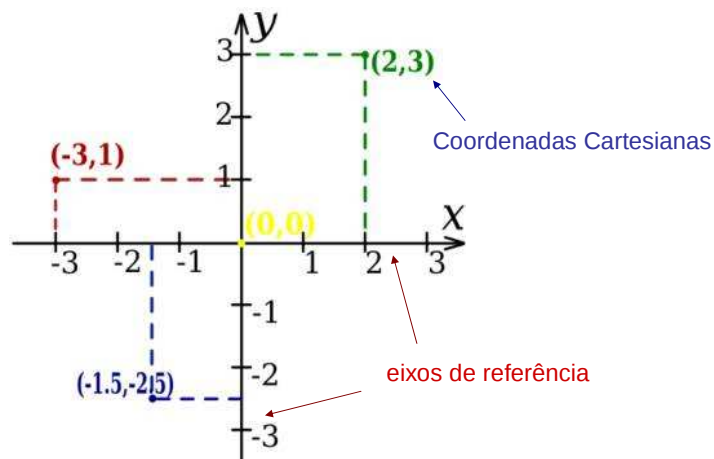


Fundamentos Matemáticos

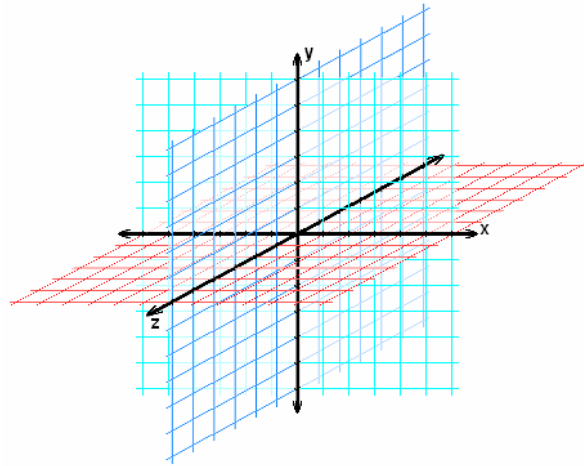
Shirley – Capítulo 3
Apostila – Seção 3.1

Como se representa um ponto?

Por suas **distâncias** em relação aos eixos de referência
Noção Geométrica → Noção Algébrica

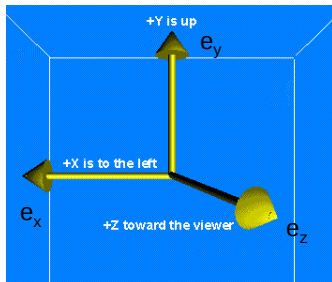


Coordenadas Cartesianas 3D

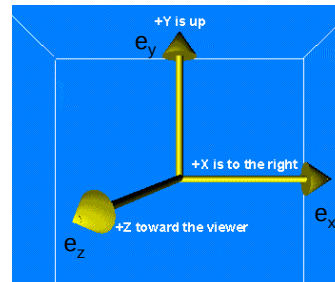


IA725 – 1s2011
Profa. Ting

Sistemas de Referência 3D



Mão-esquerda

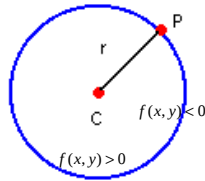


Mão-direita

IA725 – 1s2011
Profa. Ting

“Algebrização” de Geometria

Circunferência é o lugar geométrico dos pontos que apresentam a mesma distância em relação a um centro.



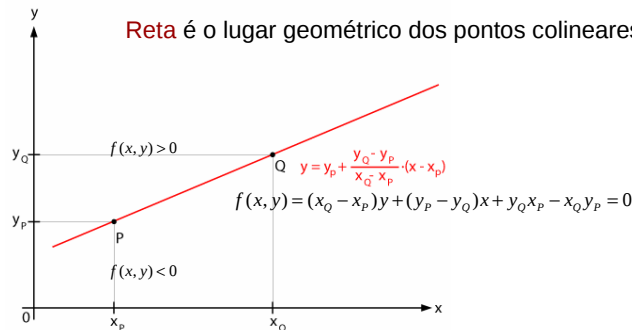
$$P = (x, y)$$

$$C = (x_c, y_c)$$

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

$$f(x, y) = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 - r^2 = 0$$

Reta é o lugar geométrico dos pontos colineares.



