

## Capítulo 6

# Conceitos Elementares de Topologia

Na Geometria Euclidiana, os ângulos são preservados enquanto na Geometria Afim, as proporções das grandezas geométrica, tais como comprimentos e áreas, são mantidas. Na Geometria Projetiva, é preservada a propriedade de colinearidade dos pontos. Vimos ainda que estas Geometrias são estritamente relacionadas com o espaço tridimensional que nos rodeia. Na Topologia, por sua vez, interessa-se pelas propriedades geométricas que se mantêm invariantes sob transformações biunívocas e contínuas. O termo “Topologie” foi introduzido pelo Listing na década 1840, embora Euler já tenha percebido que na Geometria há conceitos para os quais as medidas sejam irrelevantes. Em 1736, Euler apresentou para o problema de *Königsberg* uma solução que não envolva nenhuma medida e, em 1750, relacionou os números dos componentes (número de vértices –  $v$ , número de arestas –  $e$ , e número de faces –  $f$ ) de um poliedro através da famosa fórmula de Euler

$$v - e + f = 2. \tag{6.1}$$

No final do século XIX, foram descobertas para superfícies fechadas (**variedades** bidimensionais) várias propriedades invariantes, tais como **conexidade** e a **característica de Euler**. Poincaré, em 1895, generalizou-as para variedades de dimensão  $n$ . Muitos conceitos e métodos introduzidos por ele foram fundamentais para o desenvolvimento da **Topologia Algébrica**. Na mesma época, Georg Cantor desenvolveu a Teoria dos Conjuntos e introduziu o conceito de abertos e de pontos de acumulação, que são fundamentais para a **Topologia dos Conjuntos**. Cantor mostrou que, considerando um objeto 3D como um conjunto (infinito) de pontos no espaço euclidiano tridi-

mensional, alguns problemas podem ser solucionados com uso das técnicas da Teoria de Conjuntos. Mais tarde, em 1906, Fréchet percebeu que os conceitos desenvolvidos na Topologia dos Conjuntos não se limitavam para os conjuntos de pontos do espaço euclidiano, Isso o levou a construir novos espaços “abstratos” e aplicar os métodos da Topologia dos Conjuntos para solucionar problemas de outra natureza.

Neste capítulo não temos a pretensão de cobrir o tópico de Topologia. O objetivo é apresentar alguns conceitos introdutórios que são essenciais para a compreensão de alguns textos relacionados com a Modelagem Geométrica.

**Aplicação 6.1** *A área de Modelagem Geométrica assistida por Computador (Computer assisted Geometric Design – CAGD) cobre tradicionalmente as técnicas de representação (Capítulos 2 e 3), análise e manipulação de curvas e superfícies, preocupando-se principalmente com as propriedades intrínsecas destas formas geométricas (Capítulo 5). A linha de pesquisa em Modelagem de Sólidos, por outro lado, foca na construção e na manipulação de modelos volumétricos, enfatizando-se na preservação da consistência da estruturação dos componentes geometricamente mais simples, descritíveis pelas funções, em um objeto 3D complexo. Finalmente, a Computação Gráfica e a Visão Computacional, que de certa maneira emulam o processo da visão humana, aplicam as ferramentas providas pela Geometria Projetiva.*

*Requicha definiu, no final da década 1970, como esquema de representação (representation scheme) a função  $s: \mathcal{E} \rightarrow R$  que mapeia  $m$  conjuntos de pontos, correspondentes aos objetos de interesse, imersos no conjunto universo  $\mathcal{E}$  numa descrição  $r$  sintaticamente correta. Ele ainda apresentou uma lista de propriedades desejadas para cada esquema de representação:*

**representatividade** : *o domínio de  $s$  deve ser mais o abrangente possível, devendo cobrir idealmente o conjunto universo  $\mathcal{E}$ ;*

**validade** : *a gramática do esquema deve ser tal que todas as descrições sintaticamente corretas representam objetos contidos no domínio;*

**completude** : *a partir das descrições sintaticamente corretas, pode-se inferir todas as propriedades geométricas dos objetos correspondentes no domínio;*

**univocidade** : *a cada objeto  $m$  só existe uma única descrição no contra-domínio  $R$ .*

O fato da Topologia se ocupar com a Geometria invariante sob transformações (biunívocas e) contínuas, ela tem sido útil para projetos de esquemas de representação, já que no projeto de um esquema de representação o que mais se interessa é a coleção dos blocos elementares (conjuntos de pontos descritíveis algebricamente) e a combinação entre eles para descrever o objeto de interesse.

## 6.1 Teoria dos Conjuntos

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ . Se cada elemento do conjunto  $A$  pertence ao conjunto  $B$ , dizemos que  $A$  é **subconjunto** de  $B$  e indicamos tal fato pela notação

$$A \subset B.$$

O conjunto que engloba todos os conjuntos de interesse define um **conjunto universo**  $\mathcal{E}$ . É conveniente ainda introduzir o conceito de **conjunto vazio** como sendo aquele que não possui nenhum elemento.

**Observação 6.1** *Em termos de conjunto, um objeto  $A$  fisicamente realizável é um conjunto (infinito) de pontos  $(x, y, z)$ . Todos os objetos estão imersos no espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$ , que é denominado o **conjunto universo**.*

A cada par ordenado de pontos de um conjunto/subespaço  $A$  pode-se associar um número real  $d$ , chamado **distância**, através de uma função  $d: A \times A \rightarrow \mathbb{R}$  de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer pontos  $p, q, r$ :

1.  $d(p, q) = 0$ , se  $p = q$ ;
2. Se  $p \neq q$ , então  $d(p, q) > 0$ ;
3.  $d(p, q) = d(q, p)$ ; e
4.  $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$ .

O conjunto  $A$  provido de uma métrica  $d$  é conhecido por um **espaço métrico**.

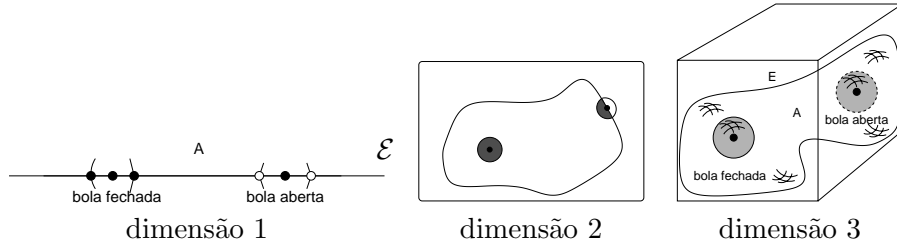
**Observação 6.2** *O espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$  é euclidiano um espaço métrico provida da métrica euclidiana, isto é, dados dois pontos  $p = (x_1, y_1, z_1)$  e  $q = (x_2, y_2, z_2)$ , a distância entre os dois pontos é determinada por*

$$d(p, q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

A noção de **bola** de dimensão  $n$  é fundamental no estudo de espaços métricos. Seja  $a$  um ponto no espaço métrico  $\mathcal{E}$ . Dado um número real  $r > 0$ , uma

**bola aberta** de centro  $a$  e raio  $r$  é o conjunto  $B(a, r)$  dos pontos de  $A$  cuja distância ao ponto  $a$  é menor do que  $r$ ,

**bola fechada** de centro  $a$  e raio  $r$  é o conjunto  $B[a, r]$  dos pontos de  $A$  cuja distância ao ponto  $a$  é igual ou menor do que  $r$ .

