Relatório Técnico
DCA11-02

# Estimação de Propriedades Geométricas em Malhas de Topologia Arbitrária

Matias Costa

DCA - FEEC - Unicamp

Agosto, 2011

# Sumário

**1 Introdução** **3**

**2 Elementos Básicos de Geometria Diferencial** **4**
2.1 Tensor Métrico . . . . . 4
2.2 Tensor de Curvatura . . . . . 6
2.3 Matriz Weingarten . . . . . 7
2.3.1 Um estudo de caso . . . . . 7
2.3.2 Generalização . . . . . 8
2.4 Transformação de Coordenadas . . . . . 11
2.5 Algorítimo . . . . . 13

**3 Trabalhos Correlatos** **16**

**4 Resultados** **16**
4.1 Diferenças entre tensores computados e os valores de referencia . 17
4.1.1 Tensor Métrico . . . . . 17
4.1.2 Tensor de Curvatura . . . . . 19
4.2 Pontos Críticos . . . . . 21
4.3 Regiões de fronteiras . . . . . 23
4.4 Comparação entre técnicas para cômputo de tensores de curvatura 23
4.5 A base {t,b,n} . . . . . 24

**5 Conclusão** **25**

# 1 Introdução

Este trabalho tem como objetivo simular visualmente e modelar o comportamento de deformação tecidos, utilizando modelos baseados na teoria de superfícies de Cosserat [2]. Os trabalhos que tem sido publicados em geral utilizam modelos que, embora gerem resultados satisfatórios, possuem algumas limitações como a falta de relação com as características físicas do tecido, e a necessidade de se usar fatores atenuantes para evitar oscilações incompatíveis com o comportamento esperado. O melhor exemplo dessas limitações é justamente o modelo mais utilizado, baseado em sistemas massa mola, onde a malha é representada por pontos de massa conectados entre si por molas.

O modelo explorado aqui tem como vantagem trabalhar com valores que se relacionam diretamente com propriedades geométricas do tecido em movimento como a alteração da área e curvatura associada aos pontos discretizados do tecido em cada instante. Utilizando conceitos de geometria diferencial é possível descrever o comportamento de curvatura de foram direta. Comparando com o modelo do tipo massa-mola, passa a ser possível também a descrição de propriedades de curvatura de cada ponto, ao invés de se ficar restrito a modelos lineares. No entanto, a técnica de estimação das propriedades diferenciais utilizada nos trabalhos anteriores se baseia no método de diferenças finitas [3, 4]limitada a malhas de topologia retangular. O foco deste projeto é estender o modelo implementado para malhas de topologia arbitrária.

O projeto como um todo, está dividido em três grandes partes. A primeira é o cálculo dos valores geométricos necessários para a simulação física. A segunda é a simulação física em si. Na terceira e última parte aplicamos essa simulação para gerar distintos efeitos visuais. Este trabalho é relativo a primeira parte, que é o cálculo dos tensores métricos e de curvaturas para um ponto qualquer da malha para um instante $t$ qualquer da simulação, através da primeira e segunda formas fundamentais da superfície (IFF e IIFF respectivamente). É necessário que possamos estimar esses tensores em modelos discretos e numéricos, sem nenhuma associação com parametrizações matemáticas explicitas para as deformações, e que esse cálculo não impeça uma simulação rápida. Como esses serão os valores de base de todo o trabalho, é importante também que os algorítimos utilizados não introduzam muitos erros numéricos. Para verificar a grandeza dos erros, foram feitas comparações em algumas deformações específicas e controladas, com os valores analíticos obtidos para superfícies dadas explicitamente.

Rusinkiewicz et al[5] já propõe uma técnica para calcular as curvaturas de uma superfície qualquer discretizada em uma malha de topologia arbitrária. Mas é necessário modificá-la e expandi-la levando em consideração os nossos objetivos, e a necessidade (para poder calcular as variações de energia) de poder comparar valores de tensores, do mesmo ponto, em instantes (e portanto deformações) distintos.

Nesse momento, ainda estamos nos restringindo a malhas triangulares para modelar o tecido, mas essa é uma limitação de escopo para esse trabalho em específico, e não da teoria. Essa nova abordagem não é, entretanto, sem custo. Como esperado, na medida que usamos técnicas mais complexas para cálculos de propriedades mais diretamente associadas as características físcias da superfície, o custo computacional é acaba sendo significativamente maior. Como nossa proposta de trabalho tem foco na visualização e computação gráfica, é

importante também analisar a viabilidade de simulações em tempo real, seja nesse momento ou com a implementação de técnicas adicionais.

# 2 Elementos Básicos de Geometria Diferencial

As duas propriedades que nos interessam para poder aplicar a teoria de superfícies de Cosserat são o *tensor métrico* e o *tensor de curvatura* para um ponto qualquer na superfície. O primeiro nos dá uma medida de área ao redor, enquanto que os segundo informa sobre o quão acentuada é a curvatura ao redor do ponto sendo considerado. Ambos os tensores são calculados em relação a um plano tangente a este ponto, e possuem quatro elementos, de forma a expressar as grandezas em relação uma direção, já que a superfície pode ser, por exemplo, curvada em um sentido, mas plana em outro, como um cilindro.

## 2.1 Tensor Métrico

Para entender o conceito de tensor métrico, e o que ele representa sobre a superfície, precisamos primeiro pensar em uma superfície regular parametrizada.

Suponha-se que se tenha um plano com coordenadas $u$ e $v$. Podemos utilizar 3 funções específicas para transformar uma região desse plano, em uma superfície no espaço $\{x,y,z\}$ cartesiano. Um exemplo simples, de uma superfície com forma de sela, seria:

$$x(u,v) \quad = \quad u \qquad y(u,v) = v \qquad z(u,v) = u^2 - v^2 \tag{2.1}$$

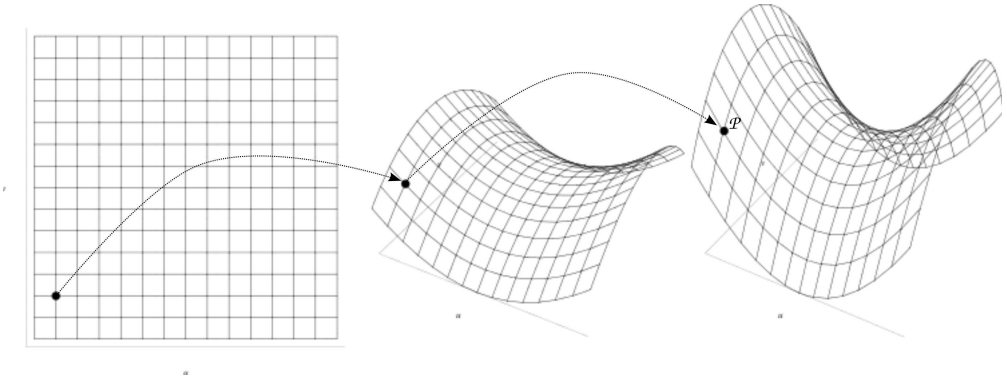



Figura 2.1: Plano $u$ **x** $v$ e dois estados de parametrização da superfície tipo sela.

Outras parametrizações permitem descrever superfícies muito mais complexas.

Para estabelecer uma convenção, descrevemos a superfície obtida no espaço cartesiano de $\mathcal{S}$, por uma parametrização definida por uma função $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)) \tag{2.2}$$

Consideramos agora o que acontece quando temos um $u$ ou $v$ constante. No plano original $u$ **x** $v$, teremos linhas retas. Essas linhas serão mapeadas, através de $\mathbf{r}(u,v)$ em curvas no espaço, pertencentes a superfície $\mathcal{S}$. Um exemplo de linhas e curvas obtidas dessa forma está na Figura 2.1. Considere agora um ponto $\mathcal{P}$, pertencente à superfície. Se consideramos as derivadas parciais da função $\mathbf{r}(u,v)$ nesse ponto, estamos na verdade considerando as derivadas dessas curvas obtidas com $u$ e $v$ constantes, que passam pelo ponto $\mathcal{P}$. Assim $\frac{d\mathbf{r}}{du}$, que chamaremos de $\mathbf{r}_u$ por conveniência, é um vetor no espaço, tangente a curva com $v$ constante passando por esse ponto. Como essa curva pertence à superfície, esse vetor também é tangente a $\mathcal{S}$. Analogamente, para $\mathbf{r}_v$, também teremos um vetor tangente à curva e à superfície. Logo, $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$, se forem distintos e linearmente independentes, definem um plano tangente à superfície. Superfícies definidas com esse tipo $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$ são chamadas de superfícies regulares. Nosso trabalho será restrito a elas. Quando estivermos falando em tensores que determinam características dessa superfície nesse ponto, eles serão descritos em relação a esse referencial $\{\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\}$.