IA725 – 1s2011
Profa. Ting

Funções

Relações entre os elementos de dois conjuntos: domínio e contradomínio/imagem.

$$f : D \rightarrow C$$

1. Circunferência $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 - r^2 = 0$$

$$D: x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$\text{Imagem: } 0 \in \mathbb{R}$$

2. Reta $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = (x_q - x_p)y + (y_p - y_q)x + y_q x_p - x_q y_p = 0$$

$$D: x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$\text{Imagem: } 0 \in \mathbb{R}$$

Se o domínio for $x, y \in [0, r] \times [0, r]$?

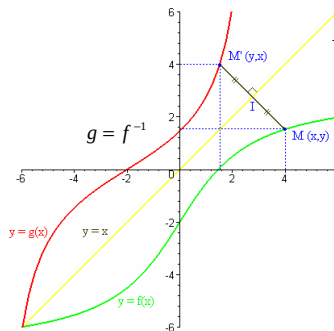
IA725 – 1s2011
Profa. Ting

Algumas funções

1. Função Identidade: a imagem de cada elemento é o próprio elemento. Ex: $y=x$.

2. Função Inversa:

$$f : D \rightarrow C \Rightarrow f^{-1} : C \rightarrow D / f \circ f^{-1} = I$$



IA725 – 1s2011
Profa. Ting

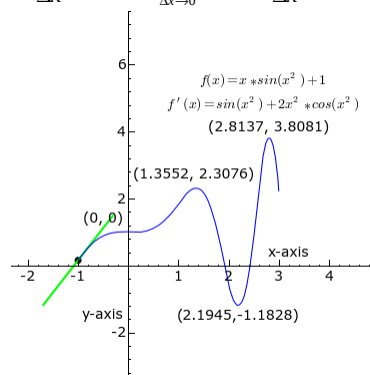
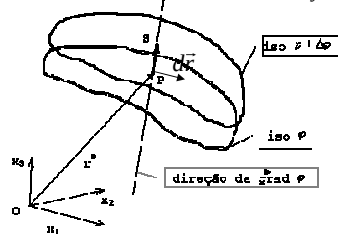
Propriedades

1. Derivadas parciais: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

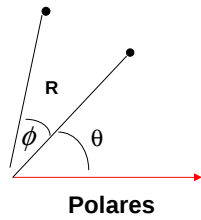
2. Gradiente: $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$



IA725 – 1s2011
Profa. Ting

<http://www.hottopos.com/regeq7/antunha.htm>

Outras Alternativas?



Polares

$$(R, \theta)$$

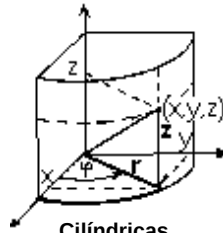
$$x = R \cos \theta$$

$$y = R \sin \theta$$

$$(R, \theta + \phi)$$

$$x = R \cos(\theta + \phi)$$

$$y = R \sin(\theta + \phi)$$



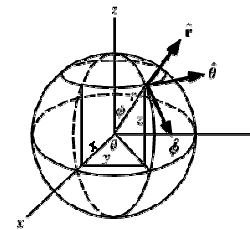
Cilíndricas

$$(r, \phi, z)$$

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

$$z = z$$



Esféricas

$$(r, \phi, \theta)$$

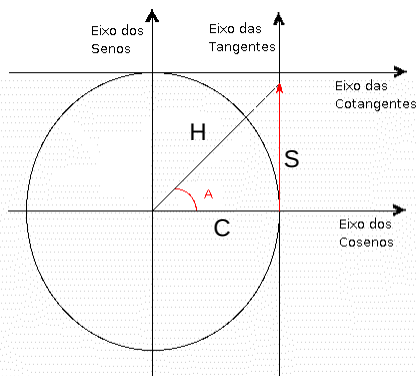
$$x = r \sin \phi \cos \theta$$

$$y = r \sin \phi \sin \theta$$

$$z = r \cos \phi$$

IA725 – 1s2011
Profa. Ting

Trigonometria



$$\sin A = \frac{S}{H}$$

$$\cos A = \frac{C}{H}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{S}{C}$$

