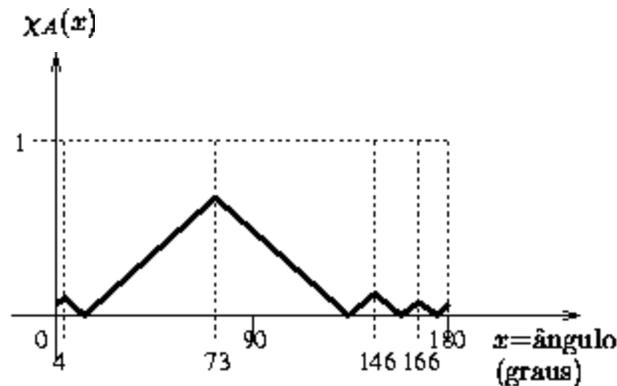


Figura 4.8: O conjunto nebuloso que representa o conceito *ondulação adequada* para  $P_i$ .

conceito de adequabilidade de uma curva.

As regiões de perigo, dentro das quais as direções de um raio-vetor não deveriam assumir valores, são determinadas por algumas propriedades geométricas que as curvas cúbicas de Bézier devem satisfazer. Estas propriedades geométricas irão permitir que as curvas de Bézier resultantes estejam sempre bem definidas. São exemplos de condições que garantem uma "boa" definição das curvas de Bézier:

- $G_1$  (condição de não colinearidade):  $\vec{R}_i \neq \beta_j(P_i - P_j)$ ,  $\beta_j \neq 0$ ,  $j = i-1, i+1$ . Se esta condição falhar, o polígono de controle da curva de Bézier  $C_i$  (e portanto  $C_i$ ) poderá tender a uma reta;
- $G_2$  (condição de não paralelismo):  $\vec{R}_i \neq \gamma_j(\vec{R}_j)$ ,  $\gamma_j \neq 0$ ,  $j = i-1, i+1$ . Se esta condição falhar, o polígono de controle da curva de Bézier  $C_i$  (e portanto  $C_i$ ) não poderá ser definido. Isto porque a intersecção entre as retas suportes dos raios-vetores associados à curva  $C_i$  acontecerá no infinito;
- $G_3$  (condição de não-intersecção):  $\vec{R}_i \neq \delta_{i-1}(P_i - P_{i-1}) + \epsilon_{i+1}(\vec{R}_{i+1})$ ,  $\vec{R}_i \neq \delta_{i+1}(P_i -$

$P_{i+1}) + \epsilon_{i-1} (\overrightarrow{R_{i-1}})$ ,  $\delta_j, \epsilon_j > 0, j = i - 1, i + 1$ . Esta condição controla mudanças de concavidade e oscilações;

- $G_{31}$  (condição de ausência de pontos de inflexão): Se a reta que liga o ponto de intersecção  $I_{i-1}$  (entre as retas suportes dos raios-vetores  $R_{i-1}$  e  $R_i$ ) e o ponto de intersecção  $I_i$  (entre as retas suportes dos raios-vetores  $R_i$  e  $R_{i+1}$ ) cruza o casco convexo de  $S$  um número par de vezes; e
- $G_{32}$  (condição de ocorrência de pontos de inflexão): Se a reta que liga o ponto de intersecção  $I_{i-1}$  (entre as retas suportes dos raios-vetores  $R_{i-1}$  e  $R_i$ ) e o ponto de intersecção  $I_i$  (entre as retas suportes dos raios-vetores  $R_i$  e  $R_{i+1}$ ) cruza o casco convexo de  $S$  um número ímpar de vezes.

Nota-se que direções de raios-vetores próximas àquelas que determinam a condição  $G_2$  causam oscilações. Portanto, estes valores podem ser explorados quando se desejar oscilações.

Uma vez estabelecidas as condições das "regiões de perigo" pode-se definir, para cada ponto em  $S$ , conjuntos nebulosos no intervalo  $[0, 180]$  a fim de classificar os valores das direções dos raios-vetores:

- Para  $G_1$ : o ângulo  $\theta_c$  que satisfaz tal condição deve ter grau de pertinência zero e o ângulo  $\theta_c + \Delta\theta$  deve ter grau de pertinência unitário ao conceito de adequabilidade. Um valor razoável para  $\Delta\theta$  é 90. Os outros ângulos devem apresentar graus de pertinência variando linearmente de um a zero, como mostrado na Figura 4.5;
- Para  $G_2$ : a classificação é similar àquela da condição  $G_1$  (Figura 4.5); e
- Para  $G_3$ : os ângulos das "regiões de perigo" têm grau de pertinência nulo enquanto os ângulos "mais distantes" das "regiões de perigo" têm grau de pertinência unitário ao conceito de adequabilidade. Os outros ângulos têm graus de pertinência variando linearmente de zero a um, como mostrado na Figura 4.6.

A partir destes conjuntos nebulosos pode-se descrever alguns comportamentos adequados:

- Comportamento ondulante adequado: para um ponto  $P_i$  em  $S$  há dois pontos vizinhos,  $P_{i-1}$  e  $P_{i+1}$ . Os pares  $(P_{i-1}, P_i)$  e  $(P_i, P_{i+1})$  devem satisfazer a condição de não colinearidade ( $G_1$ ) e os respectivos pares de raios-vetores  $(R_{i-1}, R_i)$  e  $(R_i, R_{i+1})$ , devem satisfazer a condição de não paralelismo ( $G_2$ ). Portanto, quatro conjuntos nebulosos

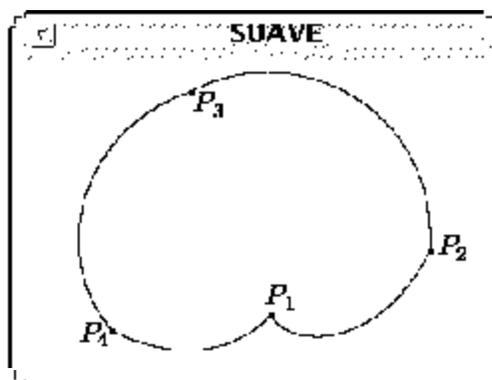


Figura 4.9: C-spline interpolante passando pelos pontos dados.

estarão definidos (Figura 4.7). Como as quatro condições devem prevalecer simultaneamente (os quatro valores que invalidam as quatro condições não podem ocorrer de forma alguma), optou-se por realizar uma operação E entre estes conjuntos nebulosos a fim de obter o conjunto nebuloso  $F_1$  (Figura 4.8); e

- Comportamento de mudança de concavidade de forma adequada: para um ponto de conexão  $P_{i-1}$  entre um par consecutivo de segmentos de curva ( $C_{i-1}$  e  $C_i$ ) há uma condição de não intersecção ( $G_{31}$  ou  $G_{32}$ ). O conjunto nebuloso  $F_2$ , na Figura 4.6, representa este comportamento.

### 4.3.2 Defuzzyficação

Para que se possa traçar uma curva adequada, necessita-se de valores exatos (*crisp*) para as direções dos raios-vetores. Portanto, para cada tipo de comportamento adequado deve-se defuzzyficar o conjunto nebuloso correspondente à aplicação deste conceito ao segmento de curva (ou junção) em questão. Há várias técnicas de defuzzyficação [12]. Como se procura técnicas de defuzzyficação que permitam interações com os projetistas, seria desejável que estas técnicas de defuzzyficação satisfizessem as seguintes condições:

- calcular mais de um valor exato (*crisp*), permitindo assim que o usuário selecione interativamente a curva mais adequada; e
- calcular valores exatos não muito próximos uns dos outros, tornando mais fácil ao projetista perceber as diferenças entre as diversas possibilidades.

Esta é uma tentativa de se permitir que conceitos pouco precisos sejam disponibilizados aos projetistas. Entretanto projetistas que tenham uma melhor noção do comportamento

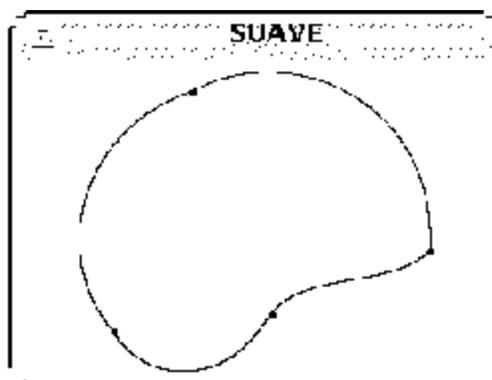


Figura 4.10: Uma variante da Figura 4.9 com  $R_1 = 4$ .

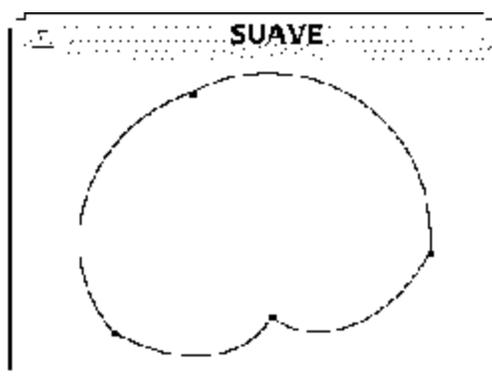


Figura 4.11: Uma variante da Figura 4.9 com  $R_1 = 73$ .

desejado podem obter situações com apenas um valor exato, ou até sem qualquer valor exato (quando não há solução para o problema).

Para que se possa alcançar as características acima, definiu-se uma estratégia de defuzzificação que escolhe pares ordenados que são máximos locais,  $M_i, 1 \leq i \leq k$ , do conjunto nebuloso  $F_k$ . O projetista irá então escolher um destes pares baseado no próprio conceito subjetivo de adequabilidade.

Como exemplo, aplica-se, agora, esta técnica de defuzzificação ao conjunto nebuloso  $F_1$  mostrado na Figura 4.8. Este conjunto nebuloso expressa o comportamento ondulante adequado de forma local ao ponto  $P_1$  mostrado na Figura 4.9. Os máximos locais,  $M_1 = (4; 0.10)$ ,  $M_2 = (73; 0.67)$ ,  $M_3 = (146; 0.13)$  e  $M_4 = (166; 0.09)$ , foram fornecidos e as curvas correspondentes são mostradas nas Figuras 4.10, 4.11, 4.12 e 4.13, respectivamente.

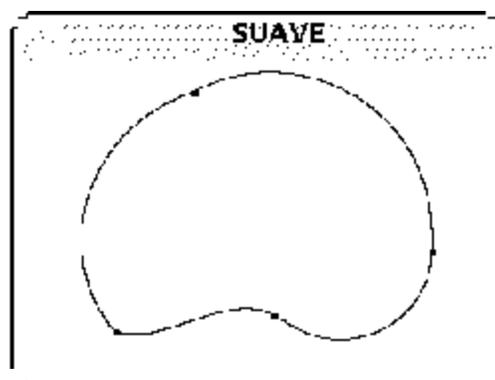


Figura 4.12: Uma variante da Figura 4.9 com  $R_1 = 146$ .

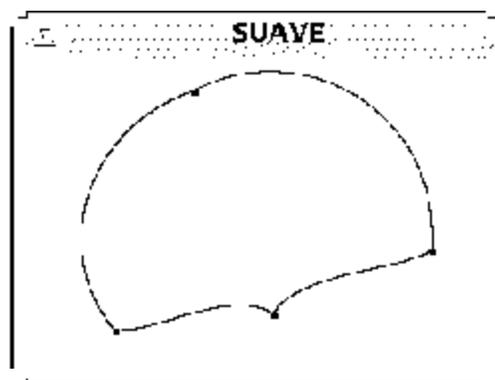


Figura 4.13: Uma variante da Figura 4.9 com  $R_1 = 166$ .

# Capítulo 5

## Resultados

Este capítulo mostra os resultados obtidos a partir de uma aplicação simples que implementa uma Interface Esperta para C-splines. As figuras mostradas neste Capítulo adotarão a seguinte convenção:

- ponto a ser interpolado: pequeno círculo;
- direção do raio-vetor associado ao ponto a ser interpolado: reta entre o respectivo círculo e um quadrado; e
- *PE*: curvas de Bézier mostradas ao lado dos polígonos de Bézier (em retas traçadas).

Os resultados serão divididos em dois grupos, a saber:

- resultados geométricos (Seção 5.1); e
- resultados utilizando Interface Esperta (Seção 5.2).

### 5.1 Resultados Geométricos

No que diz respeito aos resultados geométricos, a Figura 5.1 mostra direções de raios-vetores que não são ortogonais à C-spline, enquanto a Figura 5.2 mostra direções de raios-vetores que são ortogonais à C-spline. Destaque-se a importância desta condição, uma vez que ela é utilizada para obtenção de curvas  $GC^1$ .

Por uma questão de clareza, a *PE* será omitida nas figuras subseqüentes.

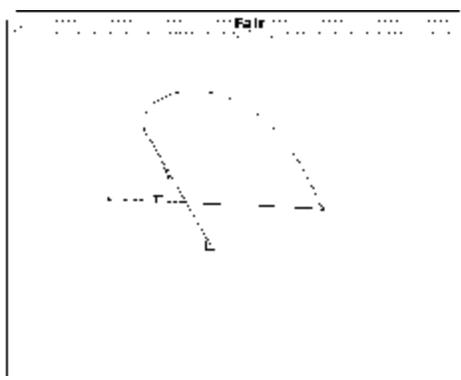


Figura 5.1: C-spline não ortogonal às direções dos raios-vetores.