Consideramos agora uma curva $\alpha(t)$ qualquer, que pertence a $\mathcal{S}$ e passa por $\mathcal{P}$

$$\alpha(t) = \mathbf{r}\left(u(t), v(t)\right).$$

Um vetor nesse ponto, descrito como

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{r}_v \frac{dv}{dt}$$

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv \tag{2.3}$$

será tanto tangente a $\alpha(t)$ como a $\mathcal{S}$.

A chamada primeira forma fundamental da superfície, pode ser vista através da definição do quadrado de comprimento infinitesimal de um elemento de arco de $\alpha(t)$.

$$IFF(\alpha(t)) = d\alpha(t) \cdot d\alpha(t) = \left(\mathbf{r}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{r}_v \frac{dv}{dt}\right) \cdot \left(\mathbf{r}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{r}_v \frac{dv}{dt}\right) \tag{2.4}$$

$$= \mathbf{r}_u\mathbf{r}_u \frac{du}{dt}\frac{du}{dt} + \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \mathbf{r}_v\mathbf{r}_u \frac{dv}{dt}\frac{du}{dt} + \mathbf{r}_v\mathbf{r}_v \frac{dv}{dt}\frac{dv}{dt}$$

Se definirmos

$$a_{11} = \mathbf{r}_u\mathbf{r}_u \qquad a_{12} = a_{21} = \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v \qquad a_{22} = \mathbf{r}_v\mathbf{r}_v \quad , \tag{2.5}$$

Podemos escrever na forma matricial

$$IFF(\alpha(t)) = \begin{bmatrix} \frac{du}{dt} & \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Chamamos o tensor formado por $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{21}$e $a_{22}$ de *tensor métrico* da superfície $\mathcal{S}$ em $\mathcal{P}$, onde $a_{12} = a_{21}$. O valor $a_{12}$ só será 0 quando o produto escalar $\mathbf{r}_u.\mathbf{r}_v$ for nulo, ou seja, quando esses vetores forem ortogonais. Duas observações são importantes para o nosso trabalho. Primeiro, é possível observar

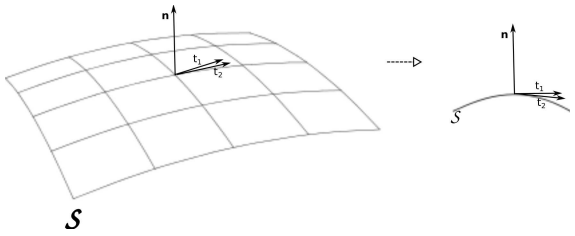



Figura 2.2: Variação do vetor tangente $(t_2 - t_1)$ em relação ao vetor normal $\mathbf{n}$.

que este tensor está associado a deformações de tamanho, ou área, das vizinhanças desse ponto [6]. Olhando $a_{11}$ por exemplo, $\mathbf{r}_u$ irá aumentar se os pontos se afastarem nesse sentido, já que os pontos originais no plano $u$ **x** $v$ da parametrização permanecem iguais. Segundo, essas grandezas são definidas em função do referencial local, nesse caso definido por $\mathbf{r}_u$e $\mathbf{r}_v$, especificado em cada amostra da superfície, e cada uma dessas amostras possui seu próprio referencial, que ainda pode se alterar se a malha for deformada. Dada essa propriedade, não é possível comparar diretamente dois valores de tensores métricos para amostras diferentes, ou mesmo para uma mesma amostra, mas em instantes distintos da simulação.

## 2.2 Tensor de Curvatura

Para estudarmos o comportamento de uma superfície quanto a sua curvatura, é preciso primeiro definir um vetor normal para cada ponto pertencente a ela. Como $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$ já formam a base do plano tangente a superfície $\mathcal{S}$ em um ponto $\mathcal{P}$, podemos definir o vetor normal unitário para esse ponto como

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\sqrt{a_{11}a_{22} - (a_{12})^2}} \, .$$

Para ter uma medida do quanto a superfície se curva ao redor do ponto $\mathcal{P}$, voltamos a usar uma curva $\alpha(t)$. Considerando o arco infinitesimal centrado nesse ponto, se olharmos a variação do vetor tangente a $\alpha(t)$ em relação ao vetor normal, teremos uma medida da curvatura nesta direção (Figura 2.2). Por exemplo, com essa relação expressa por um produto escalar, um valor 0 mostra que o vetor tangente não se alterou no sentido de $\mathbf{n}$.

A variação do vetor tangente é expressa pela derivada de segunda ordem

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt} = (\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial v\partial u}\frac{dv}{dt})\frac{du}{dt} + \mathbf{r}_u(\frac{d^2u}{dt^2}) + (\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u\partial v}\frac{du}{dt} + \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial v\partial v}\frac{dv}{dt})\frac{dv}{dt} + \mathbf{r}_v(\frac{d^2v}{dt^2})$$

A componente na direção do vetor normal é dada pelo produto escalar.

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{n} = (\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial v\partial u}\frac{dv}{dt})\frac{du}{dt}\cdot\mathbf{n} + \mathbf{r}_u(\frac{d^2u}{dt^2})\cdot\mathbf{n} + (\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u\partial v}\frac{du}{dt} + \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial v\partial v}\frac{dv}{dt})\frac{dv}{dt}\cdot\mathbf{n} + \mathbf{r}_v(\frac{d^2v}{dt^2})\cdot\mathbf{n}$$

Novamente, definimos quatro termos como sendo

$$b_{11} = \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u\partial u}\cdot\mathbf{n} \qquad b_{12} = \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u\partial v}\cdot\mathbf{n} \qquad b_{21} = \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial v\partial u}\cdot\mathbf{n} \qquad b_{22} = \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial v\partial v}\cdot\mathbf{n} \, , \quad (2.7)$$

onde $b_{12}= b_{21}$ para parametrizações com derivadas parciais contínuas. A segunda forma fundamental da superfície fica

$$IIFF(d^2\alpha(t), \mathbf{n}) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{n} = b_{11}\frac{du}{dt}\frac{du}{dt} + b_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + b_{21}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + b_{22}\frac{dv}{dt}\frac{dv}{dt}$$

$$IIFF(d^2\alpha(t), \mathbf{n}) = \begin{bmatrix} \frac{du}{dt} & \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} . \tag{2.8}$$

Os parâmetros $b_{11}$, $b_{12}$, $b_{21}$e $b_{22}$ compõem o *tensor de curvatura,* tem relação direta com quanto a superfície se curva nas diferentes direções de $\frac{d\alpha}{dt}$, em relação ao vetor normal $\mathbf{n}$.

## 2.3 Matriz Weingarten

Uma forma de expressar as propriedades geométricas da superfície é uma matriz 2x2 chamada de Matriz Weingarten, que possui uma relação direta com as curvaturas máximas e mínimas em um ponto, bem como as direções nas quais essas curvaturas ocorrem. Como esperado já que estão descrevendo as mesmas propriedades, é possível fazer uma relação entre essa matriz e os tensores métrico e de curvatura.

### 2.3.1 Um estudo de caso

A variação do vetor normal, ao longo de uma curva qualquer $\alpha(t)$ sobre a superfície $\mathcal{S}$ nos dá as curvaturas nos pontos $\mathcal{P}$, sendo considerados, em relação a direção de $\alpha(t)$. Para entender melhor esse conceito de curvatura, peguemos o exemplo de um cilindro de raio $R$ e altura $2l$, que tem a seguinte parametrização:

$$\mathbf{r}(u, v) = (R\,cos(u),\ R\,sen(u),\ v)$$

$$0 \leq u \leq 2\pi$$

$$-l \leq v \leq l$$

Nessa superfície, o vetor normal $\mathbf{n}$ tem sempre direção "saindo" em relação ao eixo central do cilindro, com norma 1. Assim, no caso do cilindro descrito acima, considerando curvas de forma

$$\alpha(t) = (R\,cos(u(t)),\ R\,sen(u(t)),\ v(t)) \ ,$$

temos o vetor normal ao cilindro ao longo delas

$$\mathbf{n}(\alpha(t)) = (cos(u(t)),\ sen(u(t)),\ 0) \ .$$

Considerando duas curvas específicas: $\gamma(t)$, um segmento de reta vertical ao longo do cilindro, e $\beta(t)$ uma circunferência de raio $R$, ambas parametrizadas de forma que o vetor derivada seja unitário (Figura 2.3).