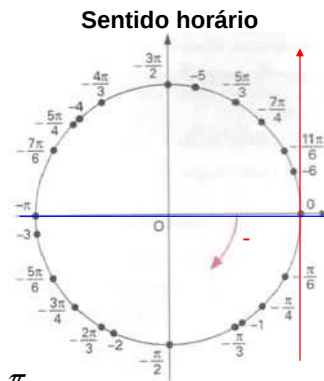
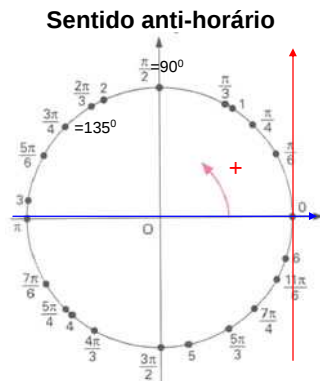
$$\sec A = \frac{1}{\sin A} = \frac{H}{S}$$

$$\csc A = \frac{1}{\cos A} = \frac{H}{C}$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{C}{S}$$

IA725 – 1s2011
Profa. Ting

Circunferência Trigonométrica



$$1^\circ = \frac{180}{\pi} \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{\pi}{180}\right)^\circ$$

$$\text{sen}(-A) = -\text{sen}A$$

$$\cos(-A) = \cos A$$

$$\tan(-A) = -\tan A$$

IA725 – 1s2011
Profa. Ting

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \cos A$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \text{sen}A$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \cot A$$

$$\text{sen}(\pi - A) = \text{sen}A$$

$$\cos(\pi - A) = -\cos A$$

$$\tan(\pi - A) = -\tan A$$

Identidades Trigonômétricas

1. Identidade de Pitágoras $\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$

$$\tan^2 A + 1 = \sec^2 A$$

$$\cot^2 A + 1 = \csc^2 A$$

2. Identidade de Soma e Subtração $\text{sen}(A \pm B) = \text{sen}A \cos B \pm \text{sen}B \cos A$

$$\text{sen}(2A) = 2\text{sen}A \cos A$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \text{sen}A \text{sen}B$$

$$\cos(2A) = \cos^2 A - \text{sen}^2 A$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

$$\tan(2A) = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$\cot(A \pm B) = \frac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A}$$

IA725 – 1s2011
Profa. Ting

Identidades Trigonométricas

3. Identidade de Meio Ângulo $\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 - \cos A}{2}$

$$\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 + \cos A}{2}$$

4. Identidade de Produto $\sin A \sin B = -\frac{\cos(A+B) - \cos(A-B)}{2}$

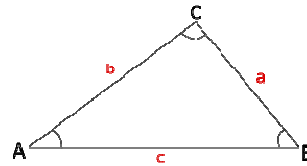
$$\sin A \cos B = \frac{\sin(A+B) + \sin(A-B)}{2}$$

$$\cos A \cos B = \frac{\cos(A+B) + \cos(A-B)}{2}$$

5. Lei dos Senos $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

6. Lei dos Cossenos $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

7. Lei das Tangentes $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}$



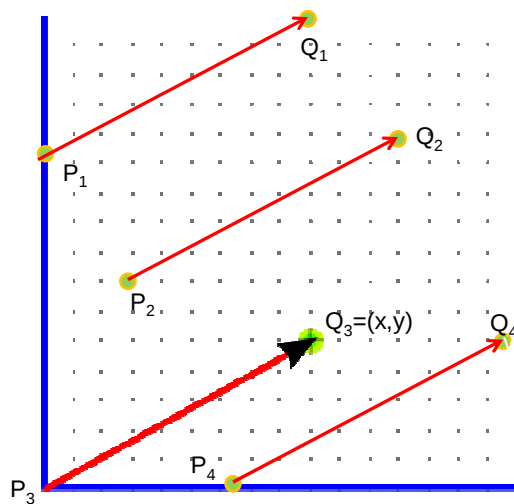
IA725 – 1s2011
Profa. Ting

Como se representa posição relativa entre 2 pontos?



IA725 – 1s2011
Profa. Ting

Vetores



“Diferença” entre 2 pontos
 $\mathbf{v} = Q_i - P_i$

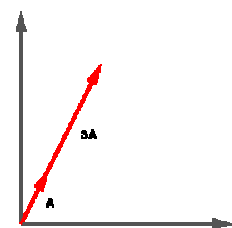
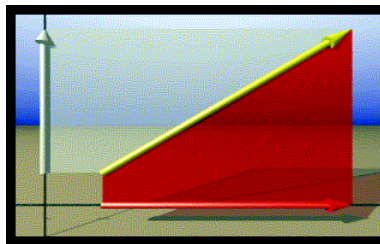
- Magnitude ($|\mathbf{v}|$)
- Orientação

Vetor-posição: $P_i = (0,0)$

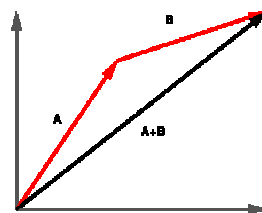
Elementos geométricos que
 podem ser manipulados
 algebricamente.