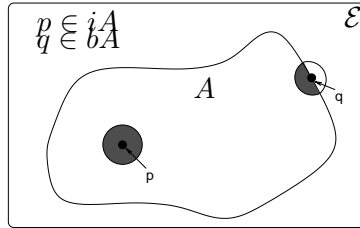


Um subconjunto  $A$  de um espaço métrico  $\mathcal{E}$  chama-se **limitado** quando existe uma constante  $c > 0$ , tal que  $d(p, q) \leq c$  para quaisquer pontos  $p, q \in A$ .

**Observação 6.3** *Frequentemente, os elementos de um conjunto também são conjuntos. Por exemplo, cada figura geométrica sobre um papel (que pode ser modelado como um conjunto universo de pontos) é um conjunto. Para evitar ambigüidades, são utilizados termos **classe**, **coleção** e **família** como sinônimos de conjunto. Os termos **subclasse**, **subcoleção** e **subfamília** têm significado análogo a subconjunto.*

Seja  $A$  um subconjunto de um espaço métrico  $\mathcal{E}$ . Um ponto  $p \in A$  diz-se um **ponto interior** de  $A$  quando é centro de uma bola aberta contida em  $A$ . Chama-se o **interior** de  $A$ ,  $iA$  em  $\mathcal{E}$ , ao conjunto formado pelos pontos interiores a  $A$ . Se a bola aberta centrada num ponto  $q \in A$  contiver algum ponto que não pertença a  $A$ , dizemos então que  $q$  pertence à **fronteira** de  $A$ . Denomina-se a **fronteira**, ou **bordo**, de  $A$ , designado por  $\partial A$  em  $\mathcal{E}$ , o conjunto formado pelos pontos cujas bolas abertas contém pelo menos um ponto de  $A$  e um ponto do complemento de  $A$ . Classificando os pontos em interior e bordo, podemos decompor o conjunto universo  $\mathcal{E}$  em três subconjuntos disjuntos (sem elementos comuns entre si):

$$\mathcal{E} = iA \cup \partial A \cup i(\mathcal{E} - A). \quad (6.2)$$



**Exemplo 6.1** *Seja  $Q$  o conjunto dos números racionais. O interior de  $Q$  em  $\mathbb{R}$  é vazio, porque nenhum intervalo aberto pode ser formado apenas por números racionais. Por outro lado, o bordo de  $Q$  é toda reta  $\mathbb{R}$ , porque qualquer intervalo aberto contém números racionais e irracionais.*

**Exercício 6.1** *Classifique o conjunto de números inteiros  $I$  em  $\mathbb{R}$ .*

**Exercício 6.2** *Quais são os pontos interiores e da fronteira do intervalo  $[1, 2)$ ?*

Um ponto  $p$  é **aderente** a  $A$ , quando  $d(p, A) = 0$ . O **fecho** (ou aderência) do conjunto  $A$ , indicado por  $cA$ , num espaço métrico  $\mathcal{E}$  é o conjunto dos pontos de  $\mathcal{E}$  que são aderentes a  $A$ . Pela Eq. 6.2, podemos concluir que

$$cA = iA \cup \partial A \quad (6.3)$$

é uma união disjunta.

**Exercício 6.3** *Qual é o fecho do conjunto  $(0, 1)$  em  $\mathbb{R}$ ? E do intervalo  $[0, 1]$  em  $\mathbb{R}$ ?*

Um ponto  $p \in \mathcal{E}$  é dito **ponto de acumulação** de  $A \subset \mathcal{E}$  quando toda bola (aberta) de centro  $p$  contém algum ponto de  $A$ , diferente do ponto  $p$ . O conjunto dos pontos de acumulação de  $A$  em  $\mathcal{E}$  é denominado **derivado** de  $A$ .

**Exemplo 6.2** *O conjunto de pontos de acumulação do conjunto de números racionais é o conjunto de números reais; enquanto o conjunto de pontos de acumulação do intervalo  $[0, 1]$  é o próprio intervalo.*

**Exercício 6.4** *Qual é o conjunto de pontos de acumulação de  $\{0, 1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$ ?*

**Observação 6.4** *As noções de interior e fronteira são relativas, isto é, dependem do espaço métrico  $\mathcal{E}$  no qual se considera os objetos imersos.*

**Exercício 6.5** *Quais são os pontos aderentes de um polígono “preenchido” em relação à folha sobre a qual ele foi desenhado? E o mesmo polígono em relação ao “espaço de água” no qual ele foi imerso?*

São definidas sobre os dois conjuntos  $A$  e  $B$  do universo  $\mathcal{E}$  as seguintes operações:

**União:** consiste num outro conjunto  $C$  de todos os elementos que pertencem a  $A$  ou a  $B$  ou a ambos. Simbolizamos a união por

$$C = A \cup B = \{x: x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

**Interseção:** consiste num outro conjunto  $C$  constituído por elementos que pertencem tanto a  $A$  como a  $B$ , simultâneamente.

$$C = A \cap B = \{x: x \in A \text{ e } x \in B\}$$

**Diferença:** consiste num terceiro conjunto  $C$  de todos os elementos pertencentes ao conjunto  $A$  e que não pertençam ao  $B$ .

$$C = A - B = \{x: x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

**Produto:** consiste num terceiro conjunto de todos os pares ordenados  $(a, b)$ , onde  $a \in A$  e  $b \in B$ .

$$C = A \times B = \{(a, b): a \in A \text{ e } b \in B\}$$

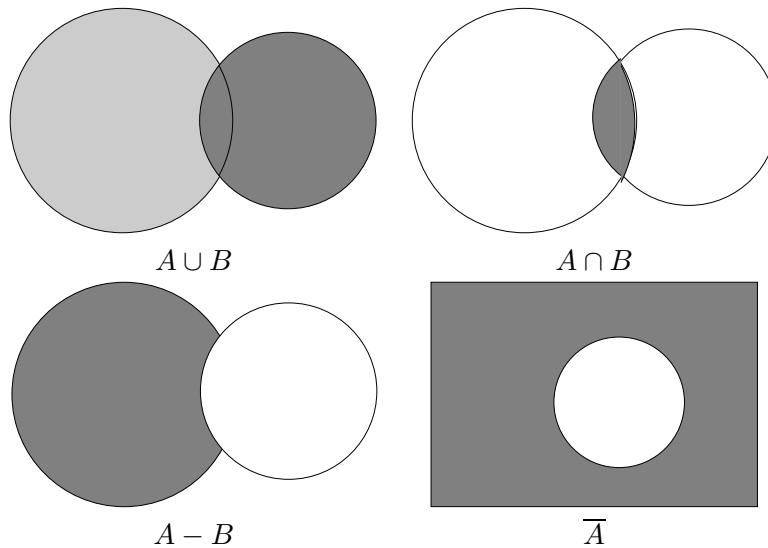
Em relação ao conjunto universo  $\mathcal{E}$  pode-se aplicar uma quarta operação – **complemento**. Chamaremos de complemento do conjunto  $A$  ao conjunto  $\bar{A}$  dos elementos que pertencem a  $\mathcal{E}$ , mas não pertencem a  $A$ . Ou seja,