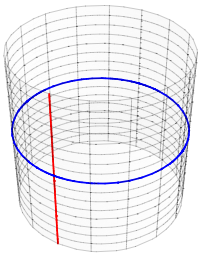


Figura 2.3: Cilindro, $\gamma(t)$ (vermelho) e $\beta(t)$ (azul)

$$\begin{array}{ll} \gamma(t) = (R,\ 0,\ t) & \beta(t) = \big(R\,cos(\frac{t}{r}),\ R\,sen(\frac{t}{r}),\ 0\big) \\ \frac{d\gamma(t)}{dt} = (0,\ 0,\ 1) & \frac{d\beta(t)}{dt} = \big(-sen(\frac{t}{r}),\ cos(\frac{t}{r}),\ 0\big) \\ \mathbf{n}(\gamma(t)) = (1,\ 0,\ 0) & \mathbf{n}(\beta(t)) = (cos(\frac{t}{r}),\ sen(\frac{t}{r}),\ 0) \\ \frac{d\mathbf{n}(\gamma(t))}{dt} = (0,\ 0,\ 0) & \frac{d\mathbf{n}(\beta(t))}{dt} = (-\frac{1}{R}\,sen(\frac{t}{r}),\ \frac{1}{R}\,cos(\frac{t}{r}),\ 0) \end{array} \tag{2.9}$$

Para ter uma medida da variação da normal à superfície ao longo destas curvas, fazemos o produto escalar $\frac{d\alpha(t)}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{n}(\gamma(t))}{dt}$. No caso de $\gamma(t)$, esse produto é 0. Já no caso de $\beta(t)$, esse produto fica $\frac{1}{R}$. Esses são os valores que chamamos de curvatura da superfície nas direções dos vetores tangentes a estas curvas. No primeiro caso, a superfície não se curva ao longo da curva $\gamma(t)$, logo a curvatura nesta direção é 0. Para $\beta(t)$, a superfície se curva de uma forma constante, e não é por acaso que o valor $\frac{1}{R}$ aparece. Na definição de curvatura, o valor expressado é tal que indica a circunferência de raio $R$ que se encaixa no ponto sendo considerado.

*Curvaturas principais,* indicadas por $\kappa_1$ e $\kappa_2$, são as curvaturas mínima e máxima de um ponto qualquer de uma superfície. No caso do cilindro, elas são iguais para todos os pontos, ou seja, 0 e $\frac{1}{R}$. *Direções principais* são vetores indicando as direções onde a superfície possui essas duas curvaturas, representados por $\mathbf{dp_1}$ **e** $\mathbf{dp_2}$**.**

### 2.3.2 Generalização

O exemplo do cilindro permite entender o conceito das curvaturas direcionais, mas é um caso especifico onde ocorrem muitas simplificações. Mesmo se considerarmos curvas menos específicas, já aumenta a dificuldade de calcular a curvatura. É preciso tentar generalizar o cálculo da variação do vetor normal $\mathbf{n}$ em uma dada direção. Um caminho que parece razoável é tentar expressá-la em relação a uma base já conhecida. Para isso, primeiro decompomos o vetor normal $\mathbf{n}$

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v}\frac{dv}{dt}\,.$$

Ou, definindo

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u} = \mathbf{n}_u \qquad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} = \mathbf{n}_v$$

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \mathbf{n}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{n}_v \frac{dv}{dt} \ .$$

É possível observar que $\mathbf{n}_u$ e $\mathbf{n}_v$ são tangentes a superfície. Sabemos que

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \equiv 1$$

$$\frac{d(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})}{du} = \mathbf{n}_u \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_u = 0 \ .$$

Isso só será verdade se **n e** $\mathbf{n}_u$ forem perpendiculares. Analogamente, provamos que **n e** $\mathbf{n}_v$ também tem a mesma relação. Logo, se tanto $\mathbf{n}_u$ e $\mathbf{n}_v$ são perpendiculares a **n**, eles pertencem ao plano tangente à superfície. Lembrando que $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$ também definem o plano tangente, podemos escrever $\frac{d\mathbf{n}}{dt}$ em termos do referencial $\{\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\}$, pois

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_u &= w_{11}\mathbf{r}_u + w_{21}\mathbf{r}_v \\ \mathbf{n}_v &= w_{12}\mathbf{r}_u + w_{22}\mathbf{r}_v \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ou em forma matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{n}_u \\ \mathbf{n}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Essa é a matriz Weingarten. Ela possui propriedades importantes [6]. Em especial para o nosso trabalho:

- A matriz W é diagonalizável.
- Seus auto-vetores são ortogonais, e representam as direções principais, no plano tangente, do ponto da superfície.
- Seus auto-valores são as curvaturas principais do ponto.

Para obtermos as direções principais no espaço cartesiano, é preciso levar em consideração a base a partir da qual a matriz foi calculada. Se essa base for $\mathbf{r}_u$ x $\mathbf{r}_v$, é preciso multiplicar os componentes dos auto-vetores por cada um dos vetores da base para sabermos as direções principais. Já as curvaturas mínima e máxima $k_1$ e $k_2$ são valores escalares que não dependem de base.

Finalmente, é possível relacionar a matriz de Weingarten com o tensor métrico (Eq. 2.6) e de curvatura (Eq. 2.8).

Como $\{\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\}$ pertencem ao plano tangente a um ponto, podemos afirmar

$$\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n} = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n} = 0$$

Diferenciando em $u$ e $v$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial u} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{r}_u \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial u} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n}_u \\
\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{r}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n}_u \\
\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v \partial u} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{r}_u \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v \partial u} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n}_v \\
\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v \partial v} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{r}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v \partial v} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n}_v
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

Utilizando as definições para os termos do tensor de curvatura dadas na Eq.2.7, temos

$$
\begin{aligned}
b_{11} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial u} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n}_u \\
b_{12} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n}_v \\
b_{21} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v \partial u} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n}_u \\
b_{22} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v \partial v} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n}_v
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

Substituindo Eq. 2.10 em Eq. 2.13

$$
\begin{aligned}
-b_{11} = \mathbf{r}_u \cdot (w_{11}\mathbf{r}_u + w_{21}\mathbf{r}_v) = w_{11}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_u + w_{21}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v \\
-b_{12} = \mathbf{r}_u \cdot (w_{12}\mathbf{r}_u + w_{22}\mathbf{r}_v) = w_{12}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_u + w_{22}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v \\
-b_{21} = \mathbf{r}_v \cdot (w_{11}\mathbf{r}_u + w_{21}\mathbf{r}_v) = w_{11}\mathbf{r}_v\mathbf{r}_u + w_{21}\mathbf{r}_v\mathbf{r}_v \\
-b_{22} = \mathbf{r}_v \cdot (w_{12}\mathbf{r}_u + w_{22}\mathbf{r}_v) = w_{12}\mathbf{r}_v\mathbf{r}_u + w_{22}\mathbf{r}_v\mathbf{r}_v
\end{aligned}
$$

Usando as definições do tensor métrico 2.5

$$
\begin{aligned}
-b_{11} = w_{11}a_{11} + w_{21}a_{12} \\
-b_{12} = w_{12}a_{11} + w_{22}a_{12} \\
-b_{21} = w_{11}a_{21} + w_{21}a_{22} \\
-b_{22} = w_{12}a_{21} + w_{22}a_{22}
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

Com isso, assumindo que conhecemos os tensores, temos um sistema linear com 4 incógnitas ($w_{11}$,$w_{12}$,$w_{21}$ e $w_{22}$) e 4 equações. Resolvendo e substituindo em Eq.2.11

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{n}_u \\ \mathbf{n}_v \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \begin{bmatrix} b_{12}a_{12} - b_{11}a_{22} & b_{11}a_{12} - b_{12}a_{11} \\ b_{22}a_{12} - b_{12}a_{22} & b_{12}a_{12} - b_{22}a_{11} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \end{bmatrix} \tag{2.15}
$$

Relacionando diretamente os tensores com Weingarten temos

$$-\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{21} \\ w_{12} & w_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Portanto, se $\{\mathbf{r}_u,\ \mathbf{r}_v\}$ forem ortonormais, existe uma relação direta entre Weingarten e o tensor de curvatura.