IA725 – 1s2011
 Profa. Ting

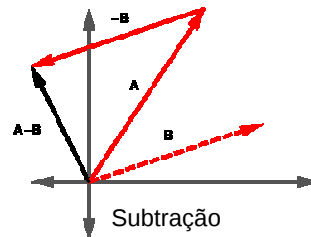
Operações sobre Vetores



Multiplicação por
 um escalar



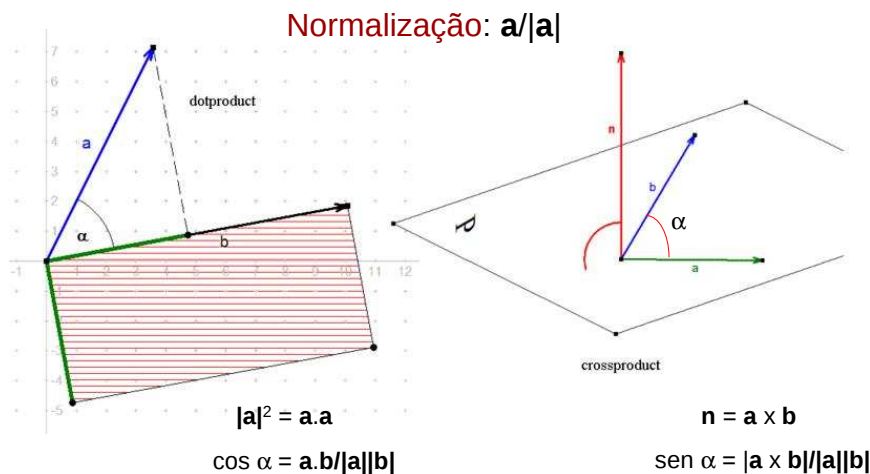
Adição



Subtração

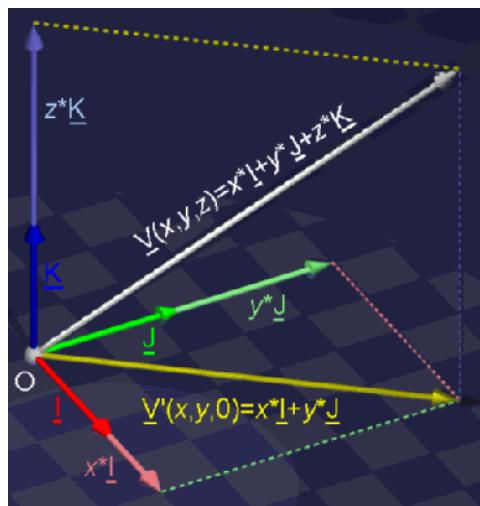
Operações sobre Vetores

Produto Escalar, Vetorial e Normalização



IA725 – 1s2011
Profª. Ting

Combinações Lineares



IA725 – 1s2011
Profª. Ting

Álgebra Linear

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

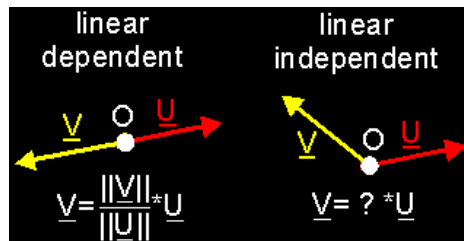
a_i : escalares $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$: vetores

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ são **linearmente dependentes** se existem a_i , nem todos nulos, tais que

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n = 0$$

Em caso contrário, eles são **linearmente independentes**.
 n vetores LI **geram** um espaço de dimensão n

IA725 – 1s2011
 Profa. Ting



Representação Matricial

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

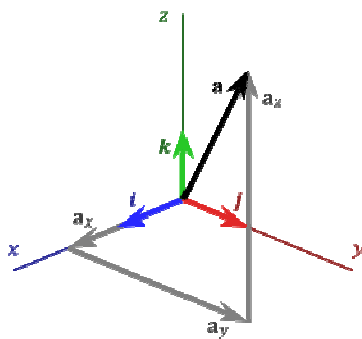
$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1x} & v_{2x} & \dots & v_{nx} \\ v_{1y} & v_{2y} & \dots & v_{ny} \\ v_{1z} & v_{2z} & \dots & v_{nz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{vetor-coluna}$$

$$\begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{nx} & v_{ny} & v_{nz} \end{bmatrix} \quad \text{vetor-linha}$$

IA725 – 1s2011
 Profa. Ting

Vetores-base em $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$ é gerado por 3 vetores linearmente independentes.