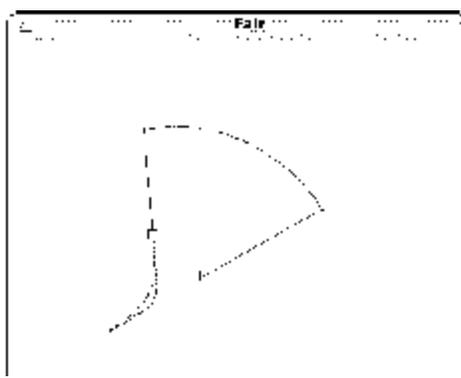


Figura 5.2: C-spline ortogonal às direções dos raios-vetores.

## 5.2 Resultados utilizando Interface "Esperta"

Nesta seção serão mostrados resultados obtidos pela implementação da Interface "Esperta" descrita na Seção 4.3. Note-se que esta Interface "Esperta" não foi projetada para trabalhar em conjunto com as condições de  $G^1$ .

Veja-se como tal Interface "Esperta" se comporta com curvas abertas. A Tabela 5.1 mostra as coordenadas dos pontos a serem interpolados nas Figuras 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8.

A Figura 5.3 mostra os pontos interpolados segundo direções iniciais fornecidas pelo projetista.

Ponto	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
x	100	200	300	400	500	600
y	100	200	100	200	100	200

Tabela 5.1: Coordenadas do primeiro conjunto de pontos a serem interpolados.

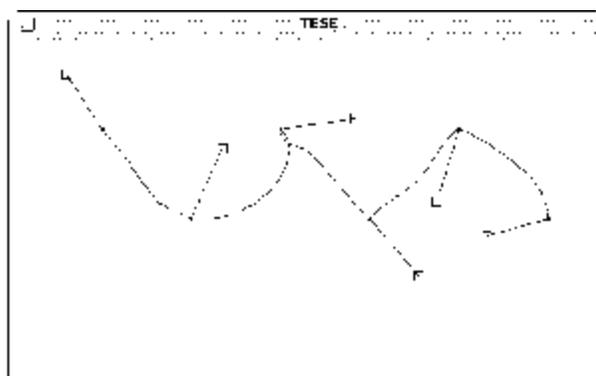


Figura 5.3: C-spline interpolando pontos da Tabela 5.1 com direções fornecidas pelo projetista.

Começando por  $P_1$  vai-se solicitar novas curvas e escolher a mais adequada. Em seguida repetir-se-á o processo para  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$ ,  $P_5$  e  $P_6$ , um por vez. A este processo damos o nome de avaliação sequencial até  $P_4$ . As Figuras 5.4, 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8 mostram alguns dos resultados obtidos pelo processo de avaliação sequencial. O resultado parcial obtido solicitando novas direções para os raios-vetores associados aos pontos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$  está na Figura 5.4. Note-se que como se está manipulando, indiretamente, a direção associada a  $P_4$ , apenas os trechos de C-spline de  $P_3$  a  $P_4$  e de  $P_4$  a  $P_5$  são modificados. Nesta figura vale notar ainda as ondulações nos trechos de  $P_3$  a  $P_4$  e de  $P_4$  a  $P_5$

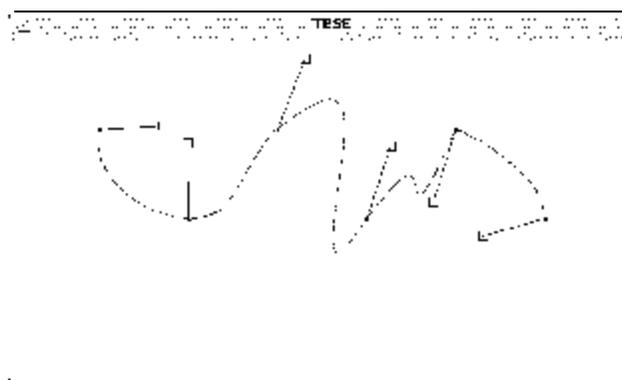


Figura 5.4: C-spline interpolando pontos da Tabela 5.1 com avaliação sequencial até  $P_4$ .

Considerando que os trechos de C-spline de  $P_3$  a  $P_4$  e de  $P_4$  a  $P_5$  da Figura 5.4 não foram adequados, o projetista solicitou nova direção do raio-vetor associado ao ponto  $P_4$ . Esta nova direção está mostrada na Figura 5.5. Perceber, também, que nesta figura a direção do raio-vetor associado ao ponto  $P_5$  também foi modificada.

Finalmente, as Figuras 5.6 e 5.7 mostram dois trechos de C-spline possíveis de  $P_5$  a  $P_6$  (através de modificação da direção do raio-vetor associado ao ponto  $P_6$ ).

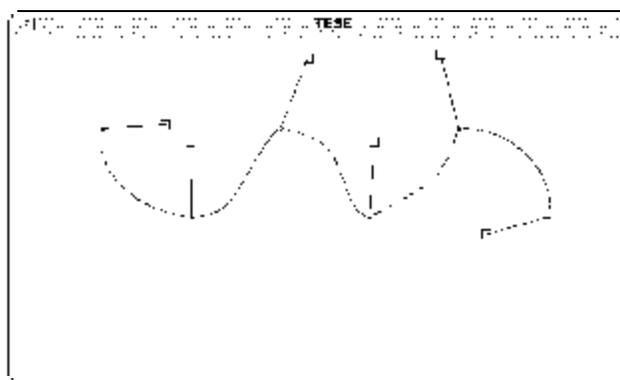


Figura 5.5: C-spline interpolando pontos da Tabela 5.1 com avaliação sequencial até  $P_5$ .

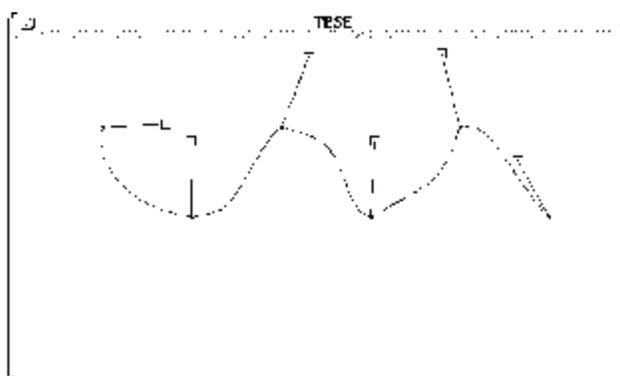


Figura 5.6: C-spline interpolando pontos da Tabela 5.1 com avaliação sequencial até  $P_6$ .

O projetista escolheu a Figura 5.7 como sendo a que apresentou o resultado mais adequado. É interessante perceber que naquela figura as direções dos raios-vetores tendem a ser ortogonais à curva. Isto leva a crer que tal projetista buscava, implicitamente,  $GC^1$ . Note-se que, como os trechos de C-spline gerados não estão de acordo com as condições de  $GC^1$  (expressas pela Proposição 4), matematicamente não há  $GC^1$ , há, sim, uma "aproximação" deste  $GC^1$  matemático.

Como já foi salientado, as Figuras 5.4, 5.5, 5.6 e 5.7 foram geradas através da escolha sequencial das direções dos raios-vetores associados aos pontos da Tabela 5.1. Uma vez que a Interface "Esperta" utiliza os valores atuais destas direções para gerar novas sugestões de curvas, a ordem de escolha das direções a serem modificadas tem grande influência na C-spline final. A Figura 5.8 mostra os pontos da Tabela 5.1 interpolados por outra C-spline, gerada pela escolha não sequencial das direções a serem alteradas. Comparando-se com a Figura 5.7 é perceptível a diferença.

Até agora tratou-se apenas de curvas abertas. Veja-se agora algumas curvas fechadas. A Tabela 5.2 fornece as coordenadas dos pontos a serem interpolados nas Figuras 5.3, 5.10,

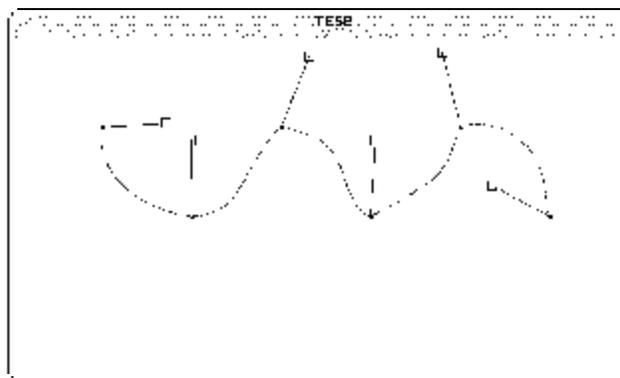


Figura 5.7: C-spline interpolando pontos da Tabela 5.1 com avaliação sequencial - resultado final.

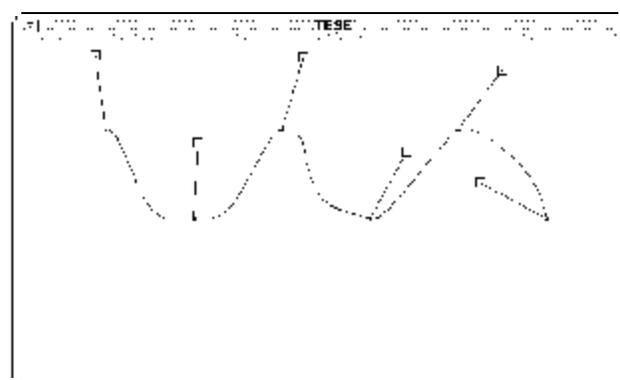


Figura 5.8: C-spline interpolando pontos da Tabela 5.1 sem avaliação sequencial - resultado final.

5.11, 5.12, 5.13, 5.14, 5.15 e 5.16. Utilizou-se pontos com simetria, sendo que resultados com conjunto de pontos não simétricos podem ser vistos em [4].

Para este conjunto de pontos o projetista não forneceu valores iniciais das direções dos raios-vetores associadas aos pontos a serem interpolados. Estes valores foram estimados pelo aplicativo. Devido à simetria dos pontos, estas direções estimadas também foram simétricas. Utilizando tais valores de direção foi traçada a C-spline mostrada na Figura 5.3.

Optou-se novamente por utilizar a estratégia de alteração sequencial das direções. As Figuras 5.10 e 5.11 são resultado desta estratégia aplicada do ponto  $P_1$  ao ponto  $P_8$ .

Ponto	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$
x	225	300	225	200	175	100	175	200
y	175	200	225	300	225	200	175	100

Tabela 5.2: Coordenadas do segundo conjunto de pontos a serem interpolados.

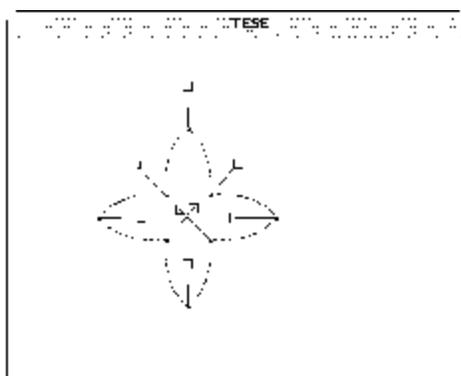


Figura 5.9: C-spline interpolando pontos da Tabela 5.2 com direções iniciais calculadas pela Interface Esperta.

Tais figuras diferem apenas pela direção do raio-vetor associado ao ponto  $P_8$ . Vale a pena notar que, apesar da configuração simétrica dos pontos da Tabela 5.2, em ambas as figuras não foi possível obter uma curva simétrica. Isto ocorre devido à escolha das direções a serem modificadas ser sequencial. Obviamente o projetista poderia continuar avaliando os trechos sequencialmente, na esperança de que o processo convergisse para uma configuração adequada. Entretanto, não há estudo sobre a convergência deste processo, bem como não há qualquer garantia de que a situação de convergência seja uma situação adequada. Note-se que novamente as C-splines das Figuras 5.10 e 5.11 são quase que ortogonais às direções dos raios-vetores associados aos pontos da Tabela 5.2.

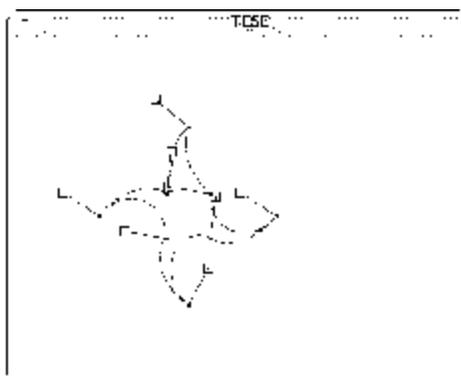


Figura 5.10: C-spline interpolando pontos da Tabela 5.2 com avaliação sequencial - resultado final.

Adote-se agora outra estratégia de alteração das direções dos raios-vetores. Inicialmente alterando apenas as direções dos raios-vetores associados aos pontos  $P_1$ ,  $P_3$ ,  $P_5$  e  $P_7$ . Note-se que ainda assim se está modificando todos os trechos da C-spline.

A alteração destas direções não fornece muitas opções, sendo mostrada na Figura 5.12

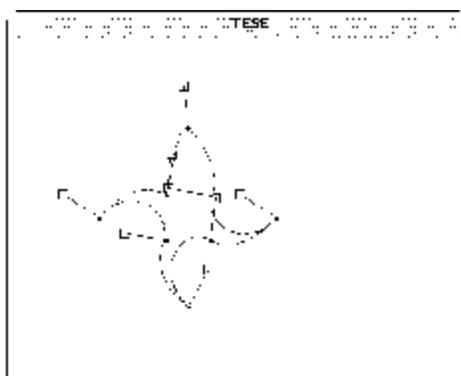


Figura 5.11: C-spline interpolando pontos da Tabela 5.2 com avaliação sequencial - resultado final.

uma possível C-spline resultante deste tipo de alteração. Note-se que neste caso a sequência de alteração das direções dos raios-vetores associados aos pontos  $P_1$ ,  $P_3$ ,  $P_5$  e  $P_7$  é indiferente, uma vez que as direções dos raios-vetores associados aos pontos  $P_2$ ,  $P_4$ ,  $P_6$  e  $P_8$  não foram alteradas.

