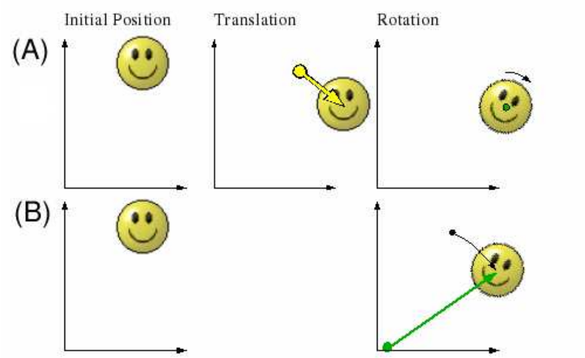
Transformações Geométricas

Rogers & Adams – Capítulo 2, Seções 3-1a 3-10

Apostila – Capítulo 4

Reposicionamento



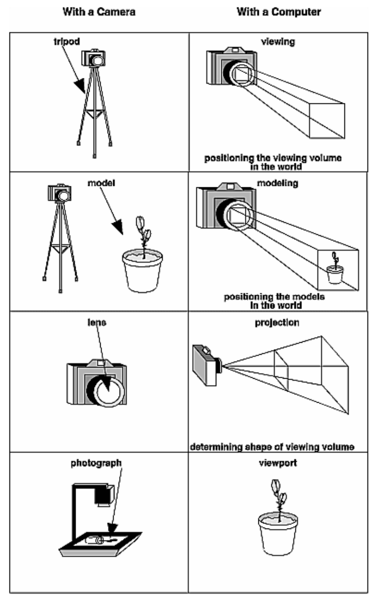
"Algebrizando"

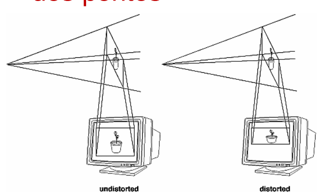
$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \xrightarrow{T} P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$P' = TP$$

Transformações Geométricas

- Posicionar os blocos constituintes de uma cena
  - Alterar as coordenadas dos pontos
- Projetar a cena sobre o plano de imagem
  - Alterar as coordenadas dos pontos
- Enquadrar a cena na janela de exibição
  - Alterar as coordenadas dos pontos

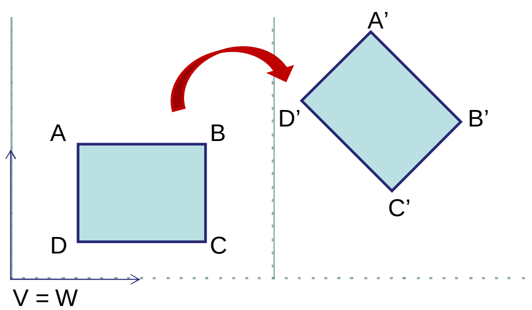




Transformações Rígidas

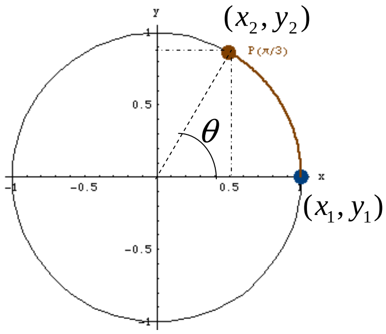
As formas das figuras não são alteradas:

- ➢Rotação
- ➢Reflexão
- ➢Deslocamento



f: P → P'

Rotação 2D



Ponto Inicial:

$$(x_1, y_1) = (R\cos\phi, Rsen\phi)$$

Ponto Final:

$$(x_2, y_2) = (R\cos(\phi+\theta), Rsen(\phi+\theta))$$

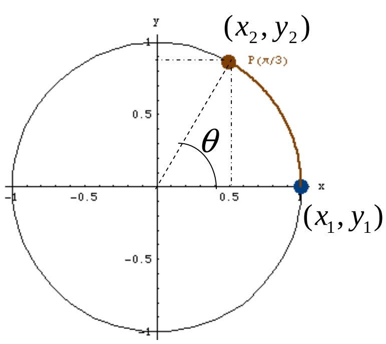
$$x_2 = R\cos(\phi+\theta) = R\cos\phi\cos\theta - Rsen\,\phi sen\,\theta = x_1\cos\theta - y_1 sen\,\theta$$

$$y_2 = Rsen\,(\phi+\theta) = Rsen\,\phi\cos\theta + R\cos\phi sen\,\theta = x_1 sen\,\theta + y_1\cos\theta$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Em linguagem matemática:
Rotação pode ser traduzida em uma transformação linear!!!!