Vetores canônicos ou versores

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

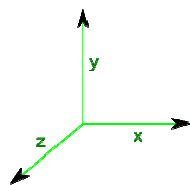
$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

coordenadas afins

IA725 – 1s2011
Profa. Ting

Vetor-Posição em Referenciais Distintos

A coordinate system using 'green' basis vectors

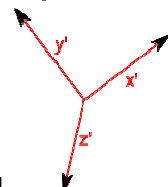


vector can be represented as a linear sum of basis vectors:
 $P = ax + by + cz$

Physical Vector



A different coordinate system using 'red' basis vectors



vector can be represented as a linear sum of basis vectors:
 $P = d x' + e y' + f z'$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a, b, c \\ d, e, f \end{pmatrix}$

Coordenadas afins

IA725 – 1s2011
Profa. Ting

Mudança de Base

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_x & y_x & z_x \\ x_y & y_y & z_y \\ x_z & y_z & z_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_x & y_x & z_x \\ x_y & y_y & z_y \\ x_z & y_z & z_z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

IA725 – 1s2011
Profa. Ting

Propriedades de Matrizes

- Multiplicação:
 - Nem sempre vale a comutatividade
 - Associatividade ((AB)C = A(BC))
 - Nem sempre vale o cancelamento (AC=BC não implica em A=B)
- Transposta: as linhas se transformam em colunas
 - $(A^t)^t = A$
 - $(A+B)^t = A^t + B^t$
 - $(AB)^t = B^t A^t$
- Matrizes com propriedades especiais
 - Matriz identidade I: $IA = A$
 - Matriz inversa: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
 - Matriz ortonormal: $A^{-1} = A^t$

IA725 – 1s2011
Profa. Ting

Construção de uma Base

Dado um vetor $\vec{a}$

1. Normalize o vetor $\vec{w} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

2. Defina um vetor $\vec{t}$, tal que difira de $\vec{w}$ de somente um elemento

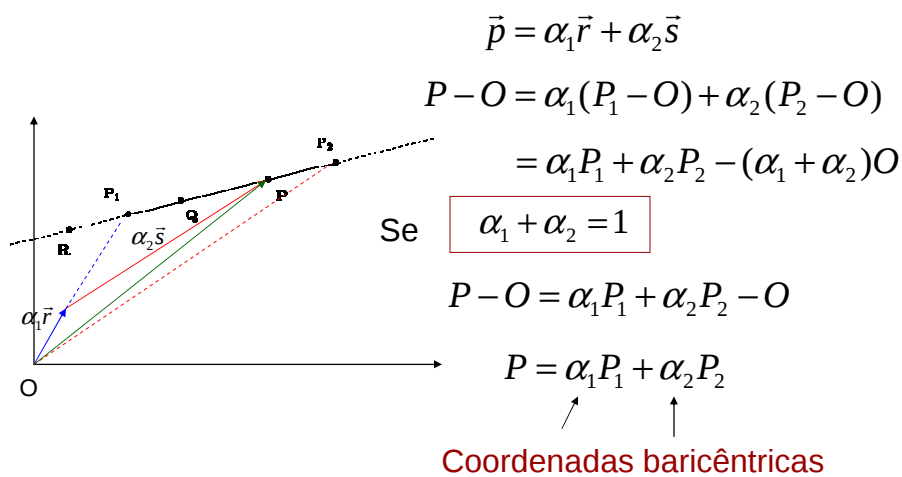
3. Determine um vetor $\vec{u}$ perpendicular a