$$C = \bar{A} = \{x: x \in \mathcal{E} \text{ e } x \notin A\}$$

**Observação 6.5** *A diferença não é comutativa.*

**Exercício 6.6** *Compare os resultados das operações  $A \cup (B - C)$  e  $(A \cup B) - C$ .*

Uma maneira ilustrativa para representar diversas relações e operações entre conjuntos é utilizar **diagramas de Venn**. Nestes diagramas cada conjunto é representado por uma região plana limitada.



Os conjuntos satisfazem as seguintes leis:

**fechamento** :  $A \cup B \subset \mathcal{E}$  e  $A \cap B \subset \mathcal{E}$ .

**comutativa** :  $A \cup B = B \cup A$  e  $A \cap B = B \cap A$ .

**associativa** :  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  e  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .

**identidade** :  $A \cup \mathcal{E} = \mathcal{E}$  e  $A \cap \mathcal{E} = A$ .

**idempotência** :  $A \cup A = A$  e  $A \cap A = A$ .

**complementação** :  $A \cup \bar{A} = \mathcal{E}$  e  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ .

**distributiva** :  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  e  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

**lei de Morgan** :  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$  e  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

**Observação 6.6** As seguintes relações são válidas na álgebra dos conjuntos:

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{E}} &= \emptyset \\ \overline{\emptyset} &= \mathcal{E} \\ \overline{\overline{\mathcal{E}}} &= \mathcal{E}\end{aligned}$$

Em qualquer espaço métrico  $\mathcal{E}$ , uma bola aberta é um conjunto **aberto**. Para qualquer subconjunto  $A \subset \mathcal{E}$ , o seu interior  $iA$  é o maior aberto contido

em  $\mathcal{E}$ . Um conjunto  $A$  é **fechado** se, e somente se,  $\mathcal{E} - A$  é aberto em  $\mathcal{E}$ , ou seja  $A$  contém todos os seus pontos aderentes. Um subconjunto  $V \subset \mathcal{E}$  é chamado a **vizinhança** de um ponto  $p \in \mathcal{E}$ , se existe uma bola aberta  $B(p, r)$  contida em  $V$ .

**Aplicação 6.2** Com base na Teoria dos Conjuntos, um grupo de pesquisadores da Universidade de Rochester introduziu na década dos 1970s o conceito de **sólido abstrato** para modelar e operar uma classe de formas geométricas que satisfazem as seguintes propriedades:

**rigidez:** são invariantes sob transformações rígidas.

**regular:** contém todos os pontos aderentes e todos tem como vizinhança uma bola ou uma semi-bola de dimensão 3.

**limitado:**  $E^3$  deve ser limitado.

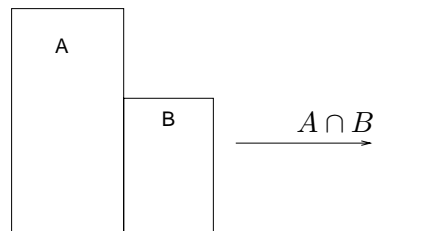
**semianalítico:** resultado de um número finito de combinações booleanas entre conjuntos descritíveis por  $n$  funções analíticas  $f_i(x, y, z)$

$$A = \{(x, y, z): f_i(x, y, z) \leq 0, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

**descritível** por uma sequência finita de elementos.

**orientável** .

O conjunto de pontos que constituem essa forma geométrica é chamado **conjunto regular** (*r-set*). Embora as operações (ordinárias) dos conjuntos sejam fechadas para os conjuntos definidos em  $\mathbb{R}^3$ , elas não são fechadas para os conjuntos regulares, ou seja, o resultado de uma operação sobre dois conjuntos regulares pode ser um conjunto não regular – um objeto fisicamente não realizável.



Para contornar isso, foi proposto pelo mesmo grupo da Universidade de Rochester o conjunto de **operadores regularizados** ( $\cap^*$ ,  $\cup^*$  e  $-^*$ ) para modelar formas mais complexas a partir de geometrias “elementares” (originalmente, utilizavam-se os semi-espacos e as quádricas). Tais operadores



procuram preservar a regularidade dos pontos, isto é, todos os pontos tenham como vizinhança uma bola ou semi-bola. A idéia básica deste grupo consiste em “ajustar” o resultado das operações ordinárias determinando o fecho dos seus pontos interiores, isto é,

**união regularizada** :  $C = A \cup^* B = c(i(A \cup B))$ .

**interseção regularizada** :  $C = A \cap^* B = c(i(A \cap B))$ .

**diferença regularizada** :  $C = A -^* B = c(i(A - B))$ .

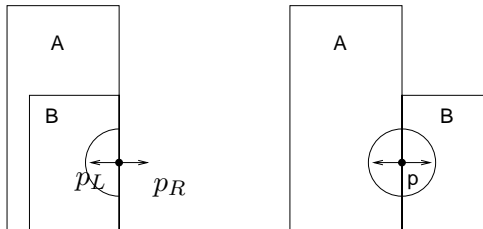
Sabendo que  $A = iA \cup \partial A$  e  $B = iB \cup \partial B$  e aplicando as propriedades das operações (ordinárias) de conjunto, temos para a união regularizada

$$C = \partial C^* \cup iC^* = A \cup^* B = c(i(A \cup B)) = c(i(\partial A \cup \partial B \cup iA \cup iB)).$$

Podemos analisar o resultado em duas partes, a fronteira e o interior do  $C$

$$\begin{aligned} \partial C^* &= \text{Valida}_b(\partial A \cup \partial B) = \partial A \cup \partial B - ((\text{partial}A \cap iB) \cup (\partial B \cap iA) \cup \text{Valida}_b(\partial A \cap \partial B)) \\ iC^* &= iA \cup iB \cup \text{Valida}_i(\partial A \cap \partial B), \end{aligned}$$

onde  $\text{Valida}_b(*)$  e  $\text{Valida}_i(*)$  são, respectivamente, funções que validam a pertinência dos pontos à fronteira ou ao interior de  $C^*$ . No caso de  $\text{Valida}_i(*)$ , verifica-se se a união das semi-bolas em cada ponto, referentes a  $A$  e a  $B$ , forma uma bola em relação a  $C$  (se ambos os lados, esquerdo  $p_L$  e direito  $p_R$ , pertencem a  $A$  ou a  $B$ ). Enquanto no caso de  $\text{Valida}_b(*)$ , verifica-se se a união das semi-bolas resulta numa semi-bola (se um dos lados, esquerdo  $p_L$  e direito  $p_R$ , não pertence a  $A$  nem a  $B$ ).