Rotação 2D



Ponto Inicial:

$$(x_1, y_1) = (R\cos\phi, Rsen\phi)$$

Quais são os pontos invariantes nesta formulação?

Ponto Final:

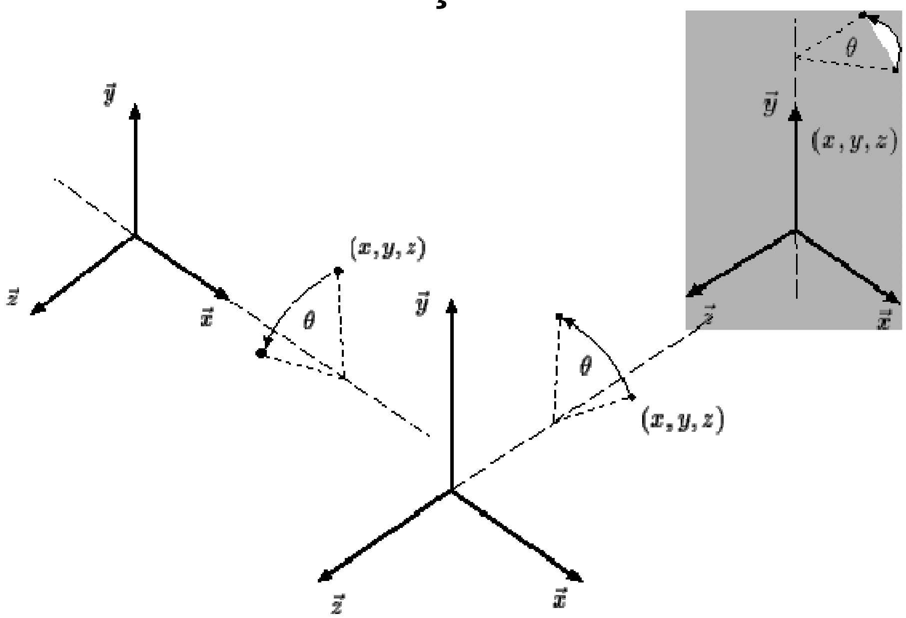
$$(x_2, y_2) = (R\cos(\phi+\theta), Rsen(\phi+\theta))$$

$$x_2 = R\cos(\phi+\theta) = R\cos\phi\cos\theta - Rsen\,\phi sen\,\theta = x_1\cos\theta - y_1 sen\,\theta$$

$$y_2 = Rsen\,(\phi+\theta) = Rsen\,\phi\cos\theta + R\cos\phi sen\,\theta = x_1 sen\,\theta + y_1\cos\theta$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Rotação 3D



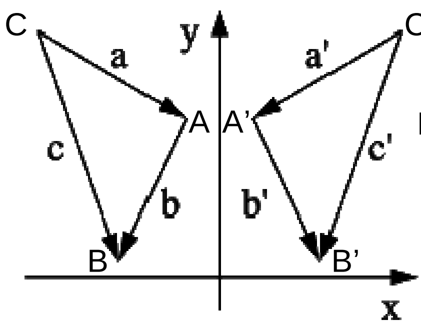
Notação Matricial

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 & \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \mathrm{sen}\,\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{sen}\,\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

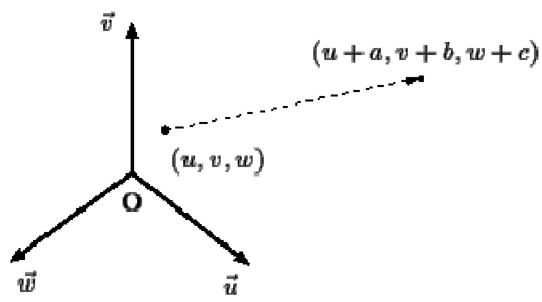
Reflexão 2D



$$Reflexao_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nesta formulação, quais são os pontos invariantes?