$$\vec{u} = \vec{w} \times \vec{t}$$

4. Determine um vetor $\vec{v}$ perpendicular a $\vec{w}$ e a $\vec{u}$

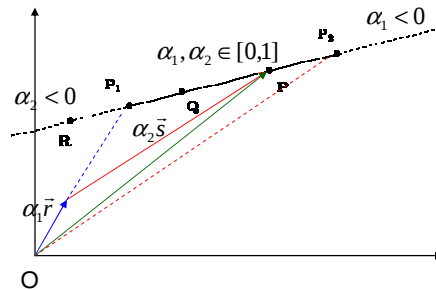
IA725 – 1s2011
Profa. Ting

Combinação Baricêntrica



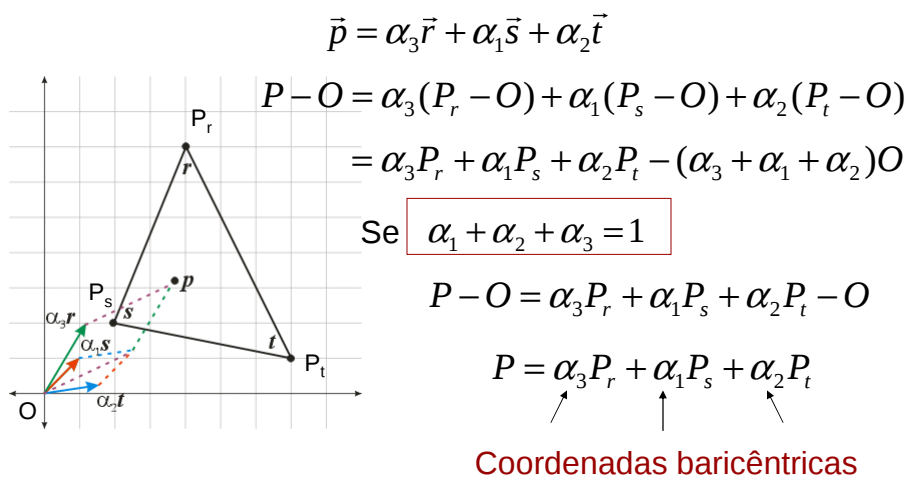
IA725 – 1s2011
Profa. Ting

Coordenadas Baricêntricas



IA725 – 1s2011
Profª. Ting

Combinação Baricêntrica



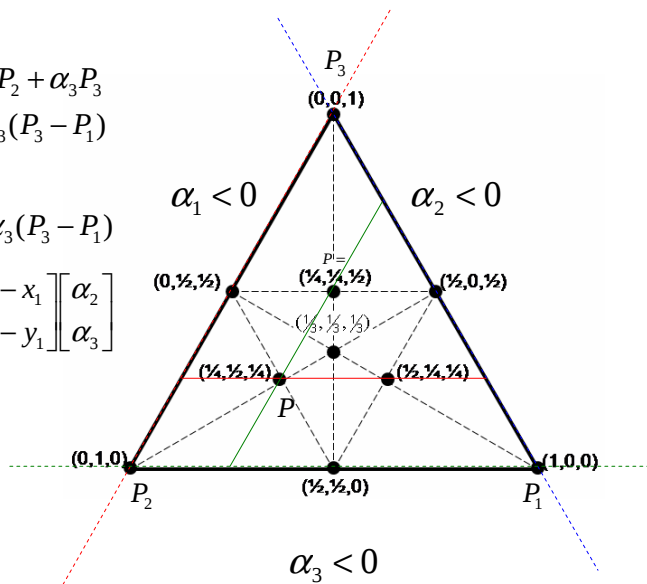
IA725 – 1s2011
Profª. Ting

Coordenadas Baricêntricas

$$\begin{aligned} P &= \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 \\ &= (1 - \alpha_2 - \alpha_3) P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 \\ &= P_1 + \alpha_2 (P_2 - P_1) + \alpha_3 (P_3 - P_1) \end{aligned}$$

$$P - P_1 = \alpha_2 (P_2 - P_1) + \alpha_3 (P_3 - P_1)$$

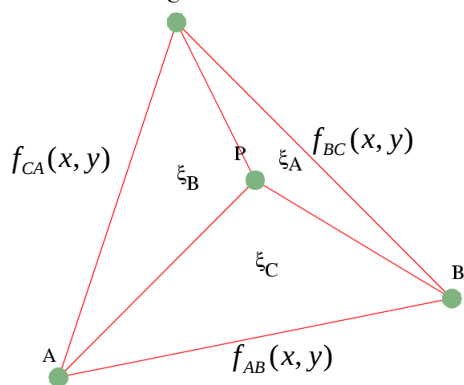
$$\begin{bmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$



IA725 – 1s2011
Profa. Ting

Interpretação Geométrica (1)

Coordenadas baricêntricas correspondem a proporções da distância do ponto em relação às arestas opostas



$$f_{AC}(x_B, y_B) \rightarrow 1$$

$$f_{AC}(x, y) \rightarrow \alpha_B$$

$$f_{BC}(x_A, y_A) \rightarrow 1$$

$$f_{BC}(x, y) \rightarrow \alpha_A$$

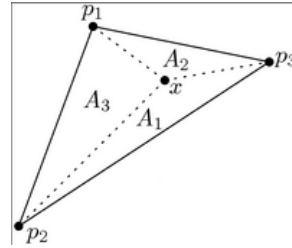
$$f_{AB}(x_C, y_C) \rightarrow 1$$

$$f_{AB}(x, y) \rightarrow \alpha_C$$

IA725 – 1s2011
Profa. Ting

Interpretação Geométrica (2)