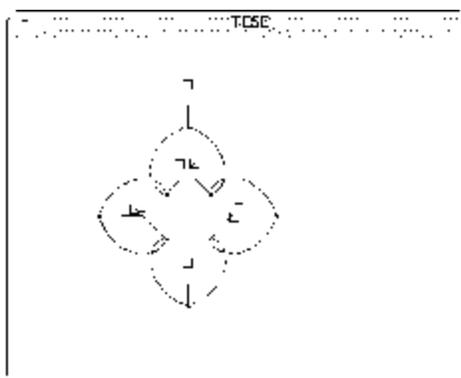


Figura 5.12: C-spline interpolando pontos da Tabela 5.2 alterando apenas as direções dos raios-vetores associados aos pontos  $P_1$ ,  $P_3$ ,  $P_5$  e  $P_7$  - resultado final.

A fim de explorar um pouco mais esta questão da alteração das direções dos raios-vetores vai-se agora modificar apenas as direções dos raios-vetores associados aos pontos  $P_2$ ,  $P_4$ ,  $P_6$  e  $P_8$ . Como já foi dito na Seção 4.3, a Interface "Esperta" fornece até quatro possibilidades para serem avaliadas. Devido à simetria dos pontos, é possível mostrar as quatro possibilidades em apenas uma figura (Figura 5.13)

Agora, caso se deseje obter uma C-spline com simetria, basta escolher uma dentre estas quatro possibilidades e utilizá-la. As Figuras 5.14 e 5.15 mostram a utilização de duas destas possibilidades.

Considerando que a C-spline mostrada na Figura 5.15 esteja mais próxima da C-spline

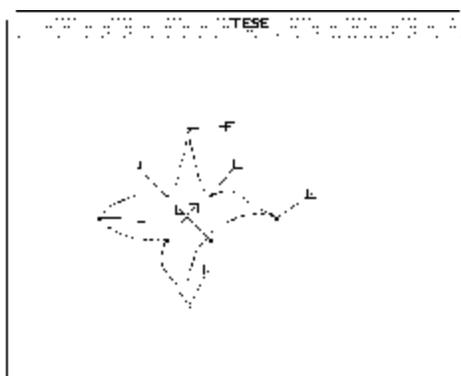


Figura 5.13: C-spline interpolando pontos da Tabela 5.2 alterando apenas as direções dos raios-vetores associados aos pontos  $P_2$ ,  $P_4$ ,  $P_6$  e  $P_8$  - quatro possibilidades.

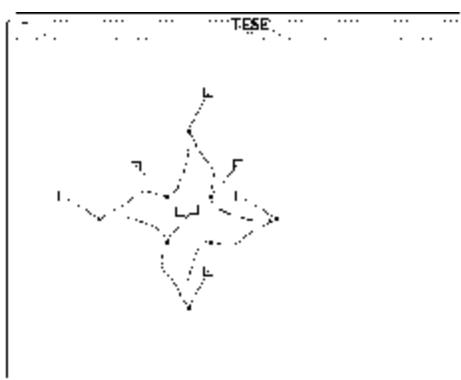


Figura 5.14: C-spline interpolando pontos da Tabela 5.2 alterando apenas as direções dos raios-vetores associados aos pontos  $P_2$ ,  $P_4$ ,  $P_6$  e  $P_8$  - resultado final com simetria.

desejada, foram realizadas mudanças nas direções dos raios-vetores associados aos pontos  $P_1$ ,  $P_3$ ,  $P_5$  e  $P_7$ , fornecendo a C-spline da Figura 5.16. Ressalta-se que as C-splines mostradas nas Figuras 5.15 e 5.16 são bastante parecidas mas não iguais.

Alguns projetistas poderiam contestar a C-spline obtida na Figura 5.16, dizendo que aquela não seria a curva mais adequada, desejar-se-ia uma C-spline mais "suave". Isto é bastante razoável, entretanto, mostra-se a seguir porque a Interface "Esperta" não foi capaz de ajudar neste intuito. Para tanto, realizou-se uma modificação nas coordenadas dos pontos  $P_1$ ,  $P_3$ ,  $P_5$  e  $P_7$  da Tabela 5.2. As novas coordenadas estão na Tabela 5.3.

Ponto	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$
x	250	300	250	200	150	100	150	200
y	150	200	250	300	250	200	150	100

Tabela 5.3: Coordenadas modificadas do segundo conjunto de pontos a serem interpolados.

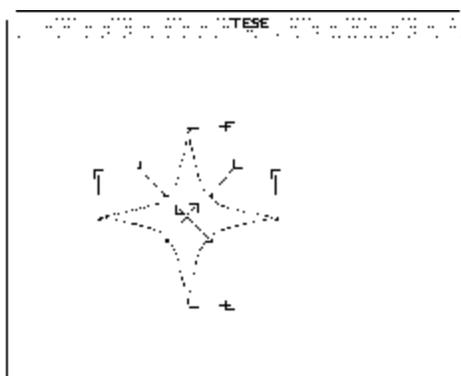


Figura 5.15: C-spline interpolando pontos da Tabela 5.2 alterando apenas as direções dos raios-vetores associados aos pontos  $P_2$ ,  $P_4$ ,  $P_6$  e  $P_8$  - resultado final com simetria.

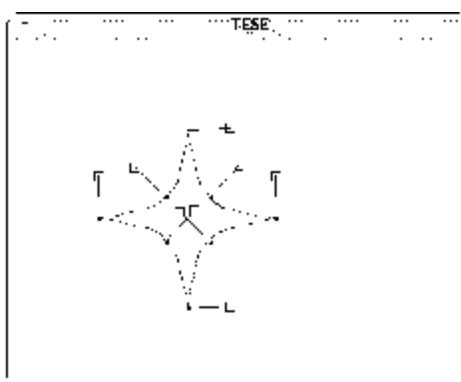


Figura 5.16: "Suavização" da C-spline da Figura 5.15.

Utilizando novamente a estimativa inicial das direções dos raios-vetores fornecida pelo aplicativo, obtém-se a C-spline da Figura 5.17.

As Figuras 5.18, 5.19 e 5.20 mostram algumas das C-splines que podem ser obtidas a partir da C-spline da Figura 5.17. Neste caso vemos C-splines mais "suaves". Isto porque agora os pontos estão mais próximos.

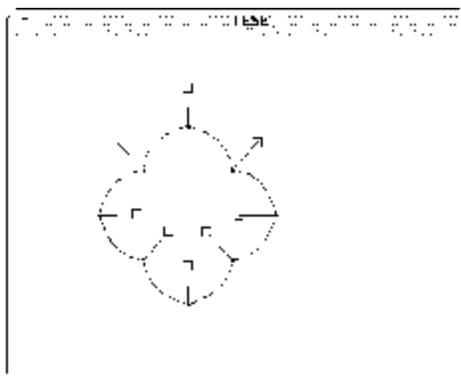


Figura 5.17: C-spline interpolando pontos da Tabela 5.3 com direções calculadas pela aplicação.

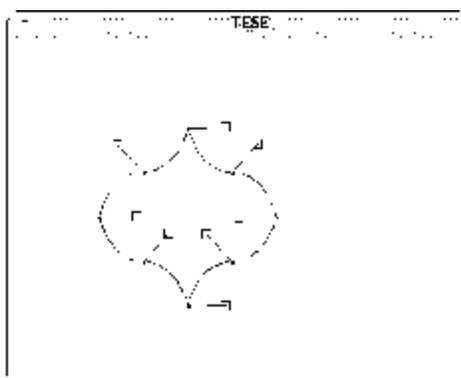


Figura 5.18: "Suavização" da C-spline da Figura 5.17.

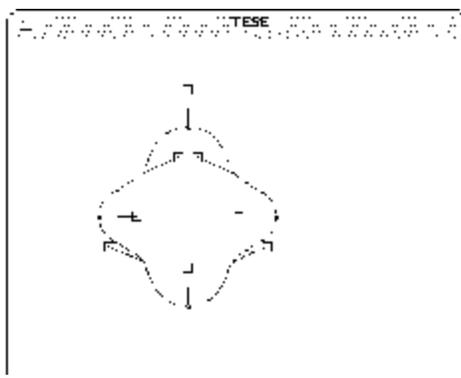


Figura 5.19: "Suavização" da C-spline da Figura 5.17.

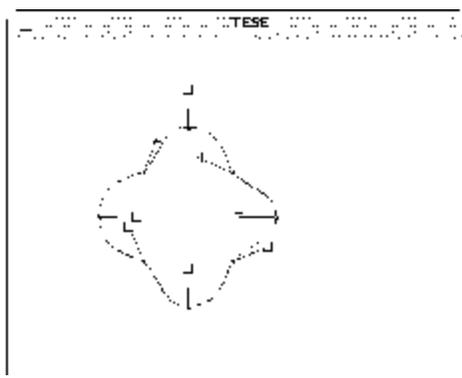


Figura 5.20: "Suavização" da C-spline da Figura 5.17.

## Capítulo 6

### Conclusão e trabalhos futuros

Este trabalho buscou:

- permitir que o projetista de curvas manipule apenas as características geométricas da curva, sem preocupar-se com o método de geração de curvas utilizado; e
- permitir que o projetista escolha interativamente, dentre as diversas curvas sob as condições geométricas dadas, a curva que melhor se adequa à aplicação em questão.

Para tanto foi proposta uma camada de abstração chamada Interface "Esperta", que realiza a interface com o usuário e ajuda-o a encontrar uma curva que o satisfaça. A fim de implementar esta Interface "Esperta" foi necessário:

- propor uma nova classe de splines planas - as C-splines;
- realizar o estudo analítico e geométrico desta nova classe de splines;
- propor formas de modelar o conceito de adequabilidade utilizando os parâmetros de ajuste das C-splines; e
- modelar alguns comportamentos adequados utilizando os conjuntos nebulosos.

A Interface "Esperta" obtida foi bastante simples mas mostrou resultados promissores. Em grande parte dos casos foram necessárias menos de vinte interações com o projetista para obter resultados satisfatórios. Este número de interações pode até ser considerado elevado, entretanto, como a avaliação de adequabilidade é visual, o tempo gasto é bastante baixo.

É interessante salientar alguns pontos fortes da solução proposta. São eles:

- facilidade de utilização do sistema pelo projetista leigo;
- adequação dos resultados a conceitos subjetivos; e
- a solução proposta é independente do método de geração de curvas utilizado (apesar de se acreditar que as C-splines são mais apropriadas à avaliação da adequabilidade através da Interface "Esperta").

Como pontos fracos desta solução pode-se citar:

- dificuldade da implementação da Interface "Esperta" (inerente a sistemas de auxílio a tomada de decisão); e
- necessidade da formalização do conhecimento do especialista.

Para encerrar, sugere-se como trabalhos futuros:

- descrição de outros comportamentos adequados;
- compatibilização da definição de condições geométricas e comportamentos adequados;
- estudo de aplicabilidade da solução proposta aos diversos tipos de projetista; e
- extensão das C-splines para o espaço tridimensional.

## Referências Bibliográficas

- [1] Bartels, R.; Beatty, J. & Barsky R. - An Introduction to Splines for use in Computer Graphics and Geometric Modeling - Morgan Kaufmann, 1987
- [2] Barsky, B. A. - Computer Graphics and Geometric Modeling using Beta-Splines - Springer-Verlag, 1988
- [3] Bernardes, M. C. et al. - An approach to drawing fair plane open curves - Proceedings of the Winter School of Computer Graphics and Visualization'95 - Plzen, Czech Republic (também disponível em: <http://dca.fee.unicamp.br/~mcb/>)
- [4] Bernardes, M. C. et al. - Fuzzy sets on drawing fair plane curves - Proceedings do SIBGRAPI95 - São Carlos, São Paulo, Brasil (também disponível em: <http://dca.fee.unicamp.br/~mcb/>)
- [5] Blanc, C. & Schlick, C. - X-Splines: A Spline Model Designed for the End-User - Proceedings do SIGGRAPH95 - USA (também disponível em <http://...>)
- [6] Böhmer, K. - Spline-Funktionen - Teubner-Studienbücher, 1974
- [7] Bolc, L. & Borowik, P. - Many-valued Logics 1: Theoretical Foundations - Springer-Verlag, 1992
- [8] do Carmo, M. P. - Differential Geometry of Curves and Surfaces - Prentice Hall, 1976
- [9] Farin, G. - Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design - Academic Press, 1990
- [10] Hoschek, J. & Lasser, D. - Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung - B. G. Teubner, 1989
- [11] Hoschek, J. & Lasser, D. - Fundamentals of Computer Aided Geometric Design - A K Peters, 1993
- [12] Kandel, A. - Fuzzy Mathematical Techniques with Applications - Addison-Wesley Publ. Co., 1986