Translação



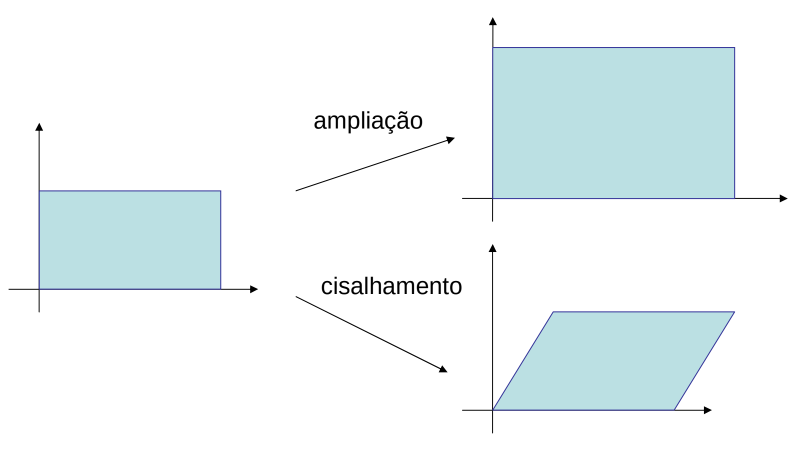
Há pontos invariantes neste tipo de ação?

Notação Matricial

$$Tr = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformações não-rígidas



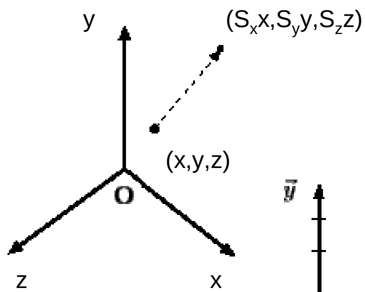
Transformações Lineares

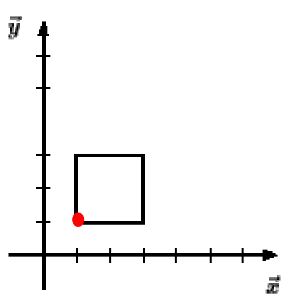
Transformações T entre dois espaços vetoriais V e W que preservam paralelismo

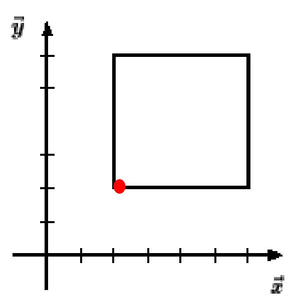
T: V $\rightarrow$ W

$$x_2 = a_{00}\, x_1 + a_{01}\, y_1 + a_{02}\, z_1 + a_{03}$$
$$y_2 = a_{10}\, x_1 + a_{11}\, y_1 + a_{12}\, z_1 + a_{13}$$
$$z_2 = a_{20}\, x_1 + a_{21}\, y_1 + a_{22}\, z_1 + a_{23}$$

Mudança de Escala







Notação Matricial

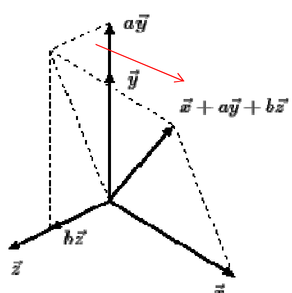
$$S = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{pmatrix}$$

Uniforme

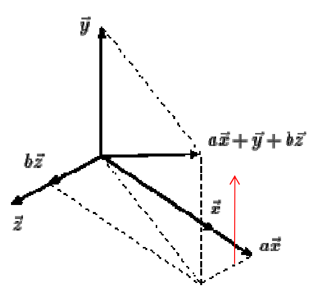
Não-Uniforme

Nesta formulação, quais são os pontos invariantes?

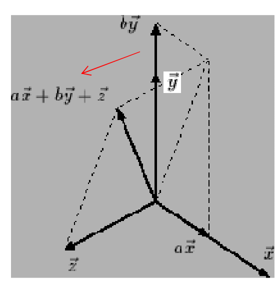
Cisalhamento (*Shearing*)



x em relação a y e z



y em relação a x e z



z em relação a x e y

Notação Matricial

$$Sh_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta x/\Delta z \\ 0 & 1 & \Delta y/\Delta z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Sh_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \Delta y/\Delta x & 1 & 0 \\ \Delta z/\Delta x & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Sh_y = \begin{pmatrix} 1 & \Delta x/\Delta y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \Delta z/\Delta y & 1 \end{pmatrix}$$

Nesta formulação, quais são os pontos invariantes?