Coordenadas baricêntricas correspondem as razões entre as áreas dos sub-triângulos adjacentes a arestas opostas e a área total A do triângulo.



$$\alpha_1 = \frac{A_1}{A} \quad \vec{n} = (p_3 - p_2) \times (p_1 - p_2)$$

$$\alpha_2 = \frac{A_2}{A} \quad \vec{n}_1 = (p_3 - p_2) \times (x - p_2)$$

$$\alpha_3 = \frac{A_3}{A} \quad \vec{n}_2 = (p_1 - p_3) \times (x - p_3)$$

$$A = \frac{1}{2} |\vec{n}|$$

$$A_1 = \frac{1}{2} |\vec{n}_1|$$

$$A_2 = \frac{1}{2} |\vec{n}_2|$$

$$A_3 = \frac{1}{2} |\vec{n}_3|$$

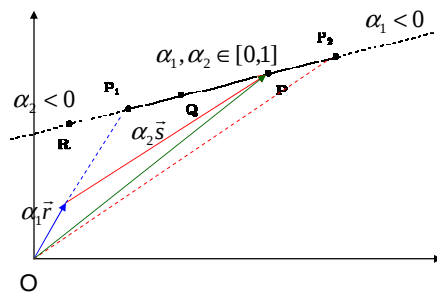
$$\alpha_1 = \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}_1}{\vec{n} \cdot \vec{n}}$$

$$\alpha_2 = \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}_2}{\vec{n} \cdot \vec{n}}$$

$$\alpha_3 = \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}_3}{\vec{n} \cdot \vec{n}}$$

IA725 – 1s2011
Profª. Ting

Combinação Convexa



Pontos no interior do segmento P_1P_2 : $P = P_1 + t(P_2 - P_1)$

$$= (1-t)P_1 + tP_2$$

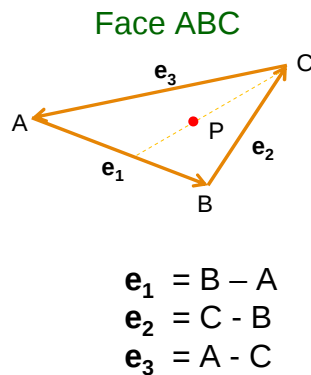
$$= \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - t + t = 1$$

$$\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$$

IA725 – 1s2011
Profª. Ting

Combinação Convexa



Pontos interiores do triângulo

$$P(\alpha_1, \alpha_2, \lambda) = \lambda(\alpha_1 B + \alpha_2 A) + (1 - \lambda)C$$

$$= \lambda\alpha_1 B + \lambda\alpha_2 A + (1 - \lambda)C$$

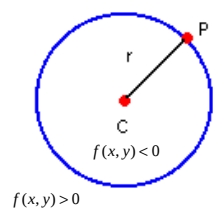
$$P(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha B + \beta A + \gamma C$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

$$0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$$

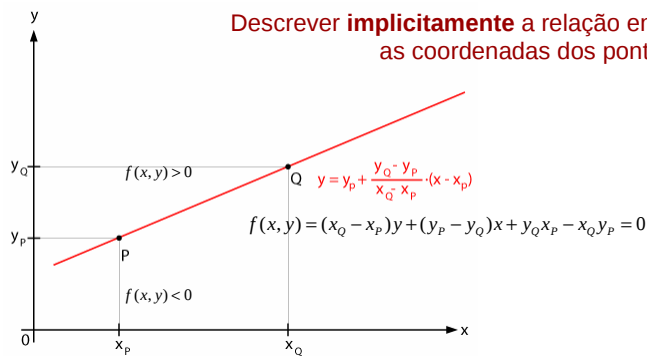
IA725 – 1s2011
Profª. Ting

“Algebrização” de Geometria



$P = (x, y)$
 $C = (x_c, y_c)$
 $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$
 $f(x, y) = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 - r^2 = 0$

Descrever **implicitamente** a relação entre as coordenadas dos pontos.