- [13] Kreyszig, E. - *Advanced Engineering Mathematics* - John Wiley & Sons Inc., 1993
- [14] Lee, E. T. Y. - *Choosing nodes in parametric curve interpolation* - *Computer-Aided Design* vol.21 n.6 (1989) - pp.363-370
- [15] Malinowski, G. - *Many-valued Logics* - Clarendon Press, 1993
- [16] Piegl, L. - *Modifying the shape of rational B-splines: Part1: curves* - *Computer-Aided Design* vol.21 n.8 (1989) - pp.509-518
- [17] Pogorelov, A. - *Geometry* - Mir Publishers, 1987
- [18] Rogers, D. F. & Adams J. A. - *Mathematical Elements for Computer Graphics* - McGraw Hill Publishing Company, 1990
- [19] Su Bu-Qing & Liu Ding-Yuan - *Computational Geometry* - Academic Press, 1990
- [20] Zadeh, L. A. - *Fuzzy Sets* - *Information and Control* - vol.8 - pp. 338-353, 1965

## Apêndice A

### Dedução da Condição de Ortogonalidade entre Raios-vetores e a Curva

A fim de garantir a condição:  $C^i(t) \perp PE^i(t)$ , pode-se escrever:

$$\langle C^i(t), PE^i(t) \rangle = 0 \quad (\text{A.1})$$

Substituindo (3.2) em (A.1):

$$\begin{aligned} & \langle PE^i(t), PE^i(t) \rangle + \left\langle \frac{PE^i(t)}{\|PE^i(t)\|} \left( (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} \right) + R_i(t_{i-1}) \right), PE^i(t) \right\rangle \\ & - \left\langle \frac{PE^i(t)(PE^i(t), PE^i(t))}{\|PE^i(t)\|^2} \left( (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} \right) + R_i(t_{i-1}) \right), PE^i(t) \right\rangle \\ & + \left\langle \frac{PE^i(t)}{\|PE^i(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i-t_{i-1}} \right), PE^i(t) \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} & \|PE^i(t)\|^2 + \|PE^i(t)\| (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i-t_{i-1}} \right) \\ & + \frac{\langle PE^i(t), PE^i(t) \rangle}{\|PE^i(t)\|} \left( (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} \right) + R_i(t_{i-1}) \right) \\ & - \frac{\langle PE^i(t), PE^i(t) \rangle}{\|PE^i(t)\|^2} \left( (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} \right) + R_i(t_{i-1}) \right) = 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\|PE^i(t)\|^2 + \|PE^i(t)\| (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i-t_{i-1}} \right) = 0$$

Supondo  $\|PE^i(t)\| \neq 0$ , então:

$$\|PE^i(t)\| + (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i-t_{i-1}} \right) = 0$$

⇔

$$\boxed{R_i(t_{i-1}) - R_i(t_i) = (t_i - t_{i-1}) \|PE_i(t)\|} \quad (A.2)$$

A condição expressa pela equação (A.2) é equivalente à (A.1) se não houver extremos de curvatura entre os pontos considerados, isto é, se  $\|PE_i(t)\| \neq 0, \forall t$  no trecho considerado. Pode-se interpretar esta equivalência de duas formas:

- (A.1) vale para qualquer  $t = t_0 \in [t_{i-1}, t_i]$  se e somente se:

$$\|PE_i(t_0)\| = \frac{R_i(t_{i-1}) - R_i(t_i)}{t_i - t_{i-1}}$$

e

$$\|PE_i(t)\| \neq 0, \forall t \in [t_{i-1}, t_i]$$

- (A.1) vale  $\forall t \in [t_{i-1}, t_i]$  se e somente se  $\|PE_i(t)\| = cte \neq 0, \forall t \in [t_{i-1}, t_i]$  e neste caso (3.1) e (2.1) são idênticas e  $C_i(t)$  estará sendo parametrizada por um múltiplo do comprimento de arco.

# Apêndice B

## Dedução da Curvatura

A curvatura em todos os pontos do trecho  $C_i(t)$  é expressa por:

$$K_i(t) = \frac{\|C_i'(t) \times C_i''(t)\|}{\|C_i'(t)\|^3}, t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (\text{B.1})$$

Considere dois vetores  $V$  e  $W$ . Definindo  $J[V]$  como sendo o vetor  $V$  girado de  $\frac{\pi}{2}$ , a seguinte igualdade vale

$$\|V \times W\| = \langle W, J[V] \rangle \quad (\text{B.2})$$

Considere ainda que

$$C_i'(t) = k_1 P E_i'(t) + k_2 P E_i''(t), t = t_i \quad (\text{B.3})$$

onde:

$$k_1 = 1 - \frac{\langle P E_i'(t), P E_i''(t) \rangle}{\|P E_i'(t)\|^3} R_i(t) + \frac{1}{\|P E_i'(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right)$$

$$k_2 = \frac{1}{\|P E_i'(t)\|} R_i(t)$$

e

$$C_i''(t) = k_3 P E_i'(t) + k_4 P E_i''(t) + k_5 P E_i'''(t), t = t_i \quad (\text{B.4})$$

onde:

$$k_3 = \frac{3\langle PE^v_i(t), PE^u_i(t) \rangle^2}{\|PE^v_i(t)\|^6} R_i(t_i) - 2\frac{\langle PE^v_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^v_i(t)\|^6} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) - \frac{\langle (PE^u_i(t), PE^u_i(t)) + (PE^v_i(t), PE^u_i(t)) \rangle}{\|PE^v_i(t)\|^6} R_i(t)$$

$$k_4 = 1 - 2\frac{\langle PE^v_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^v_i(t)\|^3} R_i(t) + 2\frac{1}{\|PE^v_i(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right)$$

$$k_5 = \frac{1}{\|PE^v_i(t)\|} R_i(t)$$

O cálculo da curvatura será dividido em três partes (explicadas nas próximas Seções), a saber: o cálculo de  $\|C^v_i(t) \times C^u_i(t)\|$ , o cálculo de  $\|C^v_i(t)\|^2$  e o cálculo de  $K_i(t)$ .

## B.1 Cálculo de $\|C^v_i(t) \times C^u_i(t)\|$

Utilizando (B.2) pode-se escrever

$$\|C^v_i(t) \times C^u_i(t)\| = \langle C^u_i(t), J[C^v_i(t)] \rangle$$

de (B.3) e (B.4) pode-se reescrever

$$\langle C^u_i(t), J[C^v_i(t)] \rangle = \left\langle \begin{array}{c} (k_3 PE^v_i(t) + k_4 PE^u_i(t) + k_5 PE^w_i(t)) \\ , J[k_1 PE^v_i(t) + k_2 PE^u_i(t)] \end{array} \right\rangle, t = t_i$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \langle C^u_i(t), J[C^v_i(t)] \rangle &= \langle k_3 PE^v_i(t), J[k_1 PE^v_i(t)] \rangle + \langle k_4 PE^u_i(t), J[k_1 PE^v_i(t)] \rangle \\ &+ \langle k_3 PE^v_i(t), J[k_2 PE^u_i(t)] \rangle + \langle k_4 PE^u_i(t), J[k_2 PE^u_i(t)] \rangle \\ &+ k_5 (\langle PE^w_i(t), J[k_1 PE^v_i(t) + k_2 PE^u_i(t)] \rangle) \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \langle C^u_i(t), J[C^v_i(t)] \rangle &= k_1 k_4 \langle PE^u_i(t), J[PE^v_i(t)] \rangle + k_2 k_3 \langle PE^v_i(t), J[PE^u_i(t)] \rangle \\ &+ k_5 (\langle PE^w_i(t), J[k_1 PE^v_i(t) + k_2 PE^u_i(t)] \rangle) \end{aligned}$$

Como  $\langle PE^v_i(t), J[PE^u_i(t)] \rangle = -\langle PE^u_i(t), J[PE^v_i(t)] \rangle$ , então:

$$\begin{aligned} \langle C^u_i(t), J[C^i_i(t)] \rangle &= k_1 k_4 \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle - k_2 k_3 \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle \\ &\quad + k_5 \langle (PE^u_i(t), J[k_1 PE^i_i(t) + k_2 PE^u_i(t)]) \rangle \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \langle C^u_i(t), J[C^i_i(t)] \rangle &= (k_1 k_4 - k_2 k_3) \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle \\ &\quad + k_5 \langle (PE^u_i(t), J[k_1 PE^i_i(t) + k_2 PE^u_i(t)]) \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} &(k_1 k_4 - k_2 k_3) = \\ &\left( 1 - \frac{\langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^2} R_i(t_i) + \frac{1}{\|PE^i_i(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \right) \\ &\left( 1 - 2 \frac{\langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^2} R_i(t) + 2 \frac{1}{\|PE^i_i(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{\|PE^i_i(t)\|} R_i(t) \\ &\left( \frac{3 \langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle^2}{\|PE^i_i(t)\|^4} R_i(t) - 2 \frac{\langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^2} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \right) \\ &\quad - \frac{\langle (PE^u_i(t), PE^u_i(t)) + \langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^2} R_i(t) \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} &(k_1 k_4 - k_2 k_3) = \\ &\left( 1 - \frac{\langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^2} R_i(t) + \frac{1}{\|PE^i_i(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \right) \\ &- 2 \frac{\langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^2} R_i(t) \left( \begin{array}{l} 1 - \frac{\langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^2} R_i(t) \\ + \frac{1}{\|PE^i_i(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \end{array} \right) \\ &+ 2 \frac{1}{\|PE^i_i(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \left( \begin{array}{l} 1 - \frac{\langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^2} R_i(t) \\ + \frac{1}{\|PE^i_i(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \end{array} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\|PE^i_i(t)\|} R_i(t) \\ &\left( \frac{3 \langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle^2}{\|PE^i_i(t)\|^4} R_i(t) - 2 \frac{\langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^2} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \right) \\ &\quad - \frac{\langle (PE^u_i(t), PE^u_i(t)) + \langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^2} R_i(t) \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
& (k_1 k_4 - k_2 k_3) = \\
& \left( 1 - \frac{(\rho_{B^i}(t), \rho_{B^u}(t))}{\|\rho_{B^i}(t)\|^2} R_i(t) + \frac{1}{\|\rho_{B^i}(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \right) \\
& \quad - 2 \frac{(\rho_{B^i}(t), \rho_{B^u}(t))}{\|\rho_{B^i}(t)\|^2} R_i(t) \\
& \quad + 2 \frac{(\rho_{B^i}(t), \rho_{B^u}(t))}{\|\rho_{B^i}(t)\|^2} R_i(t) \left( \frac{(\rho_{B^i}(t), \rho_{B^u}(t))}{\|\rho_{B^i}(t)\|^2} R_i(t) \right) \\
& \quad - 2 \frac{(\rho_{B^i}(t), \rho_{B^u}(t))}{\|\rho_{B^i}(t)\|^2} R_i(t) \left( \frac{1}{\|\rho_{B^i}(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \right) \\
& \quad + 2 \frac{1}{\|\rho_{B^i}(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \\
& \quad - 2 \frac{1}{\|\rho_{B^i}(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \left( \frac{(\rho_{B^i}(t), \rho_{B^u}(t))}{\|\rho_{B^i}(t)\|^2} R_i(t) \right) \\
& + 2 \frac{1}{\|\rho_{B^i}(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \left( \frac{1}{\|\rho_{B^i}(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \right) \\
& \quad - \frac{1}{\|\rho_{B^i}(t)\|} R_i(t) \\
& \left( \frac{3(\rho_{B^i}(t), \rho_{B^u}(t))^2}{\|\rho_{B^i}(t)\|^4} R_i(t) - 2 \frac{(\rho_{B^i}(t), \rho_{B^u}(t))}{\|\rho_{B^i}(t)\|^2} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \right) \\
& \quad - \frac{((\rho_{B^u}(t), \rho_{B^u}(t)) + (\rho_{B^i}(t), \rho_{B^u}(t)))}{\|\rho_{B^i}(t)\|^2} R_i(t)
\end{aligned}$$

⇔

$$\begin{aligned}
& (k_1 k_4 - k_2 k_3) = \\
& \left( 1 - 3 \frac{(\rho_{B^i}(t), \rho_{B^u}(t))}{\|\rho_{B^i}(t)\|^2} R_i(t) + 3 \frac{1}{\|\rho_{B^i}(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \right) \\
& \quad + 2 \left( \frac{(\rho_{B^i}(t), \rho_{B^u}(t))}{\|\rho_{B^i}(t)\|^2} R_i(t) \right)^2 \\
& \quad - 4 \frac{(\rho_{B^i}(t), \rho_{B^u}(t))}{\|\rho_{B^i}(t)\|^2} R_i(t) \left( \frac{1}{\|\rho_{B^i}(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \right) \\
& \quad + 2 \left( \frac{1}{\|\rho_{B^i}(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \right)^2 \\
& \quad - \frac{1}{\|\rho_{B^i}(t)\|} R_i(t) \\
& \left( \frac{3(\rho_{B^i}(t), \rho_{B^u}(t))^2}{\|\rho_{B^i}(t)\|^4} R_i(t) - 2 \frac{(\rho_{B^i}(t), \rho_{B^u}(t))}{\|\rho_{B^i}(t)\|^2} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \right) \\
& \quad - \frac{((\rho_{B^u}(t), \rho_{B^u}(t)) + (\rho_{B^i}(t), \rho_{B^u}(t)))}{\|\rho_{B^i}(t)\|^2} R_i(t)
\end{aligned}$$