Outras características especiais ocorrem se ao invés de usarmos as derivadas parciais da parametrização como base $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$, adotarmos as direções principais. Como $\mathbf{dp}_1$ e $\mathbf{dp}_2$ são ortogonais entre si, ocorre que

$$a_{12} = a_{21} = b_{12} = b_{21} = 0$$

Logo, Eq. 2.15 passa a ter uma expressão muito mais simples, e ainda é possível associar os auto-valores, que são as curvaturas principais com o tensor métrico e o de curvatura,

$$\kappa_1 = \frac{b_{11}}{a_{11}}$$
$$\kappa_2 = \frac{b_{22}}{a_{22}}$$

## 2.4 Transformação de Coordenadas

Como visto, os valores expressos nos tensores métricos e de curvatura dependem de uma base de referencia. No nosso trabalho existe a necessidade de comparar valores de tensores relativos ao mesmo ponto, mas descritos com duas bases distintas, tanto para podermos expressar os tensores métricos e de curvaturas estimados em uma mesma base, como para avaliarmos as diferenças entre estas estimativas e valores obtidos analiticamente.

Até o momento, a superfície $\mathbf{r}$ foi definida como uma parametrização nas coordenadas $u$ e $v$. Mas podemos considerar também em relação a $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$, de forma que Eq. 2.2 fica

$$\mathbf{r}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (x(\tilde{u}, \tilde{v}),\ y(\tilde{u}, \tilde{v}),\ z(\tilde{u}, \tilde{v}))$$

Pela regra da cadeia, definimos $\mathbf{r}_{\tilde{u}}$ e $\mathbf{r}_{\tilde{v}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\tilde{u}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tilde{u}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} = \mathbf{r}_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \mathbf{r}_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \mathbf{r}_{\tilde{v}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tilde{v}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} = \mathbf{r}_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \mathbf{r}_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Assim, Eq. 2.5 na nova base assume o seguinte aspecto

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_{11} &= \mathbf{r}_{\tilde{u}}\mathbf{r}_{\tilde{u}} = (\mathbf{r}_u\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \mathbf{r}_v\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}).(\mathbf{r}_u\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \mathbf{r}_v\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}) \\
\tilde{a}_{12} &= \mathbf{r}_{\tilde{u}}\mathbf{r}_{\tilde{v}} = (\mathbf{r}_u\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \mathbf{r}_v\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}).(\mathbf{r}_u\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \mathbf{r}_v\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}) \\
\tilde{a}_{21} &= \mathbf{r}_{\tilde{v}}\mathbf{r}_{\tilde{u}} = (\mathbf{r}_u\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \mathbf{r}_v\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}).(\mathbf{r}_u\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \mathbf{r}_v\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}) \\
\tilde{a}_{22} &= \mathbf{r}_{\tilde{v}}\mathbf{r}_{\tilde{v}} = (\mathbf{r}_u\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \mathbf{r}_v\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}).(\mathbf{r}_u\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \mathbf{r}_v\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}) \ .
\end{aligned}
$$

Fazendo o produto e usando Eq. 2.5, chegamos a

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_{11} &= a_{11}\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} + a_{21}\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + a_{21}\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\
\tilde{a}_{12} &= a_{11}\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} + a_{21}\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + a_{21}\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \\
\tilde{a}_{21} &= a_{11}\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} + a_{21}\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} + a_{21}\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\
\tilde{a}_{22} &= a_{11}\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} + a_{21}\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} + a_{21}\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}\frac{\partial v}{d\partial} \ .
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

Com isso, temos uma forma de converter os valores do tensor métrico de uma base para outra. Para fazer uma associação que vai ser importante, escrevemos na forma matricial

$$
\begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{bmatrix} \ . \tag{2.19}
$$

As matrizes multiplicando o tensor são, respectivamente, de acordo com Carmo et al[6], $J(\tilde{u},\tilde{v})^T$ e $J(\tilde{u},\tilde{v})$ onde $J$ é matriz Jacobiana de mudança de coordenadas. É possível fazer uma demonstração análoga para tensores de curvatura, obtendo as mesmas expressões análogas para $b_{11}$, $b_{12}$, $b_{21}$ e $b_{22}$.

As expressões acima foram deduzidas assumindo duas parametrizações de uma superfície em torno do mesmo ponto. Ou seja de tal forma que $\{\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\}$ e $\{\mathbf{r}_{\tilde{u}},\mathbf{r}_{\tilde{v}}\}$ sejam bases do mesmo plano tangente. Entretanto, como o objetivo do nosso trabalho envolve deformações, surgirá a necessidade de comparações em planos distintos. Mesmo para o cálculo das propriedades de uma malha estática só envolve sempre o mesmo plano quando se considera aproximações.

Rusinkiewicz em [5] propõe projeções dos eixos das bases como uma forma de converter os valores. Entretanto esse conceito só é válido quando {u,v} e $\{\tilde{u},\tilde{v}\}$ pertencem ao mesmo plano, no caso a tangente do ponto sendo considerado na superfície. Quanto esse não é caso, Rusinkiewicz propõe um primeiro passo de rotação da bases para que estejam no mesmo plano e só então as projeções. Isso introduz um erro nas contas, que depende do ângulo entre os planos. Se forem pequenos, o erro é pequeno e aceitável. Entretanto, no nosso trabalho, é esperado que ao deformar a superfície, os planos tangentes em instantes distintos, para o mesmo ponto da malha, possam ser muito diferentes entre si. Com isso a técnica proposta não satisfaz as nossas necessidades.

Para resolver esse obstáculo, foi proposta uma forma alternativa de fazer a conversão dos valores, aproveitando a matriz Jacobiana em Eq. 2.19. Supondo que se tenha duas bases $B = (u,v,w)$ e $\tilde{B} = (\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})$

$$B = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix} \qquad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_x & \tilde{v}_x & \tilde{w}_x \\ \tilde{u}_x & \tilde{v}_y & \tilde{w}_y \\ \tilde{u}_z & \tilde{v}_z & \tilde{w}_z \end{bmatrix}$$

e se quer converter os tensores da $B$ para $\tilde{B}$. A matriz $J$ necessária é

$$J(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{w}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{w}} \\ \frac{\partial w}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial w}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial w}{\partial \tilde{w}} \end{bmatrix}$$

Para calcular os valores de $J(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$

$$B \quad = \quad \tilde{B}.J(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \qquad \Longrightarrow \qquad J(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \quad = \quad \tilde{B}^{-1}B$$

Logo, conhecendo as bases $B$ e $\tilde{B}$ é possível ter os valores das diferenciais para converter os tensores usando 2.18. Esses valores são a matriz 2x2 contida no canto esquerdo superior de $J$.

## 2.5 Algorítimo

Até agora vimos como calcular os tensores métrico e de curvatura partindo de parametrizações da superfície do tipo $\mathbf{r}(u, v)$. Entretanto os objetos que desejamos trabalhar são superfícies representadas por uma malha discretizada de topologia arbitrária, compostas por vértices e arestas. Também se espera que a forma dessa malha não tenha parametrização conhecida, especialmente na medida que vai-se avançando nas iterações da simulação física. Se torna portanto necessário usar técnicas de geometria diferencial para domínios discretos. O algorítimo implementado para a estimação dos tensores de curvatura e métrico de uma malha arbitrária é bem semelhante ao descrito e implementando por Batagelo e Wu [7], que por sua vez tem como ponto de partida a implementação de Rusinkiewicz [5].

O primeiro passo é estimar as normais de todos os vértices da malha. Usamos um dos métodos mais simples [8] que consiste em fazer a média de todas as normais das faces conectadas ao vértice. Embora simples, essa técnica produz bons resultados e é bem eficiente computacionalmente já que a estimativa das normais de cada face pode ser feita com um simples produto vetorial das arestas.

$$\mathbf{n}_v = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{N}_i}{|\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{N}_i|}$$

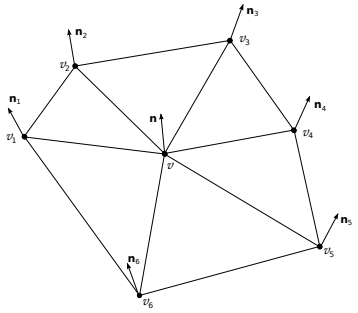



Figura 2.4: Malha ao redor do um vértice $v$

Representando cada aresta conectada a $v$ como $\mathbf{e}_i = v_i - v$ e com as normais calculadas, pode-se começar a estimar a variação do vetor normal $\mathbf{n}_i$ para cada $\mathbf{e}_i$, como se a aresta representa-se o vetor tangente de uma curva qualquer passando pelo vértice (Figura 2.4). Na descrição do domínio contínuo feita anteriormente, o vértice $v$ representa o ponto $\mathcal{P}$ sendo considerado, e cada aresta a tangente de uma curva $\alpha(t)$ pertencente a superfície.