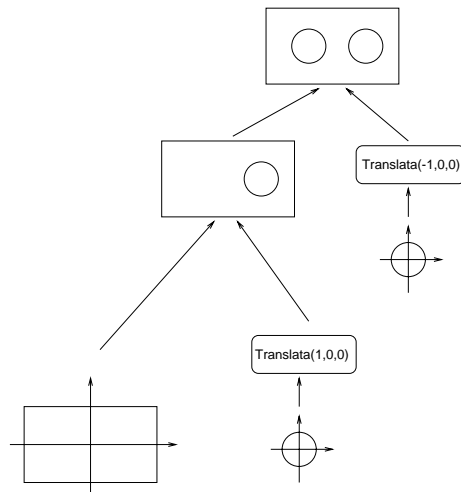


$\text{Valida}_i$  bem sucedido     $\text{Valida}_b$  bem sucedido

Definindo como tokens os conjuntos regulares  $B$ , os operadores regularizados  $O$  ( $\cap^*$ ,  $\cup^*$  e  $-^*$ ) e as transformações rígidas  $T$  (translação e rotação), o esquema CSG (Constructive Solid Geometry), também proposto pelo grupo, adota as seguintes produções da gramática para descrever os modelos sólidos fisicamente realizáveis:

$$\begin{aligned} \Sigma &\rightarrow \langle CSG \rangle \\ \langle CSG \rangle &\rightarrow B \\ &| \langle CSG \rangle O \langle CSG \rangle \\ &| T \langle CSG \rangle. \end{aligned}$$

Uma forma alternativa para representar os objetos neste esquema é através de árvores binárias (ordenadas) - muitas vezes conhecidas como **árvores CSG**, onde as folhas denotam as primitivas e os nós intermediários, as operações entre as duas subárvores.



Para facilitar a classificação de pertinência de um ponto em relação a um conjunto regular, isto é, verificar se ele fica no interior ou na fronteira, é comum utilizar representações implícitas destes conjuntos, como as funções dadas no Exercício 6.7. Para estas formas de representação, a classificação de pertinência de um ponto  $P = (x, y, z)$  se reduz a simples comparações:

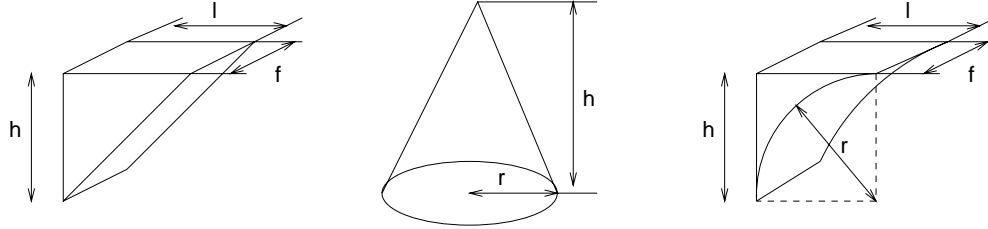
- $F(x, y, z) = 0$ , então  $P$  pertence à fronteira do conjunto regular  $F$ , e
- $F(x, y, z) < 0$ , então  $P$  pertence ao interior do conjunto regular  $F$ .

**Exercício 6.7** Qual é a forma geométrica do conjunto de pontos definido pelo seguinte sistema de funções?

1.  $a \leq x \leq b, c \leq y, y \leq d, f \leq z$  e  $z \leq g$ .
2.  $0 \leq x^2 + y^2 \leq r^2, 0 \leq z$  e  $z \leq a$ .
3.  $0 \leq x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0, x \geq 0, 0 \leq z$  e  $z \leq a$ .

**Exercício 6.8** *Expanda as operações de interseção regularizada e diferença regularizada em termos das operações (ordinárias) de conjuntos e das funções  $Valida_i$  e  $Valida_b$ .*

**Exercício 6.9** *Escreva o sistema de funções que define cada um dos seguintes conjuntos regulares.*



**Exercício 6.10** *Classifique a pertinência dos pontos  $(0,0,0)$ ,  $(-1,0,0)$  e  $(-1.5,0,0)$  em relação ao conjunto regular definido pelo sistema de funções:*

$$\begin{cases} -x \leq 2 \\ x \leq -1 \\ y \leq 0 \\ -y \leq 3 \\ -z \leq 5 \\ z \leq 3.5 \end{cases}$$

## 6.2 Espaços Topológicos

Um **espaço topológico** consiste de um conjunto  $A$  e uma coleção  $\mathcal{T}$  de partes de  $A$ , denominadas **abertos**, que satisfaz:

1.  $\emptyset$  e  $A$  pertencem a  $\mathcal{T}$ ;
2. a interseção de quaisquer dois abertos é um aberto pertencente a  $\mathcal{T}$ ; e
3. a união de quaisquer abertos, podendo ser infinitos abertos, é um aberto pertencente a  $\mathcal{T}$ .

$\mathcal{T}$  é denominada a **topologia** do espaço topológico  $(A, \mathcal{T})$ , ou simplesmente  $A$ . Se  $A$  é um conjunto métrico, então  $(A, \mathcal{T})$  é também um **espaço de Hausdorff**.

**Observação 6.7** *Existem definições equivalentes de espaços topológicos com base nos conceitos de conjuntos fechados e de vizinhança.*

Duas operações são definidas para os espaços topológicos:

**Soma** de  $(A, \mathcal{T}_1)$  e  $(B, \mathcal{T}_2)$  resulta numa coleção de abertos  $\{U \cup V : U \subset \mathcal{T}_1, V \subset \mathcal{T}_2\}$  e na união  $A \cup B$ .

**Produto** entre  $(A, \mathcal{T}_1)$  e  $(B, \mathcal{T}_2)$  resulta numa coleção de abertos  $\{U \times V : U \subset \mathcal{T}_1, V \subset \mathcal{T}_2\}$  e no produto cartesiano  $A \times B$ .

Uma aplicação  $f: X \rightarrow Y$  entre os espaços topológicos  $X$  e  $Y$  se diz **contínua** se, para cada  $A' \subset Y$  aberto, sua imagem inversa  $f^{-1}(A')$  é um aberto em  $X$ . Um **homeomorfismo** é uma bijeção contínua  $h: X \rightarrow Y$  cuja inversa também é contínua. Dizemos que dois espaços topológicos são **topologicamente equivalentes** se existe um homeomorfismo entre eles e denominamos as propriedades (geométricas) preservadas num homeomorfismo por **propriedades topológicas**.

**Exercício 6.11** A aplicação contínua  $f: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida pela função  $f(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$  é um homeomorfismo?