⇔

$$\begin{aligned}
& (k_1 k_4 - k_2 k_3) = \\
& \left( 1 + 3 \frac{1}{\|\rho_{B^i}(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) - 3 \frac{(\rho_{B^i}(t), \rho_{B^u}(t))}{\|\rho_{B^i}(t)\|^2} R_i(t) \right) \\
& + 2 \left( \frac{1}{\|\rho_{B^i}(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) - \frac{(\rho_{B^i}(t), \rho_{B^u}(t))}{\|\rho_{B^i}(t)\|^2} R_i(t) \right)^2 \\
& \quad - \frac{1}{\|\rho_{B^i}(t)\|} R_i(t) \left( \frac{3(\rho_{B^i}(t), \rho_{B^u}(t))^2}{\|\rho_{B^i}(t)\|^4} R_i(t) \right) \\
& + \frac{1}{\|\rho_{B^i}(t)\|} R_i(t) \left( 2 \frac{(\rho_{B^i}(t), \rho_{B^u}(t))}{\|\rho_{B^i}(t)\|^2} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \right) \\
& \quad + \frac{1}{\|\rho_{B^i}(t)\|} R_i(t) \left( \frac{((\rho_{B^u}(t), \rho_{B^u}(t)) + (\rho_{B^i}(t), \rho_{B^u}(t)))}{\|\rho_{B^i}(t)\|^2} R_i(t) \right)
\end{aligned}$$

⇔



$$\begin{aligned}
(k_1 k_4 - k_2 k_3) = & \\
& \left(1 + 3 \frac{1}{\|PE^i(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left(\frac{1}{t_i - t_{i-1}}\right) - 3 \frac{\langle PE^i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i(t)\|^3} R_i(t)\right) \\
& + 2 \left(\frac{1}{\|PE^i(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left(\frac{1}{t_i - t_{i-1}}\right)\right)^2 - \left(\frac{\langle PE^i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i(t)\|^3} R_i(t)\right)^2 \\
& - 2 \left(\frac{1}{\|PE^i(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left(\frac{1}{t_i - t_{i-1}}\right) \frac{\langle PE^i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i(t)\|^3} R_i(t)\right) \\
& + \frac{\langle (PE^u_i(t), PE^u_i(t)) + (PE^i(t), PE^u_i(t)) \rangle}{\|PE^i(t)\|^4} (R_i(t))^2
\end{aligned}$$

⇔

$$(k_1 k_4 - k_2 k_3) = k_8 + \frac{\langle (PE^u_i(t), PE^u_i(t)) + (PE^i(t), PE^u_i(t)) \rangle}{\|PE^i(t)\|^4} (R_i(t))^2, \quad (B.6)$$

onde

$$\begin{aligned}
k_8 = & \left(1 + 3 \frac{1}{\|PE^i(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left(\frac{1}{t_i - t_{i-1}}\right) - 3 \frac{\langle PE^i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i(t)\|^3} R_i(t)\right) \\
& + 2 \left(\frac{1}{\|PE^i(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left(\frac{1}{t_i - t_{i-1}}\right)\right)^2 - \left(\frac{\langle PE^i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i(t)\|^3} R_i(t)\right)^2 \\
& - 2 \left(\frac{1}{\|PE^i(t)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left(\frac{1}{t_i - t_{i-1}}\right) \frac{\langle PE^i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i(t)\|^3} R_i(t)\right)
\end{aligned}$$

Substituindo (B.6) em (B.5) obtem-se

$$\begin{aligned}
\langle C^u_i(t), J[C^i(t)] \rangle = & \\
& \left(k_8 + \frac{\langle (PE^u_i(t), PE^u_i(t)) + (PE^i(t), PE^u_i(t)) \rangle}{\|PE^i(t)\|^4} (R_i(t))^2\right) \langle PE^u_i(t), J[PE^i(t)] \rangle \\
& + k_5 \langle (PE^u_i(t), J[k_1 PE^i(t) + k_2 PE^u_i(t)]) \rangle
\end{aligned}$$

⇔

$$\begin{aligned}
\langle C^u_i(t), J[C^i(t)] \rangle = & k_8 \langle PE^u_i(t), J[PE^i(t)] \rangle \\
& + \frac{\langle (PE^u_i(t), PE^u_i(t)) + (PE^i(t), PE^u_i(t)) \rangle}{\|PE^i(t)\|^4} (R_i(t))^2 \langle PE^u_i(t), J[PE^i(t)] \rangle \\
& + k_5 \langle (PE^u_i(t), J[k_1 PE^i(t) + k_2 PE^u_i(t)]) \rangle
\end{aligned}$$

⇔

$$\begin{aligned}
\langle C^u_i(t), J[C^i(t)] \rangle = & k_8 \langle PE^u_i(t), J[PE^i(t)] \rangle \\
& + \frac{\langle (PE^u_i(t), PE^u_i(t)) \rangle}{\|PE^i(t)\|^4} (R_i(t))^2 \langle PE^u_i(t), J[PE^i(t)] \rangle \\
& + \frac{\langle (PE^i(t), PE^u_i(t)) \rangle}{\|PE^i(t)\|^4} (R_i(t))^2 \langle PE^u_i(t), J[PE^i(t)] \rangle \\
& + k_5 \langle (PE^u_i(t), J[k_1 PE^i(t) + k_2 PE^u_i(t)]) \rangle
\end{aligned}$$

⇔

$$\begin{aligned}
\langle C^u_i(t), J[C^i_i(t)] \rangle &= k_8 \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle \\
&+ \frac{\langle PE^u_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^4} (R_i(t))^2 \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle \\
&+ \frac{\langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^4} (R_i(t))^2 \langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle \\
&+ \frac{1}{\|PE^i_i(t)\|} R_i(t) \langle PE^u_i(t), J[k_1 PE^i_i(t) + k_2 PE^u_i(t)] \rangle
\end{aligned}$$

⇔

$$\begin{aligned}
\langle C^u_i(t), J[C^i_i(t)] \rangle &= k_8 \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle \\
&+ \frac{\langle PE^u_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^4} (R_i(t))^2 \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle \\
&+ \frac{\langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^4} (R_i(t))^2 \langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle \\
&+ \frac{1}{\|PE^i_i(t)\|} R_i(t) k_1 \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle \\
&+ \frac{1}{\|PE^i_i(t)\|} R_i(t) k_2 \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle
\end{aligned}$$

≠ 0

Usando a propriedade (A.2) tem-se:

$$k_1 = -\frac{\langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^3} R_i(t)$$

$$k_2 = \frac{1}{\|PE^i_i(t)\|} R_i(t)$$

$$k_8 = -\frac{\langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^3} R_i(t) - \left( \frac{\langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^3} R_i(t) \right)^2$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
\langle C^u_i(t), J[C^i_i(t)] \rangle &= k_8 \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle \\
&+ \frac{\langle PE^u_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^4} (R_i(t))^2 \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle \\
&+ \frac{\langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^4} (R_i(t))^2 \langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle \\
&- \frac{1}{\|PE^i_i(t)\|} R_i(t) \frac{\langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^3} R_i(t) \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle \\
&+ \frac{1}{\|PE^i_i(t)\|} R_i(t) \frac{1}{\|PE^i_i(t)\|} R_i(t) \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle
\end{aligned}$$

⇔

$$\begin{aligned}
\langle C^u_i(t), J[C^i_i(t)] \rangle &= k_8 \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle \\
&+ \frac{\langle PE^u_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^4} (R_i(t))^2 \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle \\
&+ \frac{\langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^4} (R_i(t))^2 \langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle \\
&- \frac{\langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^4} (R_i(t))^2 \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle \\
&+ \frac{1}{\|PE^i_i(t)\|^2} (R_i(t))^2 \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle
\end{aligned}$$

⇔

$$\begin{aligned} \langle C^u_i(t), J[C^i_i(t)] \rangle &= k_8 \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle \\ &+ \frac{\langle PE^u_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^4} (R_i(t))^2 \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle \\ &+ \frac{(R_i(t))^2}{\|PE^i_i(t)\|^2} \left( \begin{aligned} &\frac{\langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^2} \langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle \\ &- \frac{\langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^2} \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle \\ &+ \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} &\frac{\langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^2} \langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle \\ &- \frac{\langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^2} \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle \\ &+ \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle = 0 \end{aligned}$$

Pois <sup>1,2</sup>:

$$\begin{aligned} &\frac{\langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^2} \langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle - \frac{\langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^2} \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle \\ &+ \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle = \|PE^u_i(t)\| \|PE^u_i(t)\| \sin(\theta_i(t)) \cos(\delta_i(t)) \\ &- \|PE^u_i(t)\| \|PE^u_i(t)\| \cos(\theta_i(t)) \sin(\delta_i(t)) + \|PE^u_i(t)\| \|PE^u_i(t)\| \sin(\delta_i(t) - \theta_i(t)) \\ &= \|PE^u_i(t)\| \|PE^u_i(t)\| (\sin(\theta_i(t)) \cos(\delta_i(t)) - \cos(\theta_i(t)) \sin(\delta_i(t)) + \sin(\delta_i(t) - \theta_i(t))) \\ &= \|PE^u_i(t)\| \|PE^u_i(t)\| \left( \begin{aligned} &\sin(\theta_i(t)) \cos(\delta_i(t)) - \cos(\theta_i(t)) \sin(\delta_i(t)) \\ &+ \sin(\delta_i(t)) \cos(\theta_i(t)) - \sin(\theta_i(t)) \cos(\delta_i(t)) \end{aligned} \right) = 0 \end{aligned}$$

então,

$$\langle C^u_i(t), J[C^i_i(t)] \rangle = k_8 \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle + \frac{\langle PE^u_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^4} (R_i(t))^2 \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle$$

⇔

$$\begin{aligned} \langle C^u_i(t), J[C^i_i(t)] \rangle &= - \frac{\langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^2} R_i(t) \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle \\ &- \left( \frac{\langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^2} R_i(t) \right)^2 \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle \\ &+ \frac{\langle PE^u_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^4} (R_i(t))^2 \langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle \end{aligned}$$

⇔

$$\begin{aligned} \langle C^u_i(t), J[C^i_i(t)] \rangle &= \frac{\langle PE^u_i(t), J[PE^i_i(t)] \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^2} R_i(t) \\ &\left( \frac{\langle PE^u_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^i_i(t)\|^2} R_i(t) - \frac{\langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle^2}{\|PE^i_i(t)\|^4} R_i(t) - \langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle \right) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>  $\theta_i(t)$  é o menor ângulo entre  $PE^i_i(t)$  e  $PE^u_i(t)$ .

<sup>2</sup>  $\delta_i(t)$  é o menor ângulo entre  $PE^i_i(t)$  e  $PE^u_i(t)$ .

Usando a igualdade  $\langle PE^i(t), PE^u_i(t) \rangle^2 + \|PE^i(t) \times PE^u_i(t)\|^2 = \|PE^i(t)\|^2 \|PE^u_i(t)\|^2$ ,  
tem-se:

$$\left( \frac{\langle PE^u_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{\|PE^u_i(t)\|} R_i(t) - \frac{\|PE^u_i(t)\|^2 \|PE^u_i(t)\|^2}{\|PE^u_i(t)\|^4} R_i(t) + \frac{\|PE^u_i(t) \times PE^u_i(t)\|^2}{\|PE^u_i(t)\|^4} R_i(t) - \langle PE^i(t), PE^u_i(t) \rangle \right)$$

$\Leftrightarrow$

$$\left( \frac{\langle C^u_i(t), J[C^i_i(t)] \rangle}{\|PE^u_i(t)\|^4} R_i(t) - \frac{\|PE^u_i(t)\|^2}{\|PE^u_i(t)\|^4} R_i(t) + \frac{\|PE^u_i(t) \times PE^u_i(t)\|^2}{\|PE^u_i(t)\|^4} R_i(t) - \langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle \right)$$

$\Leftrightarrow$

$$\left( \frac{\langle C^u_i(t), J[C^i_i(t)] \rangle}{\|PE^u_i(t)\|^4} R_i(t) - \frac{\|PE^u_i(t) \times PE^u_i(t)\|^2}{\|PE^u_i(t)\|^4} R_i(t) - \langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle \right)$$

Utilizando (B.2) tem-se:

$$\left( \frac{\|C^i_i(t) \times C^u_i(t)\|}{\|PE^u_i(t)\|^4} R_i(t) - \frac{\|PE^u_i(t) \times PE^u_i(t)\|^2}{\|PE^u_i(t)\|^4} R_i(t) - \langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle \right)$$

$\Leftrightarrow$

$$\|C^i_i(t) \times C^u_i(t)\| = \kappa_i(t) R_i(t) (\|PE^i_i(t) \times PE^u_i(t)\| \kappa_i(t) R_i(t) - \langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle), t = t_i, \quad (\text{B.7})$$

onde

$$\kappa_i(t) = \frac{\|PE^i_i(t) \times PE^u_i(t)\|}{\|PE^i_i(t)\|^3} \quad (\text{B.8})$$

## B.2 Cálculo de $\|C^u_i(t)\|^2$

Considerando (para  $t = t_i$ )

$$C^u_i(t_i) = PE^u_i(t_i) \left( 1 - \frac{\langle PE^u_i(t_i), PE^u_i(t_i) \rangle}{\|PE^u_i(t_i)\|^4} R_i(t_i) + \frac{1}{\|PE^u_i(t_i)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \right) + PE^u_i(t_i) \frac{1}{\|PE^u_i(t_i)\|} R_i(t_i)$$

pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
& \langle C_i^v(t_i), C_i^v(t_i) \rangle = \\
& \langle PE_i^v(t_i), PE_i^v(t_i) \rangle \left( \begin{aligned} & 1 - \frac{\langle PE_i^v(t_i), PE_i^u(t_i) \rangle R_i(t_i)}{\|PE_i^v(t_i)\|^2} \\ & + \frac{1}{\|PE_i^v(t_i)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \end{aligned} \right)^2 \\
& + 2 \langle PE_i^v(t_i), PE_i^u(t_i) \rangle \left( \frac{1}{\|PE_i^v(t_i)\|} R_i(t_i) \right) \left( \begin{aligned} & 1 - \frac{\langle PE_i^v(t_i), PE_i^u(t_i) \rangle R_i(t_i)}{\|PE_i^v(t_i)\|^2} \\ & + \frac{1}{\|PE_i^v(t_i)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \end{aligned} \right) \\
& + \langle PE_i^u(t_i), PE_i^u(t_i) \rangle \left( \frac{1}{\|PE_i^v(t_i)\|} R_i(t_i) \right)^2
\end{aligned}$$