É preciso uma base de referencia. Para tal é escolhida uma aresta como $\mathbf{e}_0$ e, em conjunto com a normal, é determinada uma base ortonormal $\{\mathbf{t},\mathbf{b},\mathbf{n}\}$, com origem em $v$

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{\mathbf{e_0}}{|\mathbf{e_0}|} && (2.20)\\ \mathbf{b} &= \mathbf{n} \times \mathbf{t} && (2.21)\\ \mathbf{n} &= \mathbf{n} \quad , \end{aligned}$$

Como $\mathbf{e}_i$ é considerado como um $\frac{d\alpha(t)}{dt}$, as variações em relação a referência escolhida podem ser expressas como

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &\approx \mathbf{t}\Delta t + \mathbf{b}\Delta b = \mathbf{t}t_i + \mathbf{b}b_i && (2.22)\\ &= \mathbf{t}t_i + \mathbf{b}b_i \qquad , \end{aligned}$$

que nada mais é que uma discretização da Eq. 2.3. Mas pensando na aresta novamente como um vetor, ele pode ser representado como componentes obtidas por projeções na base

$$\begin{aligned} t_i &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{t}\\ b_i &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

Discretizando agora

$$IIFF(\alpha(t) \cdot d_{\alpha(t)}\mathbf{n}) = S(\alpha(t)) \cdot dr$$

$$d_{\mathbf{e}_i}\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i \approx w_{11}t_it_i + w_{12}t_ib_i + w_{21}b_it_i + w_{22}b_ib_i$$

Escrevendo IIFF em função dos vetores $(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{t})\mathbf{t}$, $(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}$ e $\mathbf{e}_i$

$$
\begin{aligned}
d_{(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{t})\mathbf{t}}\mathbf{n}\cdot((\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{t})\mathbf{t}) &\approx ((\mathbf{n}_i-\mathbf{n})\cdot\mathbf{t})t_i = \Delta\mathbf{n}_{i,t}t_i \approx w_{11}t_i^2 + w_{12}t_ib_i \\
d_{(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{b})\mathbf{b}}\mathbf{n}\cdot((\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{b})\mathbf{b}) &\approx ((\mathbf{n}_i-\mathbf{n})\cdot\mathbf{b})b_i = \Delta\mathbf{n}_{i,b}w_i \approx w_{21}b_it_i + w_{22}b_i^2 \\
d_{\mathbf{e}_i}\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_i &\approx ((\mathbf{n}_i-\mathbf{n})\cdot\mathbf{t})t_i + ((\mathbf{n}_i-\mathbf{n})\cdot\mathbf{b})w_i = \Delta\mathbf{n}_{i,t}t_i + \Delta\mathbf{n}_{i,b}b_i \\
&\approx w_{11}t_i^2 + 2w_{12}t_ib_i + w_{22}b_i^2 \qquad (2.23)
\end{aligned}
$$

De acordo com Eq. 2.14

$$
\begin{aligned}
w_{12} &= \frac{b_{11}a_{12} - b_{12}a_{11}}{a_{11}a_{22} - (a_{12})^2} \\
w_{21} &= \frac{b_{22}a_{12} - b_{12}a_{11}}{a_{11}a_{22} - (a_{12})^2}\,,
\end{aligned}
$$

como o sistema $\{\mathbf{t},\mathbf{b},\mathbf{n}\}$ é um sistema ortonormal escolhido por gerar um tensor métrico característico

$$
\left.\begin{aligned} a_{11} = a_{22} = 1 \\ a_{12} = a_{21} = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow w_{12} = w_{21} = b_{12} \qquad (2.24)
$$

A Eq. 2.23 representa a curvatura da malha para cada aresta $\mathbf{e}_i$. Para tornar possível resolver o sistema, assim como tornar os resultados computacionalmente mais robustos, cada aresta tem um peso igual na contribuição do cálculo da segunda forma fundamental.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1}\Delta\mathbf{n}_{i,t}t_i &= b_{11}\sum_{i=0}^{n-1}t_i^2 + b_{12}\sum_{i=0}^{n-1}t_ib_i \\
\sum_{i=0}^{n-1}\Delta\mathbf{n}_{i,b}b_i &= b_{21}\sum_{i=0}^{n-1}b_it_i + b_{22}\sum_{i=0}^{n-1}b_i^2 \\
\sum_{i=0}^{n-1}\Delta\mathbf{n}_{i,t}t_i + \sum_{i=0}^{n-1}\Delta\mathbf{n}_{i,b}b_i &= b_{11}\sum_{i=0}^{n-1}t_i^2 + b_{12}\sum_{i=0}^{n-1}(t_ib_i + b_it_i) + b_{22}\sum_{i=0}^{n-1}b_i^2.
\end{aligned}
$$

Com o tensor de curvatura, é importante lembrar que a base $\{\mathbf{t},\mathbf{b},\mathbf{n}\}$ é ortonormal, o que implica em um tensor métrico com forma de matriz identidade. Por 2.16 sabemos então a relação direta entre esse tensor e matriz de Weingarten. Logo pelos autovalores do tensor calculado pela malha, é possível determinar as curvaturas do vértice $v$, e pelos autovetores, as direções principais na base $\{\mathbf{t},\mathbf{b},\mathbf{n}\}$.

Entretanto, este tensor métrico como expresso em 2.24 não serve para termos uma medida da deformação da malha, justamente por depender da base $\mathbf{\{t,b,n\}}$, que é normalizada independente to tamanho das arestas sendo processadas. É preciso então, para o tensor métrico, escolher uma base que reflita as deformações de alteração de área da superfície. Para tal, são escolhidos, no estado inicial, dois vértices vizinhos que serão usados como referência constante. Para cada instante $t$, uma base $\mathbf{\{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{n\}}$ é determinada pela diferença entre cada um desses vértices e o vértice sendo processado no momento, e a normal.

Essa base não é ortonormal, e nos da uma medida da expansão e contração da área da superfície para cada região da discretização.

Finalmente, utilizando a técnica descrita em 2.4 convertemos os tensores de curvatura estimados anteriormente para essa nova base.

# 3 Trabalhos Correlatos

Muitos dos trabalhos para o cálculo de propriedades de geométrica diferencial como curvaturas em superfícies discretizadas possuem a limitação da topologia da malha, que é restrita a malhas retangulares. Outro limitação comum é não tratarem de pontos planares ou de curvaturas constantes, como planos e esferas. Os dois trabalhos mais relacionados com o nosso não possuem essas limitações. Szymon Rusinkiewicz [5] propõe uma técnica para calcular as curvaturas e direções principais de superfícies discretizadas em malhas de topologia arbitrária. Se atendo a apenas as curvaturas principais $\kappa_1$ e $\kappa_2$, que são grandezas numéricas que não dependem de um sistema de referencia, Rusinkiewicz não chega a lidar com tensores de curvatura ou métrico. A técnica proposta é semelhante a descrita em (2.5), mas considera cada face (ao invés de cada aresta) conectada ao vértice $v$ sendo processado. Para um caso como o representado na figura 2.4 por exemplo, são feitas 6 iterações, uma para cada face. Entretanto cada uma dessas iterações vai processar todas as arestas da respectiva face. No caso da topologia triangular, isso representa 3 arestas por face, mas esse é melhor caso. Outras topologias representam um processamento ainda mais pesado por face.

Batagelo e Wu[7] propõe uma simplificação dos cálculos, processando somente as arestas diretamente conectadas a $v$. Foi constatado que embora haja um aumento dos erros das estimativas, a precisão dos métodos ainda é comparável. Já o tempo gasto para a estimativa é reduzido pela metade quando usando apenas uma CPU, e reduz drasticamente quando implementando em GPUs.