Síntese

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

reflexão

$$\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{pmatrix}$$

re-dimensionamento

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deslocamento

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

rotação

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & sh_{xz} \\ 0 & 1 & sh_{yz} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cisalhamento

Transformações Afins

Afins = lineares + deslocamento

$\Updownarrow$

Aditividade: f(x+y) = f(x) + f(y)
Homogeneidade: f(ax) = af(x)

$\downarrow$

Reflexões
Rotação
Mudança de escala
Cisalhamento

Transformações rígidas

Concatenação Matricial

Transformação Linear

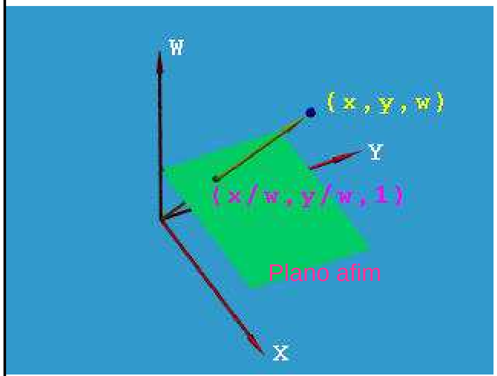
Translação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas = pontos R^n representados por (n+1) escalares

Coordenadas Homogêneas

(x,y,z,w)



Ponto

(x/w,y/w,z/w,1), ou seja, projeção de (x,y,z,w), sobre o plano w=1 com centro de projeção na origem.

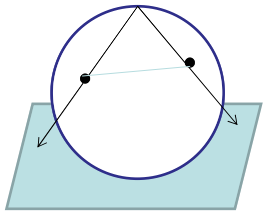
Vetor

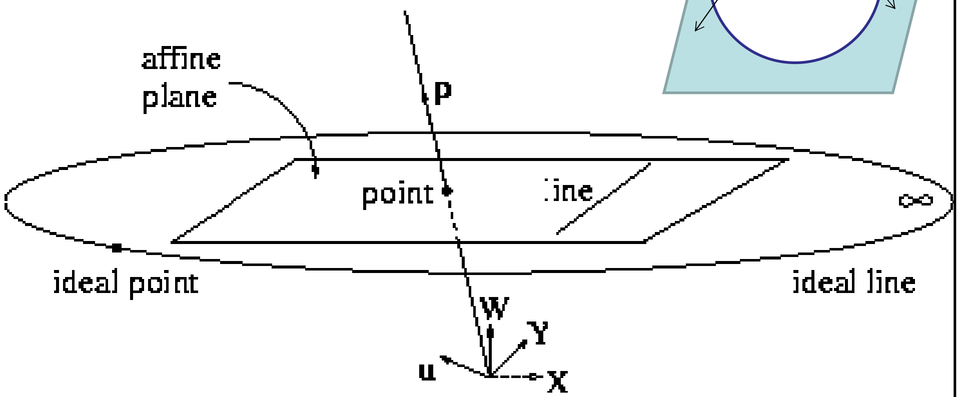
"diferença" de 2 pontos homogeneizados → Quarta coordenada(w) é nula

$\lim_{w \to 0}$ (x/w,y/w,z/w,w/w) = (∞,∞,∞,1)

na direção (x,y,z)