### 6.2.1 Conexidade

Uma **cisão** de um espaço métrico  $\mathcal{E}$  é uma decomposição  $\mathcal{E} = A \cup B$  em dois subconjuntos abertos disjuntos  $A$  e  $B$ . Quando um dos abertos é vazio, ou seja o outro é igual a  $\mathcal{E}$ , dizemos que a **cisão** é **trivial**. Um espaço métrico  $\mathcal{E}$  chama-se **conexo** quando a única cisão possível em  $\mathcal{E}$  é trivial. Um subconjunto  $X \subset \mathcal{E}$  é denominado **conjunto conexo** quando  $X$  é conexo. Quando  $X$  admite uma cisão não-trivial dizemos que ele é **desconexo**.

**Observação 6.8** Intuitivamente, podemos dizer que um espaço é conexo se pode passar de um ponto qualquer deste espaço para qualquer outro ponto distinto por um movimento contínuo, sem sair dele.



(a) Objeto conexo    (b) Objeto desconexo

**Exercício 6.12** Das letras de forma minúsculas do alfabeto, quais são figuras desconexas? E das maiúsculas?

**Exemplo 6.3** A reta real  $\mathbb{R}$  é um espaço métrico conexo; enquanto o espaço métrico  $\mathbb{R} - \{0\}$  admite uma cisão não trivial, isto é,  $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

**Exercício 6.13** *O espaço métrico  $Q - \{\sqrt{2}\}$  é conexo? É um espaço métrico constituído por um único ponto?*

Diferentemente dos conceitos de aberto, fechado, interior, etc, que vimos na Seção 6.1, a propriedade de um conjunto ser conexo não depende do espaço em que ele está imerso. Esta propriedade, formalmente definida pelo Poincaré na coletânea de artigos *Analysis situs*, é considerada uma **propriedade intrínseca** e constitui um dos alicerces da teoria de Topologia.

Algumas propriedades dos conjuntos conexos:

1. A imagem de um conjunto conexo por uma aplicação contínua é um conjunto conexo (é um invariante topológico).
2. O fecho de um conjunto conexo é conexo.
3. O produto cartesiano de espaços métricos  $M = M_1 \times \cdots \times M_n$  é conexo, se e somente se, cada fator  $M_i$  é conexo.
4. Um subconjunto da reta é conexo se, e somente se, é um intervalo.

**Exemplo 6.4** *O cilindro  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$  é homeomorfo ao produto cartesiano  $[0, 2\pi) \times (-\infty, +\infty)$ . Como  $[0, 2\pi)$  e  $(-\infty, +\infty)$  são intervalos, eles são conexos; portanto, o produto cartesiano é conexo e a imagem  $C$  de uma aplicação homeomórfica é também um conjunto conexo. Conclui-se, então, que  $C$  é um conjunto conexo.*

**Exemplo 6.5** *O conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y = \cos(\frac{1}{x})\}$  é o gráfico da função  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ . Este conjunto é conexo, porque é homeomorfo ao intervalo  $(0, +\infty)$ . Portanto, o fecho  $cA = A \cup \{0\}$  é conexo.*

Dados dois pontos  $a$  e  $b$  de um espaço métrico  $A \subset \mathcal{E}$ . Um **caminho** é uma aplicação contínua  $f: [0, 1] \rightarrow A$ , com  $f(0) = a$  e  $f(1) = b$ .  $A$  é chamado **conexo por caminhos** quando dois pontos quaisquer de  $A$  podem ser ligados por um caminho contido em  $A$ . Um espaço métrico  $A \subset \mathcal{E}$  é **localmente conexo por caminhos** quando para todo  $p \in A$  e toda a sua vizinhança  $V \ni p$  existe uma vizinhança conexa por caminhos  $U \ni p$  tal que  $p \in U \subset V$ .

**Observação 6.9** *Há conjuntos conexos que não são conexos por caminho. Um exemplo clássico é o conjunto dado no Exemplo 6.5 para o qual qualquer aplicação contínua  $g: [0, 1] \rightarrow A$ , com  $g(t) = (\alpha(t), f(\alpha(t)))$  implica que  $g(t)$  será constante, contradizendo o fato de ser  $|g(t)| < 1$ .*

Um espaço métrico  $A \subset \mathcal{E}$  chama-se uma **variedade topológica de dimensão  $n$**  quando, para todo  $p \in A$  existe uma vizinhança  $V \in A$  homeomorfa a um subconjunto aberto  $U$  de dimensão  $n$ , ou seja existe um homeomorfismo  $f: V \rightarrow U$ . Se  $U$  for uma esfera aberta de dimensão  $n$  para todos os pontos, dizemos que é uma **variedade fechada de dimensão  $n$** . E se existir pontos cujo  $U$  é uma semi-esfera aberta de dimensão  $n$ , dizemos que  $A$  é uma **variedade com bordo de dimensão  $n$** . Como existe um aberto  $U_0$  em  $\mathbb{R}^n$  conexo por caminhos, tal que  $f(x) \in U_0 \subset U$ ,  $f^{-1}(U_0) = V_0 \subset V$  é conexo por caminho. Ou seja, toda variedade topológica é um espaço localmente conexo.

**Exercício 6.14** *O polígono nos dois casos do Exercício 6.5 é uma variedade com bordo. Qual é a sua dimensão em cada um dos casos?*

**Observação 6.10** *Os conjuntos regulares apresentados na Aplicação 6.2 são, de fato, variedades bi-dimensionais fechadas.*

Quando os caminhos entre dois pontos  $a$  e  $b$  são aplicações lineares do tipo  $f(t) = (1-t)a + tb$ , dizemos que são **caminhos retilíneos**. Aqui podemos apresentar uma definição equivalente à apresentada no Capítulo 3 para um **conjunto convexo**: Um conjunto métrico  $A$  é convexo quando existem caminhos retilíneos para quaisquer dois pontos pertencentes a  $A$ , ou seja, todo o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer de  $A$  está contido em  $A$ .

### 6.2.2 Compacidade

Seja  $A$  um subconjunto de um espaço métrico  $\mathcal{E}$ . Uma **cobertura** de  $A$  é uma coleção de  $\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in L}$  de subconjuntos de  $\mathcal{E}$ , tal que  $A \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ . Caso todos os conjuntos  $\{C_\lambda\}_{\lambda \in L}$  forem abertos, dizemos que é uma **cobertura aberta**. Se existe um subconjunto  $L_0 \subset L$ , tal que,  $A \subset \bigcup_{\lambda \in L_0} C_\lambda$ , então a coleção  $\{C_\lambda\}_{\lambda \in L_0}$  é uma **subcobertura** de  $\mathcal{C}$ .

Um espaço topológico  $A \subset \mathcal{E}$  é compacto, se cada cobertura aberta contém uma subcobertura finita.