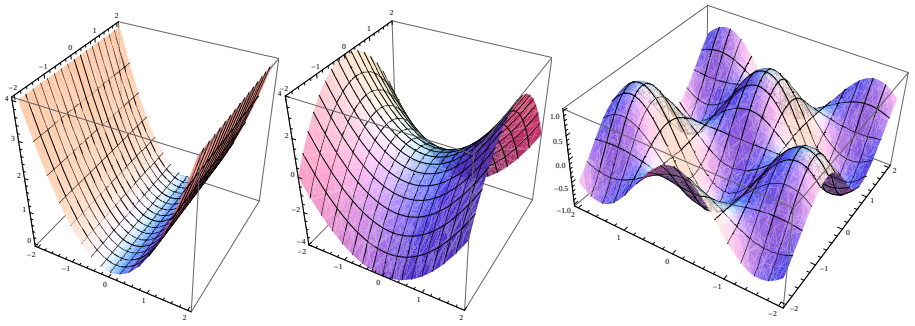
# 4 Resultados

Três superfícies parametrizadas foram utilizadas para uma análise dos resultados obtidos pelo algorítimo, com intuito de gerar pontos com certos comportamentos em termos de curvatura.

$$\begin{aligned} \textit{Parabólico}: \quad & \mathbf{p}(u,v,t) &&= (u,\, v,\, t.v^2) \\ \textit{Hiperbólico}: \quad & \mathbf{h}(u,v,t) &&= (u,\, v,\, t.(u^2 - v^2)) \\ \textit{Elíptico}: \quad & \mathbf{e}(u,v,t) &&= (u,\, v,\, t.(sen(2u).cos(2v))) \,, \end{aligned}$$

onde $u$ e $v$ representam as variáveis de parametrização das deformações desejadas, e $t$ um fator para simular uma alteração da deformação em função do tempo.

$$\begin{aligned} -2 \leq \quad & u \quad \leq 2 \\ -2 \leq \quad & v \quad \leq 2 \\ 0 \leq \quad & t \quad \leq 1 \end{aligned}$$



(a) (b) (c)

Figura 4.1: Superfícies de controle para *t=1*: a) $\mathbf{p}(u,v,t)$, b) $\mathbf{h}(u,v,t)$, c) $\mathbf{e}(u,v,t)$

Para fazer uma avaliação simbólica, os cálculos são feitos de ordem inversa do que no algorítimo implementado. Fazendo as derivações das equações conhecidas, obtemos $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$e $\mathbf{n}$ para qualquer ponto pertencente a superfície. É possível então calcular os tensores métrico e de curvatura, bem como a matriz de Weingarten. Os valores obtidos tem como base $\{\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v, \mathbf{n}\}$ logo, é necessário utilizar a técnica discutida em (2.4) para comparar com os tensores obtidos pelo algorítimo, que tem como base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{n}\}$ do ponto sendo considerado. Estes valores, obtidos de implementações diretas das equações obtidas, foram chamados de *Valores de Referencia.* Em anexo, esta um documento gerado no software *Wolfram Mathematica* 7.0, que exemplifica para uma superfície com parametrização conhecida, como são obtidas as equações do tensores.

Para a determinação do erro, essas equações foram implementadas e comparadas com os valores estimados pela nossa técnica proposta, em uma malha adotando uma malha com discretização de 20 x20 subdivisões.

## 4.1 Diferenças entre tensores computados e os valores de referencia

É importante observar aqui que todos os valores apresentados tem com base de referencia as direções principais. Os valores calculados utilizando as equações dos tensores obtidas no *Mathematica*, que possuem $\{\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v, \mathbf{n}\}$ como base, são convertidos para a a base $\{\mathbf{dp}_1,\mathbf{dp}_2, \mathbf{n}\}$ de cada vértice processado.

### 4.1.1 Tensor Métrico

Nas figuras 4.2, 4.3 e 4.4, são representados em pontos vermelhos os vértices onde foram encontrados erros maiores que o valor de corte 0.01, em $a_{11}$, $a_{12}$ ou $a_{22}$.

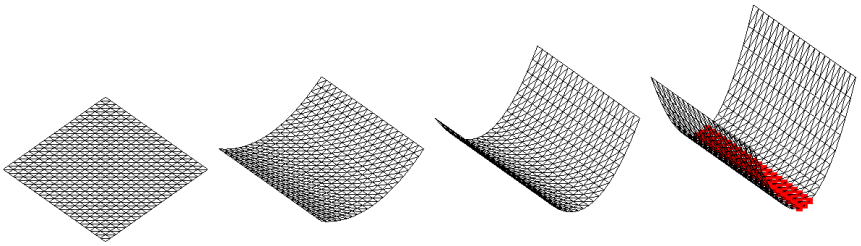


Figura 4.2: Erros Tensor Métrico > 0.0005, $\mathbf{p}(u,v,t)$ t=(0;0,3;0,6;1)

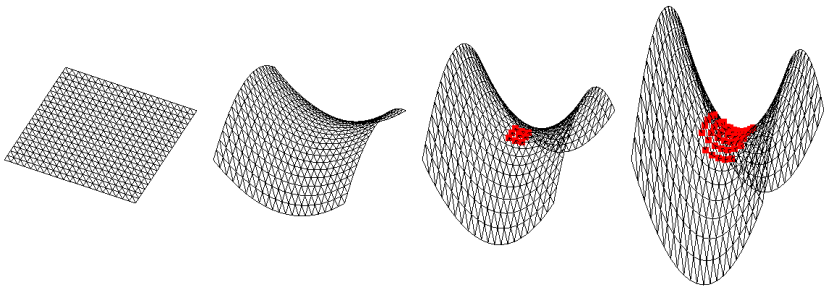


Figura 4.3: Erros Tensor Métrico > 0.0005, $\mathbf{h}(u,v,t)$ t=(0;0,3;0,6;1)

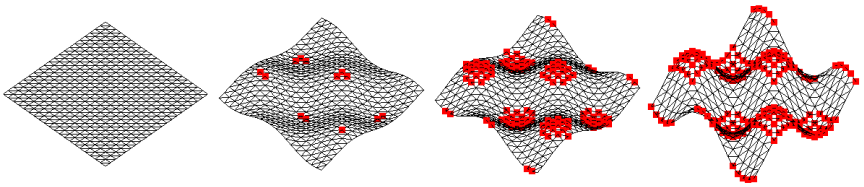


Figura 4.4: Erros Tensor Métrico > 0.0005, $\mathbf{e}(u,v,t)$ t=(0;0,3;0,6;1)

É possível observar que os erros ocorrem nos pontos de maior de curvatura, que é um comportamento não surpreendente já que quanto mais acentuada a curvatura, maior o erro introduzido pelas aproximações e pela discretização. Outro comportamento esperado é que nas regiões de fronteira da malha, onde existem menos vértices vizinhos para serem computados, existem mais erros. Variando no tempo, percebe-se também um aumento nos erros já que passa-se de uma configuração plana para uma configuração curvilínea.

Utilizando 5 casa decimais, os erros absolutos médios para o tensor métrico, mostrados para cada malha são mostrado na Tabela 4.1.

| | $E_{médio}a_{11}$ | $E_{médio}a_{12}$ | $E_{médio}a_{22}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{p}(u,v,t)$ | 0 | 0 | 0 |
| $\mathbf{h}(u,v,t)$ | 0 | 0 | 0 |
| $\mathbf{e}(u,v,t)$ | 0 | 0 | 0 |

(a) t=0

| | $E_{médio}a_{11}$ | $E_{médio}a_{12}$ | $E_{médio}a_{22}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{p}(u,v,t)$ | 0.00010 | 0 | 0 |
| $\mathbf{h}(u,v,t)$ | 0.00148 | 0.00012 | 0.00155 |
| $\mathbf{e}(u,v,t)$ | 0.00012 | 0.00088 | 0.00366 |

(b) t=0.3

| | $E_{médio}a_{11}$ | $E_{médio}a_{12}$ | $E_{médio}a_{22}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{p}(u,v,t)$ | 0.00027 | 0 | 0 |
| $\mathbf{h}(u,v,t)$ | 0.00008 | 0.00012 | 0.00237 |
| $\mathbf{e}(u,v,t)$ | 0.00036 | 0.00227 | 0.00949 |

(c) t=0.6

| | $E_{médio}a_{11}$ | $E_{médio}a_{12}$ | $E_{médio}a_{22}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{p}(u,v,t)$ | 0.00051 | 0 | 0 |
| $\mathbf{h}(u,v,t)$ | 0.00022 | 0.00014 | 0.00277 |
| $\mathbf{e}(u,v,t)$ | 0.00068 | 0.00324 | 0.00070 |

(d) t=1

Tabela 4.1: Erros médios absolutos para tensor métrico

### 4.1.2 Tensor de Curvatura

Nas figuras 4.5, 4.6 e 4.7, são representados em pontos vermelhos os vértices onde foram encontrados erros maiores que um valor de corte 0.2, em $b_{11}$, $b_{12}$ ou $b_{22}$.