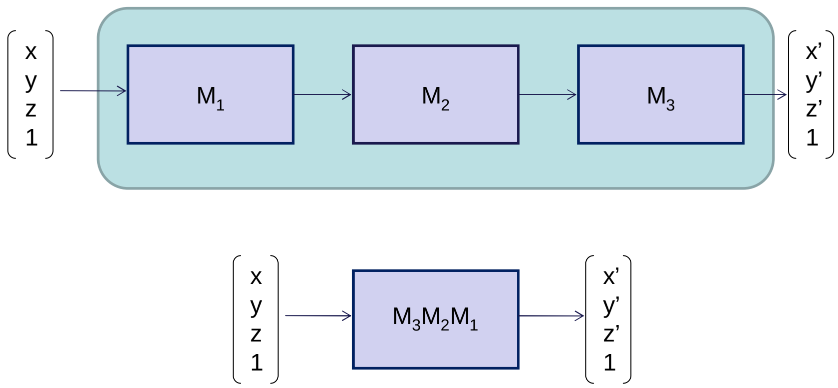
Plano Afim





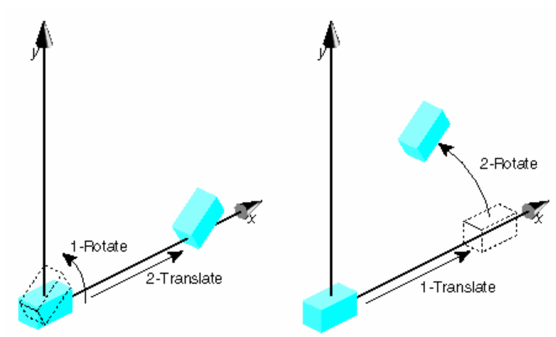
Transformações Afins

Notação Matricial



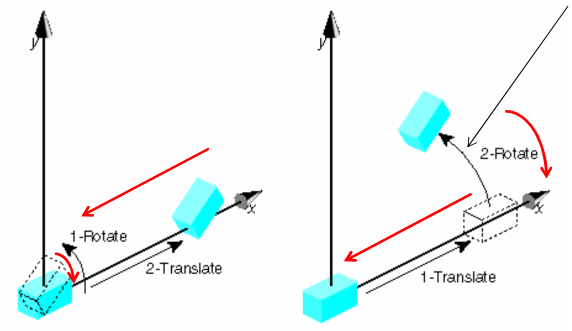
Composição de matrizes

Dois Exemplos



P' = T.(R.P) = (T.R).P   P' = R.(T.P) = (R.T).P

Transformações Inversas



P' = T.(R.P) = (T.R).P
$(T.R)^{-1}$ P' = P
R^{-1} T^{-1} P' = P

P' = R.(T.P) = (R.T).P
$(R.T)^{-1}$ P' = P
T^{-1} R^{-1} P' = P

Matrizes inversas

Alternativas para "algebrizar" Rotações

- Notação Matricial
- Rodrigue's rotation formula

$$\vec{v}' = \vec{v}\cos\theta + (\vec{k}\times\vec{v})sen\theta + \vec{k}(\vec{k}\bullet\vec{v})(1-\cos\theta)$$

- Quatérnios

$$\vec{v}' = q\vec{v}q^{-1}$$

quatérnios

Quatérnios

Elementos da base

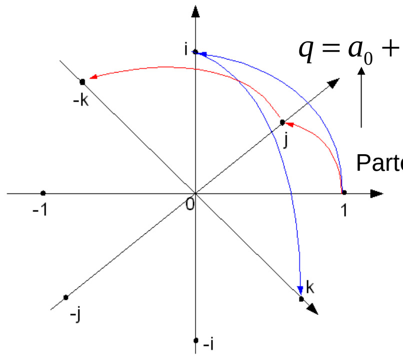
$$q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k = r(\cos\theta + I sen\theta) = re^{I\theta}$$

Parte vetorial

Parte escalar

$$I = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

$$I^2 = -1$$



Graphical representation of quaternion units product as 90°-rotation in 4D-space

ij = k
ji = -k
ij = -ji

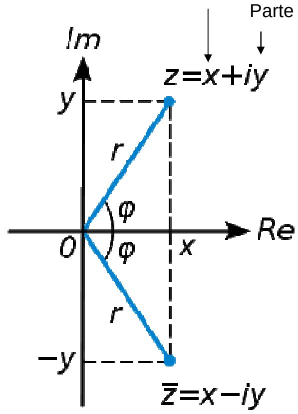
×	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Não é comutativa!

Números Complexos

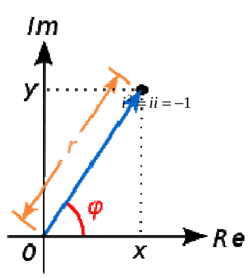
Parte real

Parte imaginária



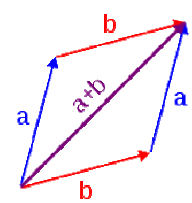
(conjugado)

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z.\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2}$$

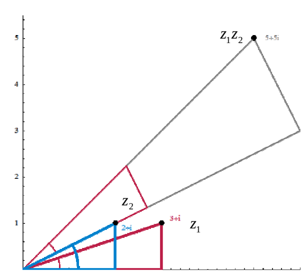


Forma Polar

$$z = r(\cos\varphi + isen\varphi) = re^{i\varphi}$$



$$a + b$$



$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isen(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Quatérnios

•Conjugado

$$\bar{q} = a_0 - (a_1 i + a_2 j + a_3 k)$$

•Adição e Subtração:

$$q \pm q' = (a_0 \pm a_0') + (a_1 \pm a_1')i + (a_2 \pm a_2')j + (a_3 \pm a_3')k$$

•Multiplicação

$$qq' = (a_0 a_0' - a_1 a_1' - a_2 a_2' - a_3 a_3') + (a_0 a_1' + a_1 a_0' + a_2 a_3' - a_3 a_2')i +$$
$$(a_0 a_2' - a_1 a_3' + a_2 a_0' + a_3 a_1')j + (a_0 a_3' + a_1 a_2' - a_2 a_1' + a_3 a_0')k$$

$$= \begin{bmatrix} a_0' & -a_1' & -a_2' & -a_3' \\ a_1' & a_0' & a_3' & -a_2' \\ a_2' & -a_3' & a_0' & a_1' \\ a_3' & a_2' & -a_1' & a_0' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0' & a_1' & a_2' & a_3' \\ -a_1' & a_0' & -a_3' & a_2' \\ -a_2' & a_3' & a_0' & -a_1' \\ -a_3' & -a_2' & a_1' & a_0' \end{bmatrix}$$

$$= rr'(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + I sen(\varphi_1 + \varphi_2)) = rr' e^{I(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

