Algumas Reflexões sobre o Poder Computacional de Paradigmas Analógicos – Parte I: Fundamentos

Diogo Coutinho Soriano, Vanessa Brischi Olivatto, Daniel Guerreiro e Silva, Romis Attux

Departamento de Engenharia de Computação e Automação Industrial (DCA)
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC)
Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)
Caixa Postal 6101, CEP 13083-852 – Campinas, SP, Brasil

{soriano, vanessa, danielgs, attux}@dca.fee.unicamp.br

Abstract – In this two-part work, we will discuss the idea of analog computation and aspects of the relationship between the computational power of analog paradigms and classical Turing machines. The first part brings an outline of the paper as a whole, which is followed by an exposition of the concept of analog computation and of representative approaches based thereon.

Keywords – Analog computing, Turing machines, computability, neurocomputing.

1. Introdução

Os trabalhos de Alonzo Church, Emil Post e Alan Turing [1], realizados na primeira metade do século XX, foram cruciais para uma adequada formalização do conceito matemático de computabilidade. O trabalho de Turing [2], em particular, tornou-se central no que se refere à descrição de processos algorítmicos, tendo sido tipicamente adotado no âmbito de diferentes definições ligadas à idéia de complexidade [3] e [4].

Entretanto, como é claramente exposto no supracitado artigo de Turing, o modelo formal de computação por ele adotado possui um caráter intrinsecamente discreto, o que, através de um processo de numeração que evoca a estratégia utilizada por Kurt Gödel [5], estabelece uma relação direta entre a cardinalidade dos números naturais e a estrutura do conjunto de números computáveis segundo o modelo proposto. Uma extensão dessa idéia, aliada à aplicação de um procedimento de diagonalização conceitualmente similar ao presente no célebre argumento de Cantor acerca da cardinalidade dos reais [6], termina por lançar as bases da prova fornecida por Turing para a insolubilidade do *Entscheidungsproblem* [2]. Essa prova se reflete, modernamente, na insolubilidade do chamado problema da parada (*halting problem*) [7].

Torna-se, destarte, relevante perguntar: até que ponto o caráter intrinsecamente discreto de seu modelo – que leva, como dito, a uma relação direta com a cardinalidade dos naturais – "limita" o poder computacional associado a uma máquina de Turing (e também aos modernos computadores digitais)? Dessa pergunta surge quase imediatamente outra: o que se poderia obter, em termos computacionais, caso fosse empregado um paradigma computacional organicamente baseado na estrutura dos números reais?

A busca pela resposta a essa pergunta traz à baila uma possibilidade concreta: a de que paradigmas analógicos de computação possam ser opções interessantes ao paradigma digital reinante do ponto de vista do que poderíamos chamar de "poder computacional". Na primeira parte deste trabalho, discutiremos brevemente a idéia geral de computação analógica e apresentaremos alguns paradigmas clássicos dessa vertente. Na segunda parte do trabalho, após uma breve exposição do conceito de máquina de Turing, discutiremos alguns resultados teóricos que estabelecem, em certa medida, comparações entre o poder desse dispositivo e de dispositivos analógicos. Finalmente, analisaremos uma abordagem computacional baseada num sistema dinâmico caótico de tempo discreto e teceremos uma série de ponderações finais.

2. Computação Analógica

Tradicionalmente, a teoria de computação é dividida em duas famílias fundamentais quanto ao modo de operação dos seus dispositivos. O primeiro ramo descende diretamente da idéia primitiva do ábaco e da representação de números por meio de dígitos para efetuar o processo de computação. Em contrapartida, a segunda família baseia-se conceitualmente em analogias com grandezas contínuas de sistemas físicos (por exemplo, sistemas hidráulicos ou elétricos) tais como o comprimento de linhas ou mesmo tensões elétricas, e, por isso, são chamados de computadores por analogia, ou computadores analógicos [8].