**Exemplo 6.6** *O espaço topológico de números naturais não é compacto, porque o espaço pode ser coberto por uma coleção de todos conjuntos (abertos) formados por cada número individualmente que não contém uma subcobertura finita.*

**Exemplo 6.7** Um intervalo fechado  $[a, b]$  é compacto, porque ele pode ser coberto por  $\{a\}$ ,  $\{b\}$  e  $(a, b)$  que contém uma subcobertura finita. Por outro lado, um intervalo aberto  $(a, b)$  não é compacto, porque a cobertura  $\bigcup (a + \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$  com  $n$  tendendo a infinito não admite uma subcobertura finita.

**Exemplo 6.8** Uma variedade de dimensão  $n$  é compacta.

Algumas propriedades dos conjuntos compactos:

1. A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto (é um invariante topológico).
2. Todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto é compacto. Reciprocamente, um subconjunto compacto de qualquer espaço métrico é fechado.
3. Se  $A$  é compacto, toda função real contínua  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo em  $A$ , ou seja, existem  $x_0, x_1 \in A$  tais que  $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ .
4. Todo espaço métrico compacto é limitado.

**Exemplo 6.9** Algumas propriedades relacionadas com a compacidade simplificam a verificação de que certas aplicações são homeomorfismos, como a seguinte aplicação. O círculo  $S = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}$  é compacto, porque é a imagem de qualquer intervalo compacto  $[a, a + 2\pi]$  pelo homeomorfismo  $f(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ .

**Aplicação 6.3** Podemos considerar que as figuras geométricas sejam subconjuntos fechados de um espaço métrico compacto. Portanto, essas figuras são compactas, possuindo uma subcobertura finita. A implicação prática deste resultado é que uma figura geométrica fisicamente realizável é descritível por um número finito de subconjuntos.

### 6.3 Topologia de Superfícies

Talvez Euler seja o primeiro matemático a perceber que há problemas geométricos para cujas soluções as medidas não são relevantes. Ele demonstrou em 1752 que a relação entre os números dos vértices, das arestas e das faces dos poliedros convexos  $Q$  é sempre a mesma. Esta relação, que pode ser considerada a

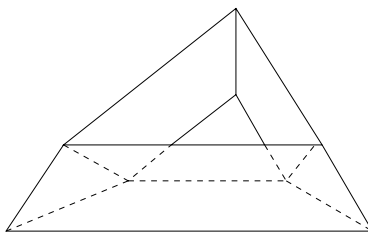
primeira característica topológica estudada, é conhecida por **característica de Euler**  $\chi(Q)$ . No caso dos poliedros convexos,  $\chi(Q) = 2$ . Em 1813 Lhuillier, percebeu que a fórmula de Euler não é válida para sólidos com buracos e mostrou que a característica de Euler destes sólidos é

$$v - e + f = \chi(Q) = 2 - 2h,$$

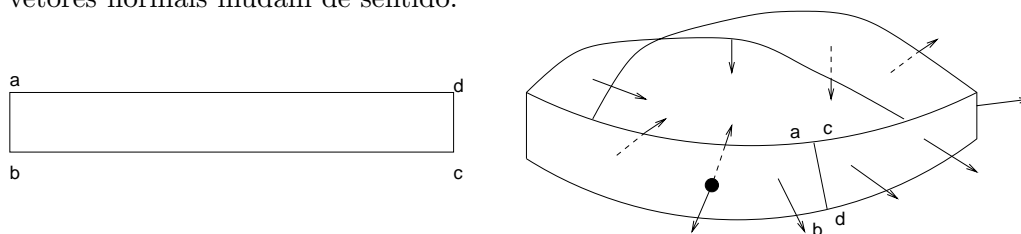
onde  $h$  é o número de buracos.

**Exemplo 6.10** *A seguinte figura tem 9 vértices, 18 arestas, 9 faces e 1 buraco, satisfazendo a equação*

$$9 - 18 + 9 = 2 - 2(1) = 0$$



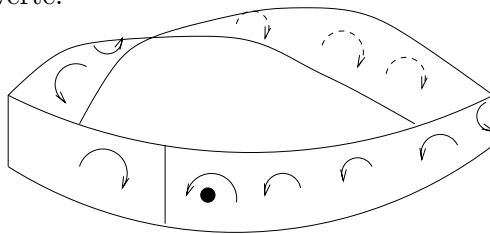
Entre 1862 a 1865, Möbius e Listing descreveram a construção de uma superfície de “um só lado” com uso de uma tira de papel – a famosa faixa de Möbius. Eles perceberam que ao deslizar um objeto sobre a faixa a partir de um ponto  $a$ , o objeto volta ao mesmo ponto, porém no “outro lado”. Este fato os motivou a introduzir o conceito de lados de uma superfície. A primeira definição foi baseada nos vetores normais: uma superfície tem somente um lado quando existe um caminho fechado ao percorrer o qual os vetores normais mudam de sentido.



A definição baseada em vetores normais nos leva a pensar equivocadamente que o fato de uma superfície ser de dois lados ou de um lado seja uma propriedade dependente do espaço de imersão, como os conceitos de abertos, fechados e interior. Portanto, uma outra definição baseada em circunferências orientáveis é mais adequada. Ao invés de vetores normais, podemos associar a cada ponto sobre o caminho uma circunferência orientável.

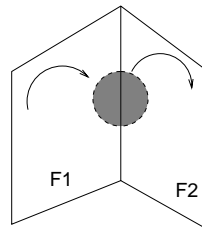
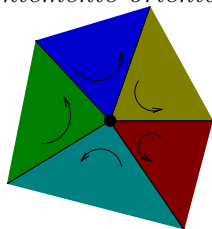


Observe agora que, ao invés de inversão de vetores normais, existe um caminho sobre a faixa de Möbius ao longo do qual o sentido da orientação das circunferências inverte.



Podemos introduzir agora o conceito de **orientabilidade** de uma superfície, que é independente do espaço de imersão. Uma superfície é **orientável**, se as circunferências ao longo de qualquer caminho são coerentemente orientáveis (todas no mesmo sentido); caso contrário, dizemos que ela não é orientável. As superfícies orientáveis correspondem às superfícies de dois lados e as não orientáveis às superfícies de um só lado.

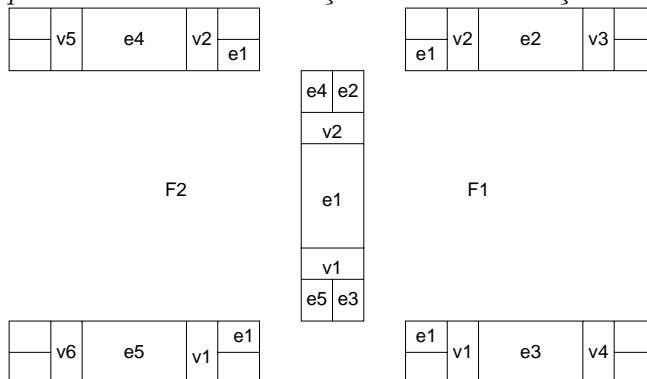
**Aplicação 6.4** O esquema de representação conhecido por (*boundary representation*), ou *brep*, foi projetado com base no fato de que um sólido é sempre separado do resto dos pontos do espaço universo por uma superfície orientável e fechada. Portanto, a vizinhança de cada ponto deve ser homeomorfa a um disco aberto, isto é, uma aresta é adjacente a duas, e somente duas, faces e um vértice deve ser rodeada por pedaços de faces de tal modo que, em conjunto, constituem um disco e que cada par delas compartilha uma única aresta (uma face fica no lado direito e a outra no lado esquerdo). Além disso, as arestas que circundam cada face devem formar sequências cíclicas coerentemente orientáveis.