⇔

$$\begin{aligned}
& \langle C_i^v(t_i), C_i^v(t_i) \rangle = \\
& \|PE_i^v(t_i)\|^2 \left( \begin{aligned} & 1 - \frac{\langle PE_i^v(t_i), PE_i^u(t_i) \rangle R_i(t_i)}{\|PE_i^v(t_i)\|^2} \\ & + \frac{1}{\|PE_i^v(t_i)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \end{aligned} \right)^2 \\
& + \left( \frac{2 \langle PE_i^v(t_i), PE_i^u(t_i) \rangle R_i(t_i)}{\|PE_i^v(t_i)\|} \right) \left( \begin{aligned} & 1 - \frac{\langle PE_i^v(t_i), PE_i^u(t_i) \rangle R_i(t_i)}{\|PE_i^v(t_i)\|^2} \\ & + \frac{1}{\|PE_i^v(t_i)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \end{aligned} \right) \\
& + \left( \frac{\|PE_i^u(t_i)\|}{\|PE_i^v(t_i)\|} R_i(t_i) \right)^2
\end{aligned}$$

⇔

$$\begin{aligned}
& \langle C_i^v(t_i), C_i^v(t_i) \rangle = \\
& \left( \|PE_i^v(t_i)\| - \frac{\langle PE_i^v(t_i), PE_i^u(t_i) \rangle R_i(t_i)}{\|PE_i^v(t_i)\|^2} \right)^2 \\
& + (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \\
& + \left( \begin{aligned} & \frac{2 \langle PE_i^v(t_i), PE_i^u(t_i) \rangle R_i(t_i)}{\|PE_i^v(t_i)\|} \\ & - \frac{2 \langle PE_i^v(t_i), PE_i^u(t_i) \rangle^2}{\|PE_i^v(t_i)\|^4} (R_i(t_i))^2 \\ & + \frac{2 \langle PE_i^v(t_i), PE_i^u(t_i) \rangle R_i(t_i) (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1}))}{\|PE_i^v(t_i)\|^2} \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \end{aligned} \right) \\
& + \left( \frac{\|PE_i^u(t_i)\|}{\|PE_i^v(t_i)\|} R_i(t_i) \right)^2
\end{aligned}$$

⇔

$$\begin{aligned}
& \langle C_i^v(t_i), C_i^v(t_i) \rangle = \\
& \left( - \frac{\langle PE_i^v(t_i), PE_i^u(t_i) \rangle R_i(t_i)}{\|PE_i^v(t_i)\|^2} \right)^2 \\
& - 2 \left( \frac{\langle PE_i^v(t_i), PE_i^u(t_i) \rangle R_i(t_i)}{\|PE_i^v(t_i)\|^2} R_i(t_i) \right) \left( \|PE_i^v(t_i)\| + (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \right) \\
& + \left( \|PE_i^v(t_i)\| + (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \right)^2 \\
& + \left( \begin{aligned} & \frac{2 \langle PE_i^v(t_i), PE_i^u(t_i) \rangle R_i(t_i)}{\|PE_i^v(t_i)\|} \\ & - \frac{2 \langle PE_i^v(t_i), PE_i^u(t_i) \rangle^2}{\|PE_i^v(t_i)\|^4} (R_i(t_i))^2 \\ & + \frac{2 \langle PE_i^v(t_i), PE_i^u(t_i) \rangle R_i(t_i) (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1}))}{\|PE_i^v(t_i)\|^2} \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \end{aligned} \right) \\
& + \left( \frac{\|PE_i^u(t_i)\|}{\|PE_i^v(t_i)\|} R_i(t_i) \right)^2
\end{aligned}$$

⇔

$$\begin{aligned} \langle C^i_i(t_i), C^i_i(t_i) \rangle &= \left( \|PE^i_i(t_i)\| + (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) \right)^2 \\ &\quad - \left( \frac{\langle PE^i_i(t_i), PE^u_i(t_i) \rangle}{\|PE^i_i(t_i)\|^2} R_i(t_i) \right)^2 + \left( \frac{\|PE^u_i(t_i)\|}{\|PE^i_i(t_i)\|} R_i(t_i) \right)^2 \end{aligned}$$

Usando a propriedade (A.2) tem-se

$$\langle C^i_i(t_i), C^i_i(t_i) \rangle = \left( \frac{R_i(t_i)}{\|PE^i_i(t_i)\|} \right)^2 \left( \|PE^u_i(t_i)\|^2 - \frac{(\langle PE^i_i(t_i), PE^u_i(t_i) \rangle)^2}{\|PE^i_i(t_i)\|^2} \right)$$

Usando a igualdade  $\langle PE^i_i(t), PE^u_i(t) \rangle^2 + \|PE^i_i(t) \times PE^u_i(t)\|^2 = \|PE^i_i(t)\|^2 \|PE^u_i(t)\|^2$ ,  
tem-se

$$\langle C^i_i(t_i), C^i_i(t_i) \rangle = \left( \frac{R_i(t_i)}{\|PE^i_i(t_i)\|} \right)^2 \left( \|PE^u_i(t_i)\|^2 - \frac{\|PE^i_i(t_i)\|^2 \|PE^u_i(t_i)\|^2}{\|PE^i_i(t_i)\|^2} + \frac{\|PE^i_i(t_i) \times PE^u_i(t_i)\|^2}{\|PE^i_i(t_i)\|^2} \right)$$

⇔

$$\langle C^i_i(t_i), C^i_i(t_i) \rangle = \left( \frac{R_i(t_i)}{\|PE^i_i(t_i)\|} \right)^2 \left( \|PE^u_i(t_i)\|^2 - \|PE^u_i(t_i)\|^2 + \frac{\|PE^i_i(t_i) \times PE^u_i(t_i)\|^2}{\|PE^i_i(t_i)\|^2} \right)$$

⇔

$$\langle C^i_i(t_i), C^i_i(t_i) \rangle = \left( \frac{R_i(t_i)}{\|PE^i_i(t_i)\|} \right)^2 \left( \frac{\|PE^i_i(t_i) \times PE^u_i(t_i)\|^2}{\|PE^i_i(t_i)\|^2} \right)$$

⇔

$$\langle C^i_i(t_i), C^i_i(t_i) \rangle = \left( \frac{\|PE^i_i(t_i) \times PE^u_i(t_i)\|}{\|PE^i_i(t_i)\|^2} R_i(t_i) \right)^2$$

⇔

$$\langle C^i_i(t_i), C^i_i(t_i) \rangle = (\kappa_i(t_i) \|PE^i_i(t_i)\| R_i(t_i))^2 \quad (\text{B.9})$$

### B.3 Cálculo de $K_i(t)$

Substituindo (B.7) e (B.9) em (B.1) tem-se (para  $t = t_i$ ):

$$K_i(t_i) = \frac{\kappa_i(t_i) R_i(t_i) (\kappa_i(t_i) R_i(t_i) \|PE^i_i(t_i) \times PE^u_i(t_i)\| - \langle PE^i_i(t_i), PE^u_i(t_i) \rangle)}{(\kappa_i(t_i) \|PE^i_i(t_i)\| R_i(t_i))^3}$$

⇔

$$K_i(t_i) = \frac{\kappa_i(t_i) R_i(t_i) \|PE^v_i(t_i) \times PE^u_i(t_i)\| - \langle PE^v_i(t_i), PE^u_i(t_i) \rangle}{(\kappa_i(t_i) R_i(t_i))^2 \|PE^v_i(t_i)\|^3} \quad (\text{B.10})$$

⇔

$$K_i(t_i) = \frac{\kappa_i(t_i) R_i(t_i) \|PE^v_i(t_i) \times PE^u_i(t_i)\|}{(\kappa_i(t_i) R_i(t_i))^2 \|PE^v_i(t_i)\|^3} - \frac{\langle PE^v_i(t_i), PE^u_i(t_i) \rangle}{(\kappa_i(t_i) R_i(t_i))^2 \|PE^v_i(t_i)\|^3}$$

⇔

$$K_i(t_i) = \frac{\|PE^v_i(t_i) \times PE^u_i(t_i)\|}{\kappa_i(t_i) R_i(t_i) \|PE^v_i(t_i)\|^3} - \frac{\langle PE^v_i(t_i), PE^u_i(t_i) \rangle}{(\kappa_i(t_i) R_i(t_i))^2 \|PE^v_i(t_i)\|^3}$$

⇔

$$K_i(t_i) = \frac{1}{R_i(t_i)} - \frac{\langle PE^v_i(t_i), PE^u_i(t_i) \rangle}{(R_i(t_i) \kappa_i(t_i))^2 \|PE^v_i(t_i)\|^3}$$

⇔

$$K_i(t_i) = \frac{1}{R_i(t_i)} - \frac{\langle PE^v_i(t_i), PE^u_i(t_i) \rangle}{(R_i(t_i))^2 \kappa_i(t_i) \|PE^v_i(t_i) \times PE^u_i(t_i)\|} \quad (\text{B.11})$$

## Apêndice C

### Dedução da Igualdade entre os Módulos do Raio-vetor e Raio de Curvatura

Pedir que, em  $t = t_{i-1}$  e  $t = t_i$ , o módulo do raio-vetor seja numericamente igual ao raio de curvatura (ou seja, ao inverso da curvatura) significa que

$$R_i(t) = \frac{1}{K_i(t)}$$

ou ainda

$$\frac{1}{R_i(t)} = K_i(t) \tag{C.1}$$

Como, por hipótese, a Proposição 1 é satisfeita em  $t = t_{i-1}$  e  $t = t_i$ , a curvatura nestes pontos é dada pela equação (B.11). Portanto, substituindo a equação (B.11) na equação (C.1) tem-se

$$\frac{1}{R_i(t)} = \frac{1}{R_i(t)} - \frac{\langle PE^v_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{(R_i(t))^2 \kappa_i(t) \|PE^v_i(t) \times PE^u_i(t)\|}$$

$\Leftrightarrow$

$$-\frac{\langle PE^v_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{(R_i(t))^2 \kappa_i(t) \|PE^v_i(t) \times PE^u_i(t)\|} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\langle PE^v_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{(R_i(t))^2 \kappa_i(t) \|PE^v_i(t) \times PE^u_i(t)\|} = 0$$

E como, ainda por hipótese,  $R_i(t) \neq 0$ ,  $\|PE^v_i(t)\| \neq 0$  e  $\|PE^v_i(t) \times PE^u_i(t)\| \neq 0$ , então

$$\frac{\langle PE^v_i(t), PE^u_i(t) \rangle}{(R_i(t))^2 \kappa_i(t) \|PE^v_i(t) \times PE^u_i(t)\|} = 0 \Leftrightarrow \langle PE^v_i(t), PE^u_i(t) \rangle = 0$$

## Apêndice D

### Dedução da Condição de $GC^1$

Considere-se dois trechos de curva consecutivos  $C_i(t)$  e  $C_{i+1}(t)$  (portanto com  $C_i(t_i) = C_{i+1}(t_i) = P_i$ ). Para que  $C_i(t)$  e  $C_{i+1}(t)$  sejam  $GC^1$  (em  $t = t_i$ ) deve-se ter

$$C'_i(t_i) = \alpha C'_{i+1}(t_i) \quad (D.1)$$

Adequando (3.2) a (D.1) obtém-se:

$$\alpha \left( \begin{aligned} & PE'_i(t_i) + \frac{PE''_i(t_i)}{\|PE'_i(t_i)\|} R_i(t_i) - \frac{PE'_i(t_i)(PE''_i(t_i), PE''_i(t_i))}{\|PE'_i(t_i)\|^\beta} R_i(t_i) \\ & + \frac{PE'_i(t_i)}{\|PE'_i(t_i)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) = \\ & PE'_{i+1}(t_i) + \frac{PE''_{i+1}(t_i)}{\|PE'_{i+1}(t_i)\|} R_{i+1}(t_i) - \frac{PE'_{i+1}(t_i)(PE''_{i+1}(t_i), PE''_{i+1}(t_i))}{\|PE'_{i+1}(t_i)\|^\beta} R_{i+1}(t_i) \\ & + \frac{PE'_{i+1}(t_i)}{\|PE'_{i+1}(t_i)\|} (R_{i+1}(t_{i+1}) - R_{i+1}(t_i)) \left( \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \right) \end{aligned} \right) \quad (D.2)$$

Como por construção tem-se

$$\beta PE'_i(t_i) = PE'_{i+1}(t_i), \beta \in \Re$$

então

$$\beta \|PE'_i(t_i)\| = \|PE'_{i+1}(t_i)\| \quad (D.3)$$

ou seja, pode-se escrever (D.2) na forma:

$$\alpha \left( \begin{aligned} & PE^i(t_i) + \frac{PE^u_i(t_i)}{\|PE^i_i(t_i)\|} R_i(t_i) - \frac{PE^i_i(t_i)(PE^i_i(t_i), PE^u_i(t_i))}{\|PE^i_i(t_i)\|^2} R_i(t_i) \\ & + \frac{PE^i_i(t_i)}{\|PE^i_i(t_i)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) = \\ & \beta PE^i(t_i) + \frac{PE^u_{i+1}(t_i)}{\beta \|PE^i_i(t_i)\|} R_{i+1}(t_i) - \frac{\beta PE^i_i(t_i)(\beta PE^i_i(t_i), PE^u_{i+1}(t_i))}{\beta^2 \|PE^i_i(t_i)\|^2} R_{i+1}(t_i) \\ & + \frac{\beta PE^i_i(t_i)}{\beta \|PE^i_i(t_i)\|} (R_{i+1}(t_{i+1}) - R_{i+1}(t_i)) \left( \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \right) \end{aligned} \right)$$