Os primórdios da computação analógica se confundem com o início da computação em si. O primeiro dispositivo de computação analógica que se conhece é o mecanismo Antikythera, datado de 2 a.C. e que permitiria calcular os movimentos da Lua, Sol e outros planetas [9]. Já no século XVII, podiam ser encontradas elaboradas calculadoras analógicas capazes de multiplicar dois números por meio da representação de seus logaritmos como posições de barras deslizantes [9]. Outros computadores analógicos populares até o século XIX eram os chamados nomogramas, que consistiam em gráficos contínuos capazes de fornecer o valor de determinadas variáveis ou mesmo fazer contas rápidas (mas não tão precisas) mediante o conhecimento *a priori* dos demais parâmetros envolvidos no processo de computação (e.g. a carta de Smith usada na solução de problemas de casamento de impedâncias em linhas de transmissão elétricas). Durante o século XIX, chama a atenção a construção de computadores analógicos por J. H. Herman e posteriormente por J. Amsler para a agrimensura. Neste caso, os computadores consistiam em dispositivos mecânicos integradores que permitiam calcular áreas com formatos geométricos relativamente complexos [8]. Outros exemplos são os dispositivos mecânicos construídos para tarefas como o cálculo de órbitas planetárias (Orrey, 1850) e predição de marés (Lord Kelvin, 1878).

No século XX, com a popularização da eletricidade bem como o advento de dispositivos eletrônicos mais versáteis tal como o amplificador operacional, tanto a computação analógica como a computação digital sofreram uma verdadeira revolução, impulsionada, sobretudo, após a Segunda Guerra Mundial.

No caso da computação analógica, a revolução eletrônica permitiu a construção de blocos computacionais básicos de forma relativamente simples - tais como multiplicadores, amplificadores, somadores, inversores, integradores, diferenciadores, entre outros dispositivos - o que possibilitou a extensão deste paradigma computacional para uma ampla gama de problemas. De fato, embora as circunstâncias do desenvolvimento tecnológico tenham levado à computação digital como o paradigma corrente na solução prática de problemas envolvendo computação, é importante ressaltar que, em diversos casos, o paradigma analógico se aproxima mais da realidade física do problema estudado, o que pode levar a diferenças fundamentais na forma de representação e manipulação da informação.

Neste contexto, faz-se necessário um exame cuidadoso das reais potencialidades em termos de poder computacional e da adequação de cada um desses paradigmas na solução de um determinado problema. A seguir, apresentamos um exemplo, resultado do esforço de pesquisa relatado em [10], que ilustra o potencial de um computador analógico baseado em circuitos eletrônicos para lidar com um sistema complexo que modela certas facetas da operação de um neurônio biológico.

3. Sistemas dinâmicos, caos e paradigmas computacionais.

Um grande número de problemas em engenharia envolve a construção de modelos ou representações de processos físicos os quais se deseja entender, analisar ou controlar. Uma forma usual de descrição destes sistemas físicos é a construção de um mapeamento de estados por meio de um conjunto de equações diferenciais ou equações a diferenças.

Quando estes mapeamentos apresentam funções não-lineares das variáveis de estado - o que é bastante comum, dadas as características essencialmente não-lineares de mecanismos naturais como saturação, histerese, competição, cooperação, sinergia, entre diversos outros – tem-se um rico repertório de soluções possíveis dado por pontos fixos, ciclos-limite, soluções quase-periódicas ou mesmo caóticas [11].

Soluções caóticas despertam um interesse especial da comunidade científica devido a suas características singulares de aperiodicidade e extrema sensibilidade em relações às condições iniciais. Esta última em especial faz com que uma pequena incerteza no estado de partida seja amplificada por meio da aplicação das próprias equações de estado, o que pode tornar os inevitáveis erros de representação do ambiente de simulação digital significativos após um intervalo de tempo finito. Além disso, soluções de sistemas dinâmicos representados por sistemas de equações diferenciais usualmente requerem discretizações no tempo, ou seja, baseiam-se em uma aproximação numérica cuja análise rigorosa está longe de ser um procedimento trivial, especialmente quando se consideram sistemas de natureza caótica. Uma pergunta natural neste caso seria até que ponto os sucessivos erros de representação numérica do ambiente digital somados com as imprecisões introduzidas pelo processo de discretização temporal adotado pelo método numérico de solução são significativos quando um sistema opera em caos? De fato, é difícil no caso do paradigma digital diferenciar as imprevisibilidades intrínsecas de um sistema caótico daquelas geradas por artefatos numéricos da abordagem de solução adotada.

Uma solução alternativa e aparentemente mais adequada neste caso seria a simulação do sistema dinâmico por meio de uma analogia elétrica, ou seja, a criação de um circuito elétrico equivalente no qual as tensões de saída de nós específicos estejam associadas às soluções do sistema dinâmico, realizando assim, todo o procedimento de cálculo livre dos erros de representação do ambiente digital e com variáveis de estado contínuas, sem discretizações. A seguir, apresenta-se um exemplo prático que sintetiza esta abordagem.