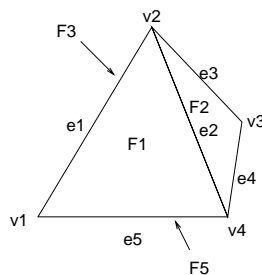
(a) Vizinhança de um vértice (b) Vizinhança de uma aresta

Com base nestes fatos Baumgart propôs na década de 1970 a **estrutura de dados alada** (*winged data structure*) para armazenar informações geométricas de um poliedro. Esta estrutura é orientada a arestas. Cada “célula da estrutura” contém 2 apontadores para os vértices e 4 apontadores para as arestas adjacentes, além da identificação da aresta. A figura ilustra a estrutura da aresta  $e_1$ , cuja face direita é  $F_1$  e a face que fica no lado es-

querdo é  $F2$ . Adotando a convenção de orientação anti-horária, as arestas seguem a sequência  $e2-e1-e3$  em relação a  $F1$  e em relação a  $F2$ ,  $e5-e1-e4$ .



**Exercício 6.15** Represente o seguinte tetraedro na estrutura de dados winged-edge.



O interesse pelo estudo da conexidade das superfícies surgiu com o problema de determinação das raízes de uma equação polinomial  $f(x, y) = 0$  para diferentes valores de  $x$  e  $y$ . Riemann definiu como o **grau** de uma aplicação contínua  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  num ponto  $p$  a quantidade de pontos  $f(p)$  e mostrou que o grau de uma coleção de aplicações contínuas  $f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  numa superfície é preservado se é contínua a variação entre as aplicações  $f_i$ .

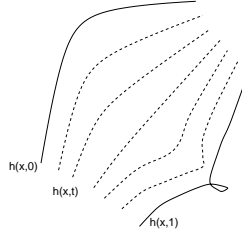
Jordan introduziu um outro método para avaliar a conexidade de uma superfície. Ele definiu como **ciclos irredutíveis** as curvas simples sobre uma superfície que não podem ser deformadas continuamente num ponto e mostrou que o número destes ciclos é também um invariante topológico.

Listing e Betti tentaram estender estas idéias para dimensão 3 e para dimensão  $n$ , respectivamente. Porém, foram os trabalhos de Poincaré que realmente marcaram o início do desenvolvimento da Topologia Algébrica, ao tentar introduzir mecanismos apropriados para classificar as variedades fechadas de dimensão  $n$ .

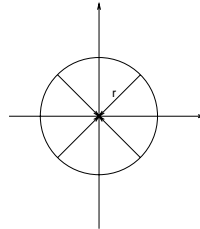
## 6.4 Complexos Celulares

Embora Riemann, Listing e Betti já aplicavam noções de homotopia nos seus resultados, somente em 1895 Poincaré introduziu o termo “homotopias” de forma precisa e o conceito de **grupo fundamental**.

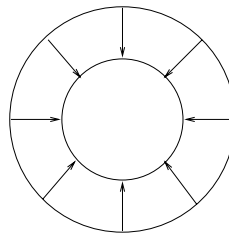
Duas aplicações contínuas  $f, g: A \rightarrow B$  entre os dois espaços topológicos  $A \subset \mathcal{E}$  e  $B \subset \mathcal{E}$  são **homotópicos**, quando existe uma aplicação contínua  $h: A \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{E}$ , com  $h(x, 0) = f(x)$  e  $h(x, 1) = g(x)$  para todos  $x \in A$ . A aplicação  $h$  é denominada **homotopia**.



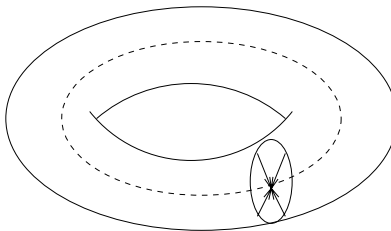
**Exemplo 6.11** Um disco é homotópico a um ponto, já que existe uma homotopia  $h(\theta, t) = ((1-t)(r \cos \theta), (1-t)(r \sin \theta))$ . Nesta caso, a curva pode ser deformada continuamente num ponto.



**Exemplo 6.12** Um disco vazado é homotópico a uma circunferência. Neste caso, temos um ciclo irreduzível.

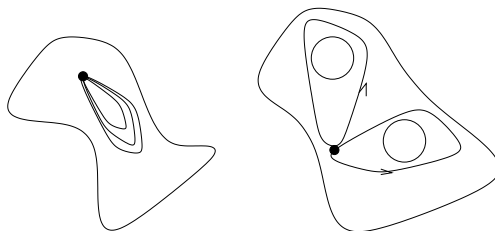


**Exemplo 6.13** Um toro cheio é homotópico a uma circunferência. Observe que tanto o disco vazado do Exemplo 6.12 como o toro cheio são homotópicos a uma circunferência.



**Exercício 6.16** *Um cubo cheio é homotópico a qual figura geométrica? E um cubo vazio?*

A noção de figuras homotópicas nos permite analisar um espaço topológico  $A$  em termos da “justaposição” dos “representantes” das suas classes de laços homotópicos com ponto base fixado. A coleção destes representantes provida da operação de “justaposição” constitui **grupo fundamental** de  $A$ . Um resultado importante para classificação de variedades de dimensão  $n$  fechadas é que elas são homeomorfas se, e somente se, seus grupos fundamentais forem isomorfos (terem a mesma forma e a mesma estrutura). Ou seja, a classe de homeomorfismo de uma variedade fechada é completamente determinada pela classe de isomorfismo de seu grupo fundamental.



Computar as classes de laços homotópicos não é, porém, trivial. Poincaré introduziu o termo de **homologia** para estudar o homeomorfismo entre duas variedades fechadas. Ao invés de avaliar a quantidade de classes de laços homotópicos, particionou o espaço topológico  $A$  em figuras geométricas mais simples e analisou a relação entre elas. Ele mostrou que o número de distintos “impedimentos” para que qualquer laço contido num espaço topológico seja continuamente deformado num ponto corresponde ao número de sequências cíclicas de sub-variedades de dimensão menor que  $n$  que não sejam bordos de sub-variedade de dimensão  $n + 1$ . Estas sequências cíclicas são denominadas os **ciclos** de dimensão  $n$ .