•Norma e Inverso

$$|q|^2 = q\bar{q} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \qquad q^{-1} = \frac{\bar{q}}{q\bar{q}}$$

Quatérnios em “forma vetorial”

$$q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k = a_0 + (a_1 i + a_2 j + a_3 k) = a_0 + \vec{v}$$

•Conjugado

$$\bar{q} = a_0 - \vec{v}$$

•Adição e Subtração:

$$q + q' = (a_0 + a_0') + (\vec{v} + \vec{v}')$$

•Multiplicação

$$qq' = (a_0 a_0' - \vec{v}\vec{v}') + (\vec{v} \times \vec{w} + a_0 \vec{v}' + a_0' \vec{v})$$

$$\vec{v}\vec{v}' = \vec{v} \times \vec{v}' - \vec{v} \bullet \vec{v}'$$

•Inverso

$$(a_0 + \vec{v})^{-1} = \frac{a_0 - \vec{v}}{|a_0 + \vec{v}|^2} = \frac{a_0 - \vec{v}}{a_0^2 + |\vec{v}|^2}$$

Espaço de Rotações "2D"

Parametrização em coordenadas esféricas (θ, φ)

$\downarrow$

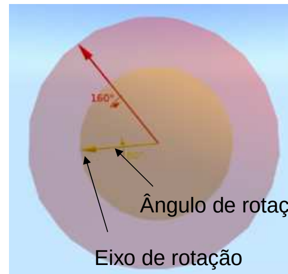
degeneração nos pólos

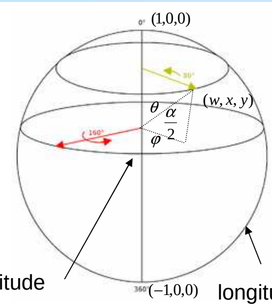
$\downarrow$

Parametrização em coordenadas homogêneas (w, x, y)

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{w}{1} = w$$

$$sen\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{1} = \sqrt{x^2 + y^2}$$





Espaço de Rotações "3D"

Parametrização em coordenadas esféricas $(\theta, \varphi, \gamma)$

$\downarrow$

degeneração nos pólos

$\downarrow$

Parametrização em coordenadas homogêneas (w, x, y, z)

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{w}{1} = w$$

$$sen\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{1} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$\updownarrow$

$$q = \cos\frac{\alpha}{2} + Isen\frac{\alpha}{2} = e^{I\frac{\alpha}{2}}$$

http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternions_and_spatial_rotation

$$\vec{v}' = q\vec{v}q^{-1}$$

Quatérnios e Rotações

•Composição de rotações:

$$\vec{v}' = pq\vec{v}(pq)^{-1} = pq\vec{v}q^{-1}p^{-1} = p(q\vec{v}q^{-1})p^{-1}$$

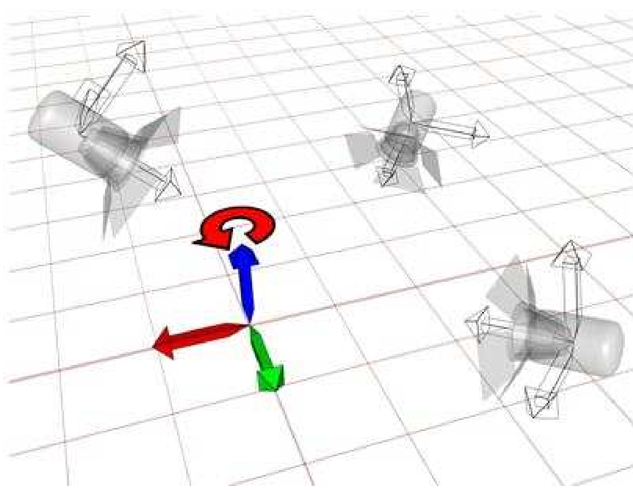
•Quatérnio unitário $\longleftrightarrow$ Matrix ortogonal