4. Analisando sistemas dinâmicos por meio de computadores analógicos.

A fim de exemplificar o processo de construção de um computador analógico para a solução de sistemas dinâmicos considere, por exemplo, o modelo de FitzHugh-Nagumo [12]. Este sistema de equações diferenciais foi proposto para descrever qualitativamente o comportamento oscilatório da atividade elétrica de neurônios, sendo extremamente útil para o estudo da excitabilidade em sistemas biológicos. A excitabilidade faz referência à capacidade que alguns tipos de células têm de responder a determinados estímulos externos por meio do aparecimento ou não de um potencial de ação (sinal elétrico que se propaga pelas células e tecidos levando informação). O sistema proposto por FitzHugh é relativamente simples e pode ser descrito por:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= V - \frac{V^3}{3} - W + I(t) \\ \frac{dW}{dt} &= c \cdot (V + a - b \cdot W) \end{aligned} \qquad (1)$$

onde V é a variável de estado que representa o potencial de membrana, W é uma variável de recuperação, $I(t)$ é uma entrada externa e os parâmetros a, b, c são constantes que valem respectivamente 0.7, 0.8 e 0.1.

Dentro do paradigma de computação analógica, o sistema de equações diferenciais descrito em (1) pode ser resolvido a partir da combinação de circuitos integradores, amplificadores e multiplicadores, conforme mostrado na Figura 1. Neste caso, emprega-se o circuito integrado MPY634 (denotado pela cruz que simboliza o produto) para implementar a não-linearidade cúbica do modelo, bem como o circuito integrador de Miller (com o capacitor na malha de realimentação do amplificador operacional) para integrar as equações de estado.

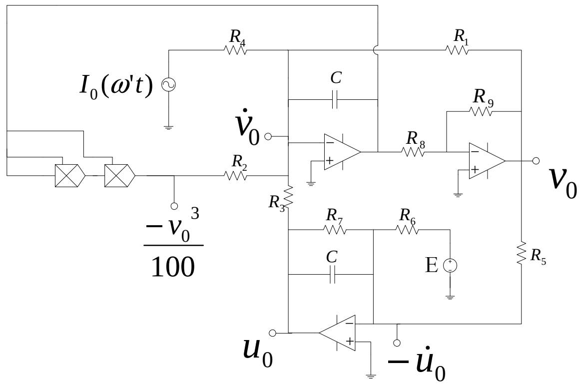

Figura 1 – Circuito analógico para a simulação do modelo de FitzHugh-Nagumo.

Na verdade, o circuito da Figura 1 resolve um sistema de equações análogo à (1) onde os devidos escalamentos na amplitude e no tempo das variáveis de estado foram realizados para a devida construção de seu análogo eletrônico [8]. Neste caso, o sistema de equações (1) é transformado no sistema equivalente:

$$\begin{aligned} \dot{v}_0 &= \frac{1}{CR_b}\left[\alpha_1 v_0 - \alpha_2 \frac{v_0^3}{100} - \alpha_3 u_0 + \alpha_4 I\left(\frac{27}{100CR_b}\omega t\right)\right], \\ \dot{u}_0 &= \frac{1}{CR_b}\left[\alpha_5 v_0 + \alpha_6 - \alpha_7 u_0\right] \end{aligned} \qquad (2)$$

com $1/\alpha_1$ = 3.7, $1/\alpha_2$ = 1, $1/\alpha_3$ = 7.4, $1/\alpha_4$ = 1.23, $1/\alpha_5$ = 18.5, $1/\alpha_6$ = 8.8, $1/\alpha_7$ = 46.3. Assumindo E = − 1V no circuito e C = 2.2 nF e R_b = 1 kΩ, pode-se encontrar os valores nominais dos resistores na Figura 1 por meio da relação $R_x = (1/\alpha_x)R_b$, o que leva a: $R_1 \approx$ 3.7 kΩ, R_2 = 1 kΩ, $R_3 \approx$ 7.4 kΩ, $R_4 \approx$ 1.23 kΩ, $R_5 \approx$ 18.5 kΩ, $R_6 \approx$ 8.8 kΩ, $R_7 \approx$ 46.3 kΩ, R_8 = 10 kΩ, R_9 = 10 kΩ, e o sinal de excitação do sistema é dado por um gerador de funções trabalhando a freqüência ω'.