$\Leftrightarrow$

$$\alpha \left( \begin{aligned} & PE^i(t_i) + \frac{PE^u_i(t_i)}{\|PE^i_i(t_i)\|} R_i(t_i) - \frac{PE^i_i(t_i)(PE^i_i(t_i), PE^u_i(t_i))}{\|PE^i_i(t_i)\|^2} R_i(t_i) \\ & + \frac{PE^i_i(t_i)}{\|PE^i_i(t_i)\|} (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) = \\ & \beta PE^i(t_i) + \frac{PE^u_{i+1}(t_i)}{\beta \|PE^i_i(t_i)\|} R_{i+1}(t_i) - \frac{PE^i_i(t_i)(PE^i_i(t_i), PE^u_{i+1}(t_i))}{\beta \|PE^i_i(t_i)\|^2} R_{i+1}(t_i) \\ & + \frac{PE^i_i(t_i)}{\|PE^i_i(t_i)\|} (R_{i+1}(t_{i+1}) - R_{i+1}(t_i)) \left( \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \right) \end{aligned} \right)$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} & (1 - \alpha\beta) PE^i(t_i) \\ & + \left( (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) - \alpha (R_{i+1}(t_{i+1}) - R_{i+1}(t_i)) \left( \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \right) \right) \frac{PE^i_i(t_i)}{\|PE^i_i(t_i)\|} \\ & - \left( (PE^i_i(t_i), PE^u_i(t_i)) R_i(t_i) - \frac{\alpha}{\beta} (PE^i_i(t_i), PE^u_{i+1}(t_i)) R_{i+1}(t_i) \right) \frac{PE^i_i(t_i)}{\|PE^i_i(t_i)\|^2} \\ & + \left( PE^u_i(t_i) R_i(t_i) - \frac{\alpha}{\beta} PE^u_{i+1}(t_i) R_{i+1}(t_i) \right) \frac{1}{\|PE^i_i(t_i)\|} = 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} & (1 - \alpha\beta) PE^i(t_i) \\ & + \left( (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) - \alpha (R_{i+1}(t_{i+1}) - R_{i+1}(t_i)) \left( \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \right) \right) \frac{PE^i_i(t_i)}{\|PE^i_i(t_i)\|} \\ & - \left( (PE^i_i(t_i), R_i(t_i) PE^u_i(t_i) - \frac{\alpha}{\beta} R_{i+1}(t_i) PE^u_{i+1}(t_i)) \right) \frac{PE^i_i(t_i)}{\|PE^i_i(t_i)\|^2} \\ & + \left( (PE^u_i(t_i) R_i(t_i) - \frac{\alpha}{\beta} PE^u_{i+1}(t_i) R_{i+1}(t_i)) \right) \frac{1}{\|PE^i_i(t_i)\|} = 0 \end{aligned} \quad (D.4)$$

Desmembrando  $PE^u_i(t_i)$  e  $PE^u_{i+1}(t_i)$  em componentes ortogonais apropriadas,

$$PE^u_i(t_i) = \left( \left\langle \frac{PE^i_i(t_i)}{\|PE^i_i(t_i)\|}, PE^u_i(t_i) \right\rangle n \right) + \left( PE^u_i(t_i) - \left\langle \frac{PE^i_i(t_i)}{\|PE^i_i(t_i)\|}, PE^u_i(t_i) \right\rangle n \right)$$

$$PE^u_{i+1}(t_i) = \left( \left\langle \frac{PE^i_i(t_i)}{\|PE^i_i(t_i)\|}, PE^u_{i+1}(t_i) \right\rangle n \right) + \left( PE^u_{i+1}(t_i) - \left\langle \frac{PE^i_i(t_i)}{\|PE^i_i(t_i)\|}, PE^u_{i+1}(t_i) \right\rangle n \right)$$

com

$$n = \frac{PE^i_i(t_i)}{\|PE^i_i(t_i)\|}$$

e (D.4) em função das componentes ortogonais a  $PE^i(t_i)$ , tem-se

$$R_i(t_i) \left( PE^u_i(t_i) - \left\langle \frac{PE^i(t_i)}{\|PE^i(t_i)\|}, PE^u_i(t_i) \right\rangle u \right) = \frac{\alpha}{\beta} R_{i+1}(t_i) \left( PE^u_{i+1}(t_i) - \left\langle \frac{PE^i(t_i)}{\|PE^i(t_i)\|}, PE^u_{i+1}(t_i) \right\rangle u \right) \quad (D.5)$$

Similarmente, escrevendo (D.4) em função das componentes colineares a  $PE^i(t_i)$  (componentes em  $u$ ) e lembrando que  $PE^i(t_i) = \|PE^i(t_i)\| u$ , tem-se

$$(1 - \alpha\beta) \|PE^i(t_i)\| u + \left( (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) - \alpha (R_{i+1}(t_{i+1}) - R_{i+1}(t_i)) \left( \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \right) \right) \frac{\|PE^i(t_i)\|}{\|PE^i(t_i)\|} u - \left\langle PE^i(t_i), R_i(t_i) PE^u_i(t_i) - \frac{\alpha}{\beta} R_{i+1}(t_i) PE^u_{i+1}(t_i) \right\rangle \frac{\|PE^i(t_i)\|}{\|PE^i(t_i)\|^2} u + \left( R_i(t_i) \left\langle \frac{PE^i(t_i)}{\|PE^i(t_i)\|}, PE^u_i(t_i) \right\rangle u - \frac{\alpha}{\beta} R_{i+1}(t_i) \left\langle \frac{PE^i(t_i)}{\|PE^i(t_i)\|}, PE^u_{i+1}(t_i) \right\rangle u \right) \frac{1}{\|PE^i(t_i)\|} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(1 - \alpha\beta) \|PE^i(t_i)\| u + \left( (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) - \alpha (R_{i+1}(t_{i+1}) - R_{i+1}(t_i)) \left( \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \right) \right) u - \left\langle PE^i(t_i), R_i(t_i) PE^u_i(t_i) - \frac{\alpha}{\beta} R_{i+1}(t_i) PE^u_{i+1}(t_i) \right\rangle \frac{1}{\|PE^i(t_i)\|^2} u + \left\langle \frac{PE^i(t_i)}{\|PE^i(t_i)\|}, R_i(t_i) PE^u_i(t_i) - \frac{\alpha}{\beta} R_{i+1}(t_i) PE^u_{i+1}(t_i) \right\rangle \frac{1}{\|PE^i(t_i)\|^2} u = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(1 - \alpha\beta) \|PE^i(t_i)\| u + \left( (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) - \alpha (R_{i+1}(t_{i+1}) - R_{i+1}(t_i)) \left( \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \right) \right) u - \left\langle PE^i(t_i), R_i(t_i) PE^u_i(t_i) - \frac{\alpha}{\beta} R_{i+1}(t_i) PE^u_{i+1}(t_i) \right\rangle \frac{1}{\|PE^i(t_i)\|^2} u + \left\langle PE^i(t_i), R_i(t_i) PE^u_i(t_i) - \frac{\alpha}{\beta} R_{i+1}(t_i) PE^u_{i+1}(t_i) \right\rangle \frac{1}{\|PE^i(t_i)\|^2} u = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(1 - \alpha\beta) \|PE^i(t_i)\| u + \left( (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) - \alpha (R_{i+1}(t_{i+1}) - R_{i+1}(t_i)) \left( \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \right) \right) u = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(1 - \alpha\beta) \|PE^i(t_i)\| + (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) - \alpha (R_{i+1}(t_{i+1}) - R_{i+1}(t_i)) \left( \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \right) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\|PE^i(t_i)\| + (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) = \alpha \left( \beta \|PE^i(t_i)\| + (R_{i+1}(t_{i+1}) - R_{i+1}(t_i)) \left( \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \right) \right)$$

Substituindo  $\beta$  pela equação (D.3):

$$\|PE'_i(t_i)\| + (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \right) = \alpha \left( \|PE'_{i+1}(t_i)\| + (R_{i+1}(t_{i+1}) - R_{i+1}(t_i)) \left( \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \right) \right) \quad (D.6)$$

Entretanto, por construção, a condição expressa pela equação (A.2) vale para os extremos do trecho  $C_i(t)$ , então:

$$0 = \alpha 0$$

Ou seja, a condição dada pela equação (D.6) é sempre satisfeita. Assim, para que os trechos  $C_i(t)$  e  $C_{i+1}(t)$  sejam  $GC^1$  em  $t = t_i$ , basta escolher o valor de  $\alpha$  que satisfaça a equação (D.5).

## Apêndice E

### Dedução da Invariância sob Transformações Rígidas

Aplicando uma transformação geral sob a equação da curva (3.1) tem-se que:

$$A C_i(t) + v = (A P E_i(t) + v) + A \left\{ \frac{P E_i(t)}{\|P E_i(t)\|} \left( (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right) + R_i(t_{i-1}) \right) \right\}$$

Se  $P E_i(t)$  pode ser escrita na forma de (2.4), tal que valha a condição de invariância sob transformações afins (ver Seção 2.3.2) então

$$A C_i(t) + v = \left( A \sum_{k=0}^n F_k(t) P_k + v \right) + A \left\{ \frac{\left( \sum_{k=0}^n F_k(t) P_k \right)'}{\left\| \left( \sum_{k=0}^n F_k(t) P_k \right)' \right\|} R_i(t) \right\}$$

onde:

$$R_i(t) = (R_i(t_i) - R_i(t_{i-1})) \left( \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right) + R_i(t_{i-1})$$

e

$$A C_i(t) + v = \left( A \sum_{k=0}^n F_k(t) P_k + \sum_{k=0}^n F_k(t) v \right) + A \left\{ \frac{\left( \sum_{k=0}^n F_k'(t) P_k \right)}{\left\| \left( \sum_{k=0}^n F_k(t) P_k \right)' \right\|} R_i(t) \right\}$$

⇔

$$A C_i(t) + v = \sum_{k=0}^n F_k(t) (A P_k + v) + \frac{A \sum_{k=0}^n F_k'(t) P_k + \sum_{k=0}^n F_k'(t) v}{\left\| \left( \sum_{k=0}^n F_k(t) P_k \right)' \right\|} R_i(t)$$

⇔

$$AC_i(t) + v = \sum_{k=0}^n F_k(t) (AP_k + v) + \frac{\sum_{k=0}^n F'_k(t) (AP_k + v)}{\left\| \left( \sum_{k=0}^n F_k(t) P_k \right)' \right\|} R_i(t)$$

⇔

$$AC_i(t) + v = \sum_{k=0}^n F_k(t) (AP_k + v) + \frac{\left( \sum_{k=0}^n F_k(t) (AP_k + v) \right)'}{\left\| \left( \sum_{k=0}^n F_k(t) P_k \right)' \right\|} R_i(t)$$

⇔

$$AC_i(t) + v = \sum_{k=0}^n F_k(t) (AP_k + v) + \frac{\left( \sum_{k=0}^n F_k(t) (AP_k + v) \right)' \left\| \left( \sum_{k=0}^n F_k(t) (AP_k + v) \right)' \right\|}{\left\| \left( \sum_{k=0}^n F_k(t) (AP_k + v) \right)' \right\| \left\| \left( \sum_{k=0}^n F_k(t) P_k \right)' \right\|} R_i(t)$$

⇔

$$AC_i(t) + v = \sum_{k=0}^n F_k(t) (AP_k + v) + \frac{\left( \sum_{k=0}^n F_k(t) (AP_k + v) \right)' \left\| \left( \sum_{k=0}^n F_k(t) (AP_k + v) \right)' \right\|}{\left\| \left( \sum_{k=0}^n F_k(t) (AP_k + v) \right)' \right\| \left\| \left( \sum_{k=0}^n F_k(t) P_k \right)' \right\|} R_i(t)$$

e como

$$\frac{\left\| \left( \sum_{k=0}^n F_k(t) (AP_k + v) \right)' \right\|}{\left\| \left( \sum_{k=0}^n F_k(t) P_k \right)' \right\|} = 1$$

se e somente se a transformação for rotação ou translação, nestes casos, vem

$$AC_i(t) + v = \sum_{k=0}^n F_k(t) (AP_k + v) + \frac{\left( \sum_{k=0}^n F_k(t) (AP_k + v) \right)'}{\left\| \left( \sum_{k=0}^n F_k(t) (AP_k + v) \right)' \right\|} R_i(t)$$