$$q = a + bi + cj + dk$$

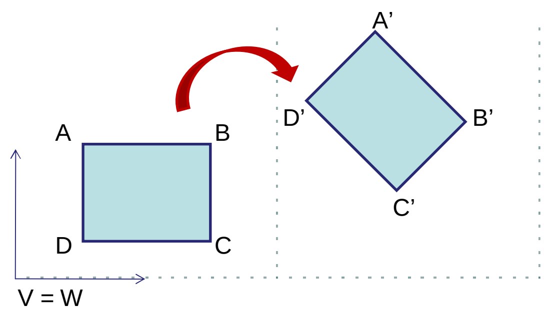
$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2bc-2ad & 2bd+2ac \\ 2bc+2ad & a^2+b^2-c^2-d^2 & 2cd-2ab \\ 2bd-2ac & 2cd+2ab & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{bmatrix}$$

Construção de uma Cena

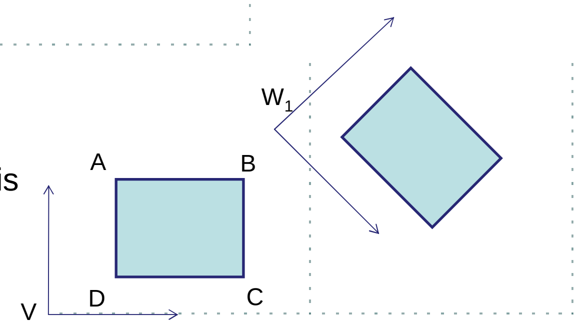


Dois Paradigmas de Transformações



No mesmo referencial

Mudança de referenciais

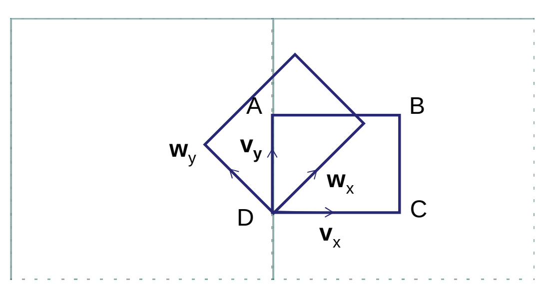


Mudança de Referenciais

Reposicionamento de Objetos

P' =TP
T = P'P^{-1},
se P for inversível

"Transformação de Base"

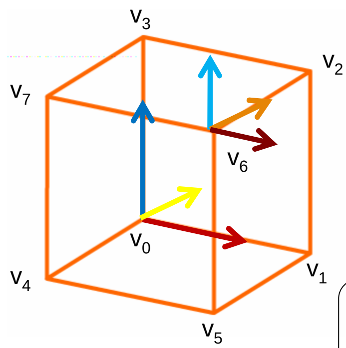


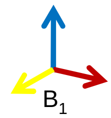
$$\lfloor w_x \quad w_y \rfloor = T \lfloor v_x \quad v_y \rfloor$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{x,x} & w_{y,x} \\ w_{x,y} & w_{y,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x,x} & v_{y,x} \\ v_{x,y} & v_{y,y} \end{bmatrix}^{-1}$$

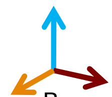
$T = B_W B_V^{-1}$

Exemplo





$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$P' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P' = B_1 B_2^{-1} P$$

Transformações de Vetores

Pontos

$$\begin{pmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} A'_x & B'_x & C'_x \\ A'_y & B'_y & C'_y \end{pmatrix}$$

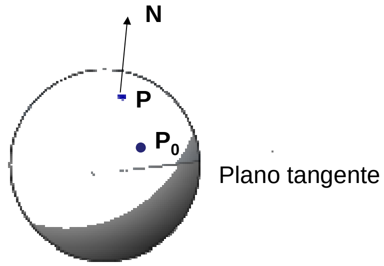
Vetores: diferença de 2 pontos

$$\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} a'_x & b'_x & c'_x \\ a'_y & b'_y & c'_y \end{pmatrix}$$

$$MP_2 - MP_1 = M(P_2 - P_1) = M\overrightarrow{P_2P_1}$$

Vetores Normais

Em superfície suave, pode-se definir localmente um plano tangente a cada ponto. O vetor normal deste plano coincide com o vetor normal da superfície neste ponto **P**.



Antes da transformação T:

$N(P_0 - P) = 0$

Após a transformação T:

$N'(TP_0 - TP) = 0$

$N(P_0-P) = N'T(P_0-P)$

$N = N'T$

$NT^{-1} = N'$

Se for deslocamento d:

$N'(P_0+d - (P+d)) = N(P_0-P) = 0$

$N' = N$

N e N' em vetor-linha!