IA725 – 1s2011
Profª. Ting

Representação Explícita

$$y = f(x) \text{ ou } z = f(x,y)$$

$$f(x,y) = (x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 - r^2 = 0$$

$$y = \pm \sqrt{r^2 - (x-x_c)^2} + y_c$$

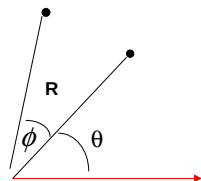
$$f(x,y) = (x_Q - x_P)y + (y_P - y_Q)x + y_Q x_P - x_Q y_P = 0$$

$$y = \frac{(y_Q - y_P)x - y_Q x_P + x_Q y_P}{(x_Q - x_P)}$$

Não permite representar correspondências sobrejetivas!

IA725 – 1s2011
Profa. Ting

Outras Alternativas?



Polares

$$(R, \theta)$$

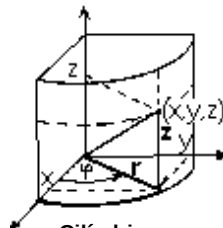
$$x = R \cos \theta$$

$$y = R \sin \theta$$

$$(R, \theta + \phi)$$

$$x = R \cos(\theta + \phi)$$

$$y = R \sin(\theta + \phi)$$



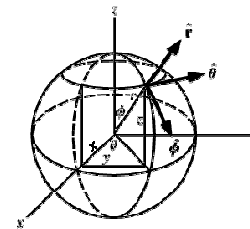
Cilíndricas

$$(r, \phi, z)$$

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

$$z = z$$



Esféricas

$$(r, \phi, \theta)$$

$$x = r \sin \phi \cos \theta$$

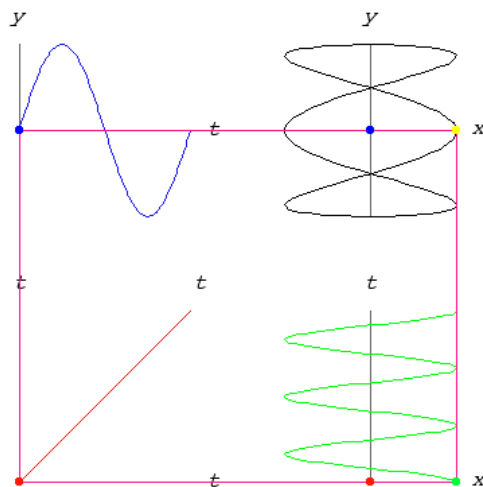
$$y = r \sin \phi \sin \theta$$

$$z = r \cos \phi$$

IA725 – 1s2011
Profa. Ting

Representar as coordenadas em termos
de **parâmetros** auxiliares.

Função Paramétrica



IA725 – 1s2011
Profa. Ting

Representação Analítica

•Funções Explícitas:

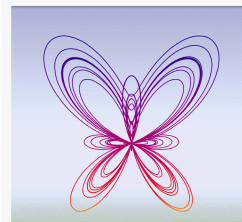
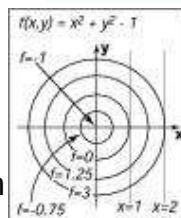
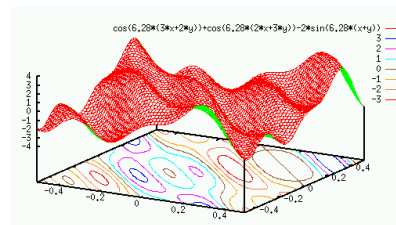
Uma das coordenadas é explicitamente dada em função das outras.

•Funções Implícitas:

As coordenadas são relacionadas por uma função.

•Funções Paramétricas:

As coordenadas são dadas em termos de um conjunto de parâmetros.

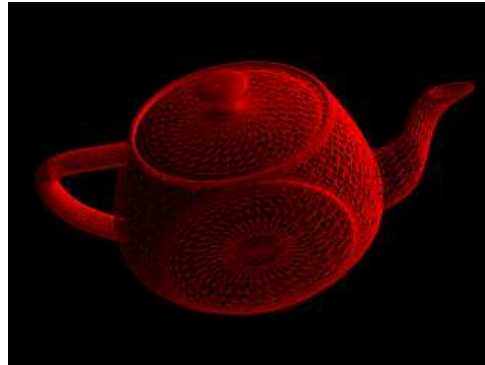


IA725 – 1s2011
Profa. Ting

Funções

Propriedades desejadas:

- **Simplicidade**
- **Representatividade**
- **Concisão**
- **Intuitividade**



IA725 – 1s2011
Profa. Ting