## Apêndice F

### Cálculo dos pontos de controle para satisfazer a Proposição 3

Considerando que cada segmento  $PE_i$  da  $PE$  é modelado por uma curva de Bézier de grau  $n$ , tem-se:

$$PE_i(t_{i-1}) = n(B_{i,1} - B_{i,0})$$

$$PE_i(t_i) = n(B_{i,n} - B_{i,n-1})$$

$$PE_i^{(u)}(t_{i-1}) = n(n-1)(B_{i,2} - 2B_{i,1} + B_{i,0}) = n(n-1)[(B_{i,2} - B_{i,1}) - (B_{i,1} - B_{i,0})]$$

$$PE_i^{(u)}(t_i) = n(n-1)(B_{i,n} - 2B_{i,n-1} + B_{i,n-2}) = n(n-1)[(B_{i,n} - B_{i,n-1}) - (B_{i,n-1} - B_{i,n-2})]$$

para que a Proposição 3 seja satisfeita, deve-se ter, em  $t = t_{i-1}$  e  $t = t_i$

$$\langle PE_i(t), PE_i^{(u)}(t) \rangle = 0$$

para  $t = t_{i-1}$  tem-se

$$\langle PE_i(t_{i-1}), PE_i^{(u)}(t_{i-1}) \rangle = 0$$

↔

$$\langle n(B_{i,1} - B_{i,0}), n(n-1)[(B_{i,2} - B_{i,1}) - (B_{i,1} - B_{i,0})] \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$n^2(n-1) \langle (B_{i,1} - B_{i,0}), [(B_{i,2} - B_{i,1}) - (B_{i,1} - B_{i,0})] \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$n^2(n-1) (\langle (B_{i,1} - B_{i,0}), (B_{i,2} - B_{i,1}) \rangle - \langle (B_{i,1} - B_{i,0}), (B_{i,1} - B_{i,0}) \rangle) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$n^2(n-1) (\langle (B_{i,1} - B_{i,0}), (B_{i,2} - B_{i,1}) \rangle - \|B_{i,1} - B_{i,0}\|^2) = 0$$

como  $n > 1$ , vem

$$\langle (B_{i,1} - B_{i,0}), (B_{i,2} - B_{i,1}) \rangle - \|B_{i,1} - B_{i,0}\|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\langle (B_{i,1} - B_{i,0}), (B_{i,2} - B_{i,1}) \rangle = \|B_{i,1} - B_{i,0}\|^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\|B_{i,2} - B_{i,1}\| \cos \sigma_{i,1} = \|B_{i,1} - B_{i,0}\|$$

Analogamente, para  $t = t_i$  chega-se a

$$\|B_{i,n-1} - B_{i,n-2}\| \cos \sigma_{i,2} = \|B_{i,n} - B_{i,n-1}\|$$

esta configuração de pontos de controle para  $n = 3$  esta mostrada na Figura F.1.

Semelhança de triângulos aplicada à Figura F.1 permite chegar a

$$D_i = T_i \cos \sigma_i \frac{1 + \cos \sigma_i}{(\sin \sigma_i)^2}$$

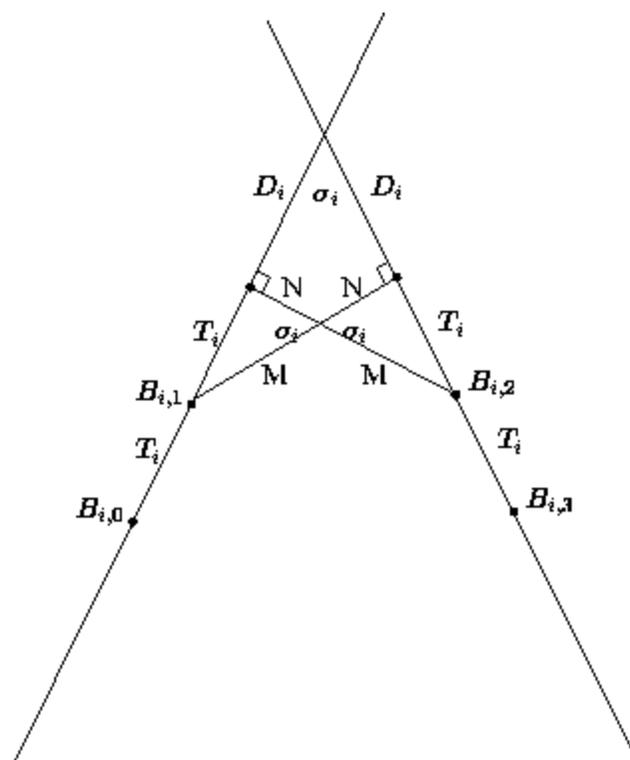


Figura F.1: Pontos de controle de uma curva de Bézier cúbica que satisfazem à Proposição 3.

## Apêndice G

### Cálculo de $T_i$ sujeito à Proposição 3

Substituindo a equação (4.6) na equação (4.7) tem-se

$$B_{i,1} = PI_i + \frac{PI_i - P_{i-1}}{\|PI_i - P_{i-1}\|} (D_i + 2T_i) \quad (G.1)$$

E agora, usando as equações (4.1) com  $j = 1$  e (G.1), pode-se escrever

$$PI_i + \frac{PI_i - P_{i-1}}{\|PI_i - P_{i-1}\|} (D_i + 2T_i) = P_{i-1} - \alpha_{i,1} \vec{R}_i(t_{i-1})$$

mas como  $\alpha_{i,1} = 1$  e  $\frac{PI_i - P_{i-1}}{\|PI_i - P_{i-1}\|} = -\frac{\vec{R}_i(t_{i-1})}{\|\vec{R}_i(t_{i-1})\|}$ , vem

$$PI_i + \frac{PI_i - P_{i-1}}{\|PI_i - P_{i-1}\|} (D_i + 2T_i) = P_{i-1} + \frac{PI_i - P_{i-1}}{\|PI_i - P_{i-1}\|} \|\vec{R}_i(t_{i-1})\|$$

⇔

$$PI_i - P_{i-1} + \frac{PI_i - P_{i-1}}{\|PI_i - P_{i-1}\|} (D_i + 2T_i) = \frac{PI_i - P_{i-1}}{\|PI_i - P_{i-1}\|} \|\vec{R}_i(t_{i-1})\|$$

⇔

$$\|\vec{R}_i(t_{i-1})\| = \frac{PI_i - P_{i-1} + \frac{PI_i - P_{i-1}}{\|PI_i - P_{i-1}\|} (D_i + 2T_i)}{\frac{PI_i - P_{i-1}}{\|PI_i - P_{i-1}\|}}$$

⇔

$$\left\| \vec{R}_i(t_{i-1}) \right\| = \|PI_i - P_{i-1}\| + (D_i + 2T_i) \quad (G.2)$$

De forma análoga para as equações (4.8), (4.9) e (4.2), vem

$$\left\| \vec{R}_i(t_i) \right\| = \|P_i - PI_i\| - (D_i + 2T_i) \quad (G.3)$$

Substituindo (G.2) e (G.3) em (4.5) chega-se a

$$T_i = \frac{\|P_i - PI_i\| - \|PI_i - P_{i-1}\| - 2(D_i + 2T_i)}{n}$$

Como  $n = 3$  e portanto  $D_i = T_i \cos \sigma_i \frac{1 + \cos \sigma_i}{(\sin \sigma_i)^2}$  tem-se

$$3T_i = \left| \|P_i - PI_i\| - \|PI_i - P_{i-1}\| - 2 \left( T_i \cos \sigma_i \frac{1 + \cos \sigma_i}{(\sin \sigma_i)^2} + 2T_i \right) \right|$$

⇔

$$3T_i = \left| \|P_i - PI_i\| - \|PI_i - P_{i-1}\| - 2T_i \left( \cos \sigma_i \frac{1 + \cos \sigma_i}{(\sin \sigma_i)^2} + 2 \right) \right|$$

⇔

$$3T_i = \left| \|P_i - PI_i\| - \|PI_i - P_{i-1}\| - 2T_i \left( \cos \sigma_i \frac{1 + \cos \sigma_i}{1 - (\cos \sigma_i)^2} + 2 \right) \right|$$

⇔

$$3T_i = \left| \|P_i - PI_i\| - \|PI_i - P_{i-1}\| - 2T_i \left( \frac{\cos \sigma_i + (\cos \sigma_i)^2}{1 - (\cos \sigma_i)^2} + 2 \right) \right|$$

$$\Leftrightarrow$$

$$3T_i = \left| \|P_i - PI_i\| - \|PI_i - P_{i-1}\| - 2T_i \left( \frac{\cos \sigma_i + (\cos \sigma_i)^2 + 2 - 2(\cos \sigma_i)^2}{1 - (\cos \sigma_i)^2} \right) \right|$$

$$\Leftrightarrow$$

$$3T_i = \left| \|P_i - PI_i\| - \|PI_i - P_{i-1}\| - 2T_i \left( \frac{\cos \sigma_i - (\cos \sigma_i)^2 + 2}{1 - (\cos \sigma_i)^2} \right) \right|$$

$$\Leftrightarrow$$

$$3T_i = \|P_i - PI_i\| - \|PI_i - P_{i-1}\| - 2T_i \left( \frac{\cos \sigma_i - (\cos \sigma_i)^2 + 2}{1 - (\cos \sigma_i)^2} \right)$$

so  $\|P_i - PI_i\| > \|PI_i - P_{i-1}\| + 2T_i \left( \frac{\cos \sigma_i - (\cos \sigma_i)^2 + 2}{1 - (\cos \sigma_i)^2} \right)$

ou

$$3T_i = -\|P_i - PI_i\| + \|PI_i - P_{i-1}\| + 2T_i \left( \frac{\cos \sigma_i - (\cos \sigma_i)^2 + 2}{1 - (\cos \sigma_i)^2} \right)$$

so  $\|P_i - PI_i\| < \|PI_i - P_{i-1}\| + 2T_i \left( \frac{\cos \sigma_i - (\cos \sigma_i)^2 + 2}{1 - (\cos \sigma_i)^2} \right)$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left( 3 + 2 \frac{\cos \sigma_i - (\cos \sigma_i)^2 + 2}{1 - (\cos \sigma_i)^2} \right) T_i = \|P_i - PI_i\| - \|PI_i - P_{i-1}\|$$

ou

$$\left( 3 - 2 \frac{\cos \sigma_i - (\cos \sigma_i)^2 + 2}{1 - (\cos \sigma_i)^2} \right) T_i = -\|P_i - PI_i\| + \|PI_i - P_{i-1}\|$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left( 3 + \frac{2 \cos \sigma_i - 2(\cos \sigma_i)^2 + 4}{1 - (\cos \sigma_i)^2} \right) T_i = \|P_i - PI_i\| - \|PI_i - P_{i-1}\|$$

ou

$$\left( 3 - \frac{2 \cos \sigma_i - 2(\cos \sigma_i)^2 + 4}{1 - (\cos \sigma_i)^2} \right) T_i = -\|P_i - PI_i\| + \|PI_i - P_{i-1}\|$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left( \frac{3-3(\cos \sigma_i)^2+2\cos \sigma_i-2(\cos \sigma_i)^2+1}{1-(\cos \sigma_i)^2} \right) T_i = \|P_i - PI_i\| - \|PI_i - P_{i-1}\|$$

$$\text{ou}$$

$$\left( \frac{3-3(\cos \sigma_i)^2-2\cos \sigma_i+2(\cos \sigma_i)^2-1}{1-(\cos \sigma_i)^2} \right) T_i = -\|P_i - PI_i\| + \|PI_i - P_{i-1}\|$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left( \frac{2\cos \sigma_i-5(\cos \sigma_i)^2+7}{1-(\cos \sigma_i)^2} \right) T_i = \|P_i - PI_i\| - \|PI_i - P_{i-1}\|$$

$$\text{ou}$$

$$\left( \frac{-1-2\cos \sigma_i-(\cos \sigma_i)^2}{1-(\cos \sigma_i)^2} \right) T_i = -\|P_i - PI_i\| + \|PI_i - P_{i-1}\|$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left( \frac{2\cos \sigma_i-5(\cos \sigma_i)^2+7}{1-(\cos \sigma_i)^2} \right) T_i = \|P_i - PI_i\| - \|PI_i - P_{i-1}\|$$

$$\text{ou}$$

$$\left( \frac{-(1+\cos \sigma_i)^2}{(1-\cos \sigma_i)(1+\cos \sigma_i)} \right) T_i = -\|P_i - PI_i\| + \|PI_i - P_{i-1}\|$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left( \frac{2\cos \sigma_i-5(\cos \sigma_i)^2+7}{1-(\cos \sigma_i)^2} \right) T_i = \|P_i - PI_i\| - \|PI_i - P_{i-1}\|$$

$$\text{ou}$$

$$\left( \frac{(1+\cos \sigma_i)}{(1-\cos \sigma_i)} \right) T_i = \|P_i - PI_i\| - \|PI_i - P_{i-1}\|$$

$$\Leftrightarrow$$

$$T_i = (\|P_i - PI_i\| - \|PI_i - P_{i-1}\|) \frac{1-(\cos \sigma_i)^2}{2\cos \sigma_i-5(\cos \sigma_i)^2+7}$$

$$\text{ou}$$

$$T_i = (\|P_i - PI_i\| - \|PI_i - P_{i-1}\|) \frac{(1-\cos \sigma_i)}{(1+\cos \sigma_i)}$$

De forma análoga, para o equacionamento da Seção chega-se ao seguinte resultado:

$$T_i = (\|PI_i - P_i\| - \|P_{i-1} - PI_i\|) \frac{(1-\cos \sigma_i)}{(1+\cos \sigma_i)}$$

$$\text{ou}$$

$$T_i = (\|PI_i - P_i\| - \|P_{i-1} - PI_i\|) \frac{1-(\cos \sigma_i)^2}{2\cos \sigma_i-5(\cos \sigma_i)^2+7}$$

# Apêndice H

## Notações adotadas

$\|A\|$  denota o módulo (norma) do vetor  $A$ .

$f'(t)$  denota a derivação da função  $f(t)$  em relação a  $t$  ( $f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$ ).

$\langle A, B \rangle$  denota produto escalar dos vetores  $A$  e  $B$ .