Funções Analíticas

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Equação implícita de uma circunferência

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \Longrightarrow \quad (a_{00}x + a_{01}y)^2 + (a_{10}x + a_{11}y)^2 = R^2$$

Equação paramétrica de uma circunferência

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ Rsen\theta \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{00}x + a_{01}y \\ a_{10}x + a_{11}y \end{pmatrix} = ???$$

Funções Analíticas

Equação de um segmento

$P(t) = (1-t)P_1 + t\,P_2$

Transformação linear:

$(1-t)\, T_L P_1 + t T_L P_2 = T_L[(1-t)P_1 + tP_2] = T_L P(t)$

Translação:

$(1-t)\,(P_1+d) + t(P_2+d) = (1-t)P_1 + tP_2 + (1+t-t)d = P(t)+d$

Equação de uma curva de Bézier

$P(t) = \Sigma\, B_{n,i}(t)\, P_i$

Transformação linear:

$\Sigma\, B_{n,i}(t)\,(T_L\, P_i) = T_L(\Sigma\, B_{n,i}(t)\, P_i) = T_L P(t)$

Translação:

$\Sigma\, B_{n,i}(t)\,(P_i + d) = \Sigma\, B_{n,i}(t)\, P_i + \Sigma\, B_{n,i}(t)\, d = P(t) + d$

Exemplos

- Rotação em torno do eixo (1,0,1) por 90^0

$$\vec{v}' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}k\right)\vec{v}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}k\right)$$

- $\vec{v} = (0,1,0) = j$

$$\vec{v}' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}k\right)j\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}k\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}k\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}j + \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}i\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}k$$

- Composição de 45^0 em torno de y e 45^0 em torno de x

$$\frac{\sqrt{2}+i}{2}\,\frac{\sqrt{2}+j}{2} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4}(i\sqrt{2} + j\sqrt{2} + k) = \cos\frac{\alpha}{2} + I sen\frac{\alpha}{2}$$

$\alpha = 120^0$ em torno do eixo $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$

- Arcball

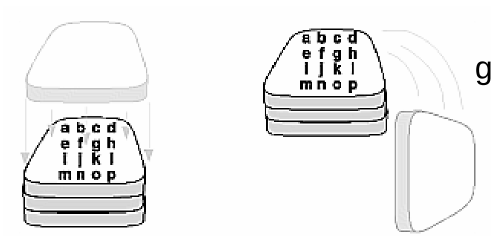
OpenGL

Pilha de Matrizes de Transformação *MODELVIEW*

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_4 & a_8 & a_{12} \\ a_1 & a_5 & a_9 & a_{13} \\ a_2 & a_6 & a_{10} & a_{14} \\ a_3 & a_7 & a_{11} & a_{15} \end{bmatrix}^t$$

glTranslate
glRotate
glScale
glMultMatrix

glPushMatrix



glPopMatrix

OpenGL

```
void init(void) {
    /* Enable a single OpenGL light. */
    glLightfv(GL_LIGHT0, GL_DIFFUSE,
    light_diffuse);
    glLightfv(GL_LIGHT0,
    GL_POSITION, light_position);
    glEnable(GL_LIGHT0);
    glEnable(GL_LIGHTING);
    /* Use depth buffering for hidden
    surface elimination. */
    glEnable(GL_DEPTH_TEST);
    /* Setup the view of the cube. */
    glMatrixMode(GL_PROJECTION);
    gluPerspective( /* field of view in
    degree */ 40.0, /* aspect ratio */ 1.0,
    /* Z near */ 1.0, /* Z far */ 10.0);
    glMatrixMode(GL_MODELVIEW);
    gluLookAt(0.0, 0.0, 5.0, /* eye is at
    (0,0,5) */ 0.0, 0.0, 0.0, /* center is at
    (0,0,0) */ 0.0, 1.0, 0.); /* up is in
    positive Y direction */
}
```

```
/* Adjust cube position to be
   asthetic angle. */

void display(void) {
    glClear(GL_COLOR_BUFFE
    R_BIT |
    GL_DEPTH_BUFFER_BIT);
      /* Adjust cube position to
    be asthetic angle. */
     glTranslatef(0.0, 0.0, -1.0);
     glRotatef(60, 1.0, 0.0, 0.0);
     glPushMatrix();
     glRotatef(-20, 0.0, 0.0, 1.0);
     drawBox();
     glPopMatrix();
     glTranslatef(1.0, -1.0, 0.5);
     drawBox();
     glutSwapBuffers();
}
```