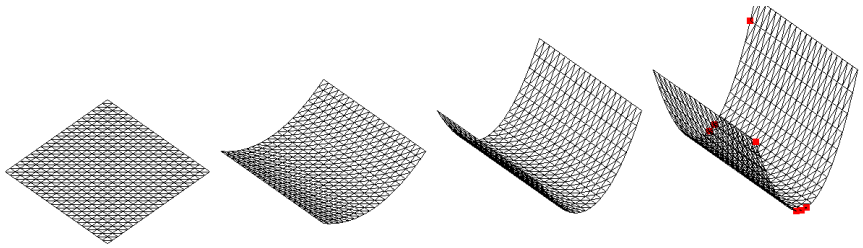


Figura 4.5: Erros Tensor Curvatura $>$ 0.01, $\mathbf{p}(u,v,t)$ t=(0;0,3;0,6;1)

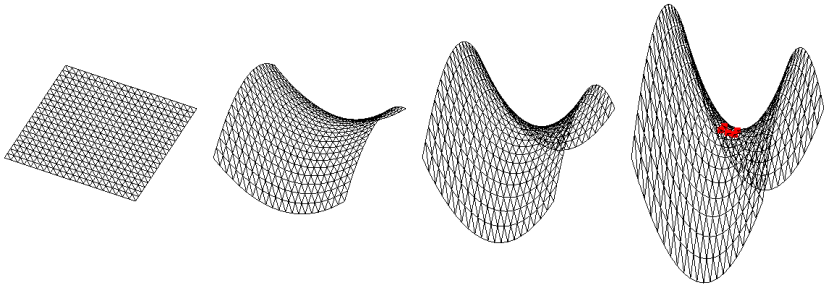


Figura 4.6: Erros Tensor Curvatura $> 0.01$, $\mathbf{h}(u,v,t)$ t=(0;0,3;0,6;1)

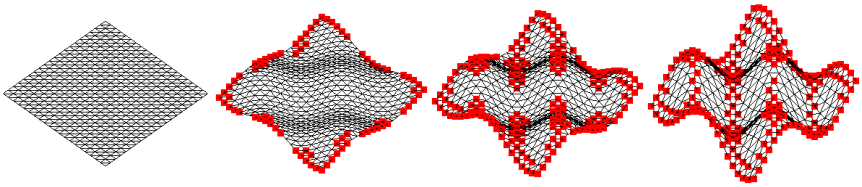


Figura 4.7: Erros Tensor Curvatura $> 0.01$, $\mathbf{e}(u,v,t)$ t=(0;0,3;0,6;1)

É possível observar que os erros nas regiões limites da malha continuam se mostrando acentuados, especialmente no caso de $\mathbf{e}(u,v,t)$. A Tabela 4.2 apresenta os erros médios das estimativas dos tensores métrico e de curvatura, com uma precisão de 5 casas decimais. É possível observar que os erros médios só se tornam mais consideráveis no caso de $\mathbf{e}(u,v,t)$, o que é esperado já que essa superfície possui muitos mais pontos com curvatura acentuada.

| | $E_{médio}b_{11}$ | $E_{médio}b_{12}$ | $E_{médio}b_{22}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{p}(u,v,t)$ | 0 | 0 | 0 |
| $\mathbf{h}(u,v,t)$ | 0 | 0 | 0 |
| $\mathbf{e}(u,v,t)$ | 0 | 0 | 0 |

(a) t=0

| | $E_{médio}b_{11}$ | $E_{médio}b_{12}$ | $E_{médio}b_{22}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{p}(u,v,t)$ | 0.00114 | 0.00017 | 0.00008 |
| $\mathbf{h}(u,v,t)$ | 0.00109 | 0.00032 | 0.00114 |
| $\mathbf{e}(u,v,t)$ | 0.00438 | 0.00326 | 0.00383 |

(b) t=0.3

| | $E_{médio}b_{11}$ | $E_{médio}b_{12}$ | $E_{médio}b_{22}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{p}(u,v,t)$ | 0.001689 | 0.00024 | 0.00012 |
| $\mathbf{h}(u,v,t)$ | 0.00141 | 0.00049 | 0.00155 |
| $\mathbf{e}(u,v,t)$ | 0.00813 | 0.00576 | 0.00726 |

(c) t=0.6

| | $E_{médio}b_{11}$ | $E_{médio}b_{12}$ | $E_{médio}b_{22}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{p}(u,v,t)$ | 0.00051 | 0.0003 | 0.00015 |
| $\mathbf{h}(u,v,t)$ | 0.00169 | 0.00065 | 0.00196 |
| $\mathbf{e}(u,v,t)$ | 0.01238 | 0.00914 | 0.01154 |

(d) t=1

Tabela 4.2: Erros médios absolutos para tensor de curvatura

## 4.2 Pontos Críticos

Para se ter uma ideia melhor do comportamento e erros do algorítimo implementado, olhamos alguns pontos críticos das superfícies escolhidas. No caso de $\mathbf{p}(u,v,t)$ e $\mathbf{h}(u,v,t)$ foi escolhido o ponto onde $u=0$ e $v=0$. Já para $\mathbf{e}(u,v,t)$ o ponto $u=0.8$ e $v=0$. Para essa comparação, estaremos usando $t=1$. Os pontos estão destacados na 4.8.

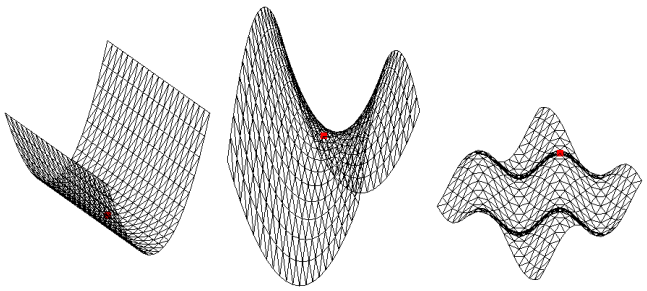


Figura 4.8: Pontos críticos escolhidos

| | Algorítimo | Referencia | Erro |
|---|---|---|---|
| $a_{11}$ | 0.0416 | 0.04 | 0.0016 |
| $a_{12}$ | 0 | 0 | 0 |
| $a_{22}$ | 0.04 | 0.04 | 0 |

(a) Tensor métrico

| | Algorítimo | Referencia | Erro |
|---|---|---|---|
| $b_{11}$ | 0.07212 | 0.08 | 0.00788 |
| $b_{12}$ | 0 | 0 | 0 |
| $b_{22}$ | 0 | 0 | 0 |

(b) Tensor de curvatura

Tabela 4.3: Erros no ponto crítico de $\mathbf{p}(u,v,t)$

| | Algorítimo | Referencia | Erro |
|---|---|---|---|
| $a_{11}$ | 0.0416 | 0.04 | 0.0016 |
| $a_{12}$ | 0 | 0 | 0 |
| $a_{22}$ | 0.0416 | 0.04 | 0.0016 |

(a) Tensor métrico

| | Algorítimo | Referencia | Erro |
|---|---|---|---|
| $b_{11}$ | 0.06989 | 0.08 | -0.01011 |
| $b_{12}$ | 0.00004 | 0 | 0.00004 |
| $b_{22}$ | -0.06974 | -0.08 | 0.01026 |

(b) Tensor de curvatura

Tabela 4.4: Erros no ponto crítico de $\mathbf{h}(u,v,t)$

| | Algorítimo | Referencia | Erro |
|---|---|---|---|
| $a_{11}$ | 0.04815 | 0.04199 | 0.00616 |
| $a_{12}$ | 0.00712 | 0.00094 | 0.00618 |
| $a_{22}$ | 0.04623 | 0.04002 | 0.00621 |

(a) Tensor métrico

| | Algorítimo | Referencia | Erro |
|---|---|---|---|
| $b_{11}$ | -0.08382 | -0.16704 | 0.08322 |
| $b_{12}$ | 0.011331 | -0.00375 | 0.00758 |
| $b_{22}$ | -0.08295 | -0.15974 | 0.07679 |

(b) Tensor de curvatura

Tabela 4.5: Erros no ponto crítico de $\mathbf{e}(u,v,t)$

Observando os erros apresentados nas Tabelas 4.3, 4.4 e 4.5, embora em alguns casos eles sejam consideráveis, esses são os piores casos presentes na malha, nos pontos onde é esperado que a avaliação discreta e numérica tenha mais dificuldades de se aproximar de um resultado obtido com parametrizações

das superfícies. Apesar das discrepâncias, os valores computados não indicam tipos diferentes de curvaturas do que aquelas esperadas.