**Exemplo 6.14** *Uma circunferência é, por exemplo, uma variedade unidimensional fechada que não é o bordo de nenhuma variedade bidimensional;*

enquanto um disco é constituído por uma variedade bidimensional contornado por uma variedade unidimensional fechada.

**Observação 6.11** Os “impedimentos” para laços serem deformados em pontos são conhecidos por buracos (holes) ou gêneros (genus).

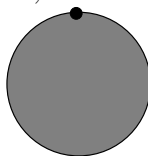
Informalmente, podemos dizer que conjunto de ciclos de dimensão  $n$  que não constituem bordos das variedades de dimensão  $n + 1$  formam um **grupo de homologia** de dimensão  $n$  e o **posto** deste grupo é conhecido por **número de Betti**  $\beta^n$  de dimensão  $n$ . O número de Betti é um invariante topológico e Poincaré mostrou que estes números relacionam com a característica de Euler através da seguinte expressão:

$$\chi(Q) = \sum (-1)^n \beta^n,$$

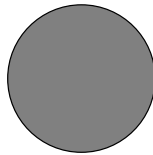
Agora resta saber como se pode particionar um espaço topológico em sub-variedades. Poincaré introduziu **complexos simpliciais** que são constituídos pelos simplexos. Um simplexo de dimensão  $n$  é o fecho convexo de  $n + 1$  vértices  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ , tais que  $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_n - v_0$  sejam linearmente independentes. Outra forma mais geral para particionar um conjunto topológico seria em **complexos celulares** constituídos pelas **células**. Uma célula de dimensão  $n$  é um espaço homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Um complexo celular de um espaço topológico  $X$  deve satisfazer as seguintes condições:

1. cada célula de dimensão  $n$  é homeomorfa a  $\mathbb{R}^n$  e o seu bordo é constituído pela união de células de dimensão até  $n - 1$ .
2. o fecho de cada célula intersecta com somente um número finito de outras células.
3. Qualquer espaço  $A$  contido em  $X$  é fechado se, e somente se, a interseção de  $A$  com o fecho de qualquer célula é também fechado.

**Exemplo 6.15** O particionamento de um disco em um disco sem bordo, uma circunferência sem um ponto, e um vértice é um complexo celular.

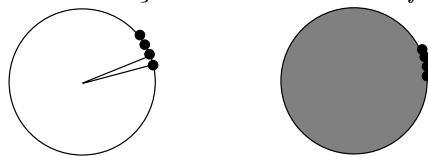


**Exemplo 6.16** O particionamento de um disco em um disco sem bordo e uma circunferência não é um complexo celular, porque a circunferência não é homeomorfa a uma reta.



**Exemplo 6.17** Um cubo pode ser representado como um complexo de 8 células de dimensão 0 (vértices), 12 células de dimensão 1 (arestas) e 6 células de dimensão 2 (faces)

**Exercício 6.17** Verifique se os seguintes particionamentos de um disco são complexos celulares: (a) uma coleção de raios e uma coleção de vértices; (b) um disco sem bordo e uma coleção de vértices. Justifique.



**Observação 6.12** Tanto os grupos de homologia como os grupos de homotopia não são suficientes para captar todas as propriedades geométricas invariantes sob homeomorfismo.

**Aplicação 6.5** Observe que uma célula de dimensão  $q$  pode denotar qualquer forma (conjunto de pontos) topologicamente equivalente ao espaço  $\mathbb{R}^q$ . Isso significa que só com quatro tipos de células (de dimensão 0, 1, 2 e 3) podemos descrever uma grande variedade de objetos geométricos imersíveis em  $\mathbb{R}^3$ . Por outro lado, a construção dos objetos de interesse através deles pode ser trabalhosa e, muitas vezes, propensa a erros.

Para amenizar esses problemas, procurou-se estabelecer um conjunto de operações básicas, que combinadas, gerem todas as representações válidas de  $B$ -rep para um específico domínio de objetos. Para isso foi utilizada a fórmula de Euler-Poincaré.

É interessante observar que as soluções válidas da equação de Euler-Poincaré,  $Q$ , correspondem a um subconjunto de pontos com coordenadas inteiras sobre o hiperplano descrito pela equação. Para complexos que apresentam células até dimensão 3 no espaço  $\mathbb{R}^3$ :

$$\text{num}_0 - \text{num}_1 + \text{num}_2 - \text{num}_3 = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2$$

o lugar geométrico das soluções válidas seria sobre o hiperplano de dimensão 6 no espaço  $\mathbb{R}^7$ ,  $(numb_0, numb_1, numb_2, numb_3, \beta_0, \beta_1, \beta_2)$  e o tal hiperplano é gerado por uma base de 6 vetores. Conclui-se, então, sob o ponto de vista puramente algébrico que as soluções válidas (e inválidas) podem ser geradas por estes 6 vetores. Para distinguir os pontos válidos dos inválidos sobre o hiperplano, certamente devem ser incluídas outras restrições adicionais.

Para exemplificar, vamos considerar um domínio de objetos topologicamente equivalentes a uma esfera. Tais superfícies satisfazem a relação

$$V - E + F = 2S,$$

onde  $V$ ,  $E$ ,  $F$  e  $S$  denotam, respectivamente o número de vértices, o número de arestas, o número de faces e o número de "casca separadas". A equação corresponde a um hiperplano  $(V, E, F, S)$  que pode ser gerado por uma base como

Vetor	Denotação	Semântica
$(1, 0, 1, 1)$	<b>mvfs</b>	Criar vértice, face e casca
$(1, 1, 0, 0)$	<b>mve</b>	Criar vértice e aresta
$(0, 1, 1, 0)$	<b>mef</b>	Criar vértice e face

No caso do cubo mostrado antes, é fácil ver que ele pode ser o resultado da seguinte combinação de operações:

$$(8, 12, 6, 1) = 1(1, 0, 1, 1) + 5(0, 1, 1, 0) + 7(1, 1, 0, 0).$$

Com uso dessas operações básicas (conhecidas como **operadores de Euler**) podemos definir "algebricamente" os objetos topologicamente equivalentes a esfera no esquema  $b$ -rep:

$$\begin{aligned} \Sigma &\rightarrow A \\ A &\rightarrow mvfs \mid BA \mid CA \\ B &\rightarrow mev \\ C &\rightarrow mef \end{aligned}$$

**Exercício 6.18** Mostre, com uso de exemplos, que a equação de Euler-Poincaré

$$V - E + F = 2$$

é uma condição necessária, mas não suficiente, para garantir a corretude de um modelo topologicamente equivalente a uma esfera.

**Observação 6.13** *Para garantir a validade das representações de variedades fechadas, devemos impor adicionalmente as condições de que*

1. *todas as aresta devem ser parte da borda de duas, e somente duas, faces.*
2. *todos os vértices devem ser circundados por uma sequência ordenada de arestas e faces e*
3. *as faces não devem se auto-intersectar.*

*Estas condições estão embutidas na estrutura de dados alada.*