A Figura 2 mostra uma típica série temporal caótica e o plano de fase $V \times W$ que mostra o atrator estranho associado à solução do sistema dinâmico obtida quando $I(2\pi ft) = 0.34\cos(2\pi ft)$, onde f = 19 kHz. É curioso observar que esta dinâmica relativamente simples é capaz de apresentar muitos dos complexos padrões oscilatórios neuronais, como por exemplo, o chamado *bursting* de potenciais de ação [13] –

um trem de pulsos periódico de duração aparentemente aleatória – análogo ao comportamento intermitente clássico conforme definido na teoria de sistemas não-lineares.

A B

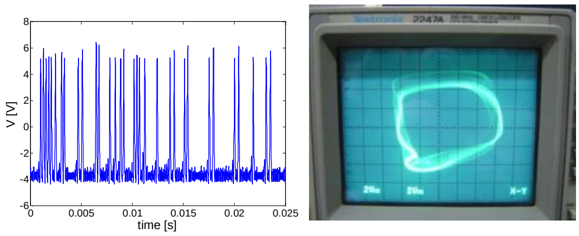

Figura 2 – O painel A mostra uma típica oscilação caótica para o potencial de membrana, enquanto o painel B evidencia o atrator estranho obtido no espaço de estados V×W.

Os resultados obtidos na simulação analógica mostrados na Figura 2 são análogos aos obtidos pela integração numérica das equações de estado em (2), o que revela uma boa capacidade de aproximação do paradigma digital, embora discrepâncias entre os paradigmas computacionais possam ser encontrados próximo a pontos de bifurcações, ou seja, quando alterações bem pequenas nos parâmetros do modelo implicam em mudanças significativas na estrutura topológica do atrator. Além disso, embora os padrões oscilatórios obtidos pelos diferentes paradigmas sejam semelhantes, é impossível que eles sejam exatamente iguais, o que decorre da própria natureza caótica da dinâmica. Isso faz com que seja difícil avaliar na prática até que ponto a representação finita e as aproximações da computação digital são relevantes, ou seja, quão fidedigna é a solução encontrada neste paradigma em relação à solução original do sistema dinâmico.

5. Discussão e conclusões

Nesta primeira parte, nossa meta foi discutir o conceito de computação analógica e apresentar um exemplo de sua aplicação ligado ao estudo de um sistema dinâmico com potencial de engendrar comportamento caótico, o modelo neuronal de Fitzhugh-Nagumo. Na segunda parte do trabalho, buscaremos tecer considerações mais aprofundadas sobre as relações entre o poder computacional de estruturas como a máquina de Turing e dispositivos capazes de realizar computação com números reais.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio técnico de M. L. C. Machado, E. Z. Nadalin, J. P. C. Cajueiro, J. M. T. Romano e R. Suyama na construção dos circuitos analógicos e o apoio financeiro da CAPES e do CNPq.

Referências

[1] W. Carnielli, R. Epstein, *Computabilidade, Funções Computáveis, Lógica e os Fundamentos da Matemática*, Editora da UNESP, 2009.
[2] A. M. Turing, “On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem”, Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2-42, pp. 230-265, 1936.
[3] J. Hartmanis, R. Stearns, “On the Computational Complexity of Algorithms”, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 117, pp. 285-306, 1965.
[4] G. Chaitin, “On the Difficulty of Computations”, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. IT-16, pp. 5 – 9, 1970.
[5] E. Nagel, J. R. Newman, *A Prova de Gödel*, Editora Perspectiva, 2003.
[6] S. Hawking, *God Created the Integers*, Running Press, 2007.
[7] R. Penrose, *A Mente Nova do Rei*, Editora Campus, 1991.
[8] A. S. Jackson, *Analog Computation*, McGraw-Hill, 1960.
[9] G. Ifrah, *The Universal History of Computing*, Wiley, 2001.
[10] M. L. C. Machado, Métodos Práticos de Análise de Sistemas Não-Lineares: uma Abordagem Digital e Analógica, relatório parcial de iniciação científica (PIBIC), 2011.
[11] L. H. A. Monteiro, *Sistemas Dinâmicos*, Mack Pesquisa, 2006.
[12] R. FitzHugh, “Impulses and physiological states in theoretical models of the nerve membrane”, Biophysical Journal, v.1, pp. 445-466, 1961.
[13] C. Koch, *Biophysics of Computation*, Oxford University Press, 1999.