## 4.3 Regiões de fronteiras

Uma das observações constantes até o momento é a alta presença de erros na região de fronteira da malha. Para avaliar o impacto que esses erros tem nos erros médios calculados até o momento, foi pego um caso de $\mathbf{e}(u,v,t)$ com $t=1$, com uma malha 20x20, e computado o erro médio excluindo os vértices da fronteira da malha. O resultados estão apresentados na Tabela 4.6.

| Malha | $E_{médio}a_{11}$ | $E_{médio}a_{12}$ | $E_{médio}a_{22}$ |
|---|---|---|---|
| Com fronteira | 0.00068 | 0.00324 | 0.00070 |
| Sem fronteira | 0.00072 | 0.00071 | 0.00072 |

(a)

| Malha | $E_{médio}b_{11}$ | $E_{médio}b_{12}$ | $E_{médio}b_{22}$ |
|---|---|---|---|
| Com fronteira | 0.01238 | 0.00914 | 0.01154 |
| Sem fronteira | 0.00850 | 0.00723 | 0.00936 |

(b)

Tabela 4.6: Erros médios para $\mathbf{e}(u,v,1)$, com e sem a região de fronteira

Para o tensor métrico, a contribuição do erro na região de fronteira ou é pequena ou mesmo negativa. Já para o tensor de curvatura embora ela tenha uma contribuição não desprezível, não chega a alterar a validade dos resultados e como um todo tem uma contribuição menor do que o que pode dar a impressão visualmente.

Infelizmente, o problema da região de fronteira não é de fácil solução, já que esses limites inevitáveis quando estamos trabalhando com domínios discretos e finitos vão sempre gerar um conjunto de vértices que tem menos arestas adjacentes, e portanto menos dados para o algorítimo computar os tensores. Apesar disso, nosso algoritmo utiliza todos os dados disponíveis e consegue estimativas razoáveis.

## 4.4 Comparação entre técnicas para cômputo de tensores de curvatura

O primeiro resultado avaliado é uma comparação, em relação aos valores de referencia para $\mathbf{e}(u,v,t)$, em $t=1$, entre o algorítimo descrito por Rusinkiewicz [5]e o nosso. Foram feitos três testes, para malhas com 440, 960 e 1680 pontos. Também foram realizadas 10 iterações do algorítimo, para comparar os valores ao longo do tempo decorrido. Para aprimorar a comparação das diferenças, vamos observar apenas as curvaturas máximas e mínimas ($k_1$e $k_2$) de cada ponto, já que esses números não dependem de base, e são extraídos dos auto-valores da matriz de Weingarten. Os resultados estão nas Tabelas 4.7 e 4.8.

Na comparação com a proposta de Rusinkiewicz, os resultados são muito satisfatórios, com um algorítimo mais eficiente temporalmente, e que ao mesmo tempo é mais preciso.

| Malha | $E_{médio}k_1$ | $E_{médio}k_2$ | $E_{médio}k_1$ Russ | $E_{médio}k_2$ Russ |
|---|---|---|---|---|
| 440 | 0,31 | 0,19 | 0,67 | 0,37 |
| 960 | 0.18 | 0,10 | 0,40 | 0,21 |
| 1680 | 0,12 | 0,06 | 0,26 | 0,13 |

Tabela 4.7: Erros do nosso algorítimo e de Rusinkiewicz

| Malha | $\triangle t_{médio}$ (ms) | $\triangle t_{médio}$ Russ (ms) |
|---|---|---|
| 440 | 40,9 | 60,5 |
| 960 | 89,1 | 133,5 |
| 1680 | 173,2 | 236,4 |

Tabela 4.8: Desempenho do nosso algorítimo e de Rusinkiewicz

## 4.5 A base {t,b,n}

Na técnica proposta, a escolha da aresta que vai gerar o vetor base **t** da Eq. 2.20 afeta as estimativas dos tensores de curvatura. Na Figura 4.9 são mostradas duas arestas possíveis na superfície **e***(u,v,t)*.

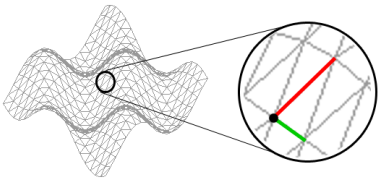


Figura 4.9: Dois exemplos para o vetor **t**

O algoritmo da forma atual usou, para o ponto indicado, a aresta verde ($e_0$) como base para o sistema {**t,b,n**}. Devido a forma como a malha foi criada, as arestas para os demais pontos estão sempre sendo escolhidas nesse sentido. Se isso for alterado para arestas com a direção da vermelha ($e_1$), as estimativas dos tensores se alteram como indicado na Tabela 4.9.

| **t** | $E_{médio}b_{11}$ | $E_{médio}b_{12}$ | $E_{médio}b_{22}$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{\mathbf{e_0}}{\lvert\mathbf{e_0}\rvert}$ | 0.01238 | 0.00914 | 0.01154 |
| $\frac{\mathbf{e_1}}{\lvert\mathbf{e_1}\rvert}$ | 0.01243 | 0.01033 | 0.01225 |

Tabela 4.9: Erros médios das estimativas para o tensor curvatura, alterando o vetor **t**

Todos os erros estão próximos nas duas situações comparadas, o que nos leva a concluir que o algoritmo está robusto e consegue gerar boas estimativas para o tensor de curvatura independente da aresta escolhida para gerar o referencial **{t,b,n}**.

# 5 Conclusão

No trabalho de Batagelo e Wu [7], foi constatado que a técnica utilizada gerava resultados menos precisos que no de Rusinkiewicz et al [5], mas em um tempo 50% menor, considerando apenas processamento em CPUs. Nossa contribuição para a evolução da técnica apresentada, em especial com a introdução de um novo método para transformação de tensores (2.4), está resultando em estimativas mais precisas que a de Rusinkiewicz, em um tempo 33% menor. Esse tempo também incluí a estimativa dos tensores métricos, que é algo que não é feito em nenhum dessas duas propostas anteriores.

Entretanto, apesar de estar produzindo resultados numéricos que nos deixam confiantes para prosseguir para as próximas partes do trabalho, em termos de tempo de processamento nós ainda não temos condições de gerar animações em tempo real. Felizmente, existem amplas oportunidades para melhorar o desempenho da nossa proposta. O algoritmo de estimativas de propriedades geométricas é altamente paralelizável, já que todos os cálculos só dependem do estado anterior da malha. Assim para cada instante $t_i$, todos os vértices podem ser processados de maneira independente. Para uma redução mais significativa, podemos, como proposto por Batagelo e Wu [7], implementar a técnica em GPU, que se seguir um comportamento semelhante, vai ser mais do que suficiente para animações em tempo real.

Com os erros das estimativas de tensores inspirando confiança, e soluções concretas para os problemas restantes, prosseguimos para as partes seguintes do trabalho, com a meta de implementar, utilizando a teoria de superfícies de Cosserat [2], simulações de tecidos.

# Referências


[1] Wu Shin-Ting. Technical Report DCA11-01: DeSMo – Deformable Surface Modeling

[2] A. E. Green, P.M. Naghdi, e W.L. Wainwright. A general theory of a cosserat surface. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 20:287-308, 1965

[3] Vanio Fragoso de Melo. Modelagem e Controle de Caimento e Dobras em Superfícies Deformáveis. Tese de Doutorado, FEEC/Universidade Estadual de Campinas, 2004.

[4] Leandro de Pinho Monteiro. Soluções Numéricas em um Modelo de Tecidos Baseado na Superfície de Cosserat. Tesde de Mestrado, FEEC/Universidade Estadual de Campinas, 2008.

[5] Szymon Rusinkiewicz. Estimating Curvatures and Their Derivatives on Triangle Meshes. Symposium on 3D Data Processing, Visualization, and Transmission, Sep/2004

[6] Carmo, M. P. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, 2005. ISBN: 85-85818-26-3

[7] Batagelo, H. C.; Wu, S. T.; Estimating Curvatures and Their Derivatives on Meshes of Arbitrary Topology from Sampling Directions, The Visual Computer, 23:9-11, pp. 803-812, Springer, June 2007.

[8] Henri Gouraud. Continuous shading of curved surfaces. IEEE Tran- sactions on Computers, C-20(6):623{629, June 1971.