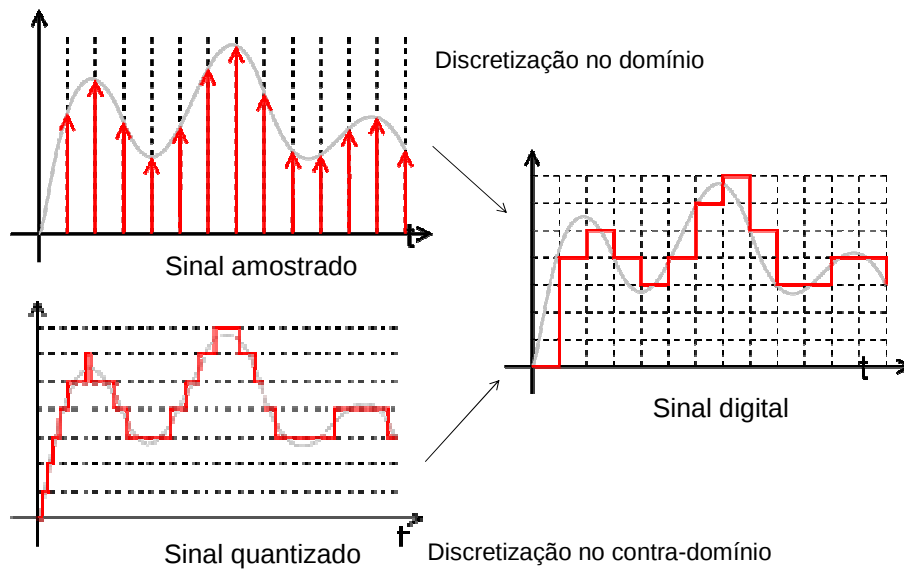


Rasterização

Apostila – Capítulo 10 e 11

Shirley – Capítulos 3 e 4

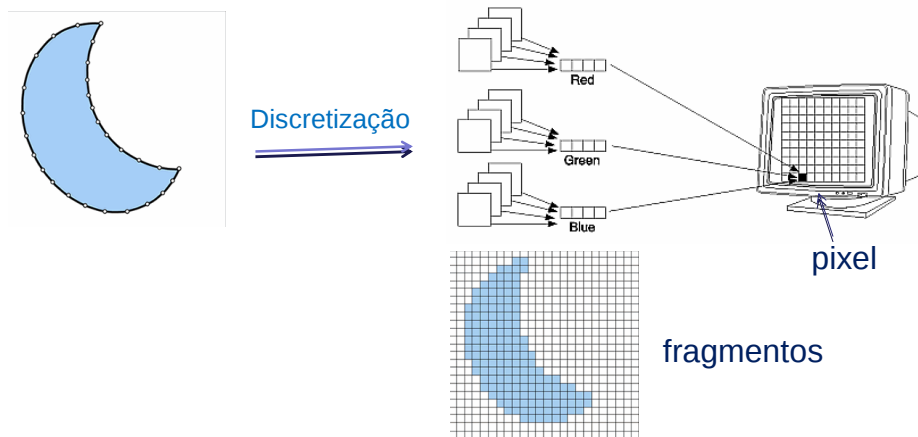
Sinal Digital



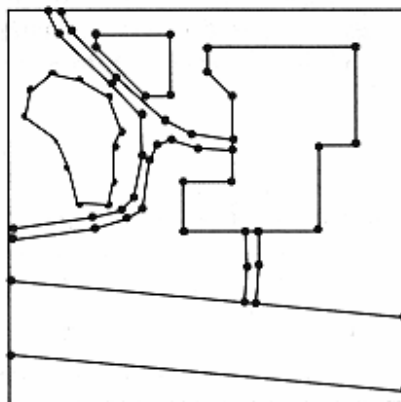
Rasterização

Discretização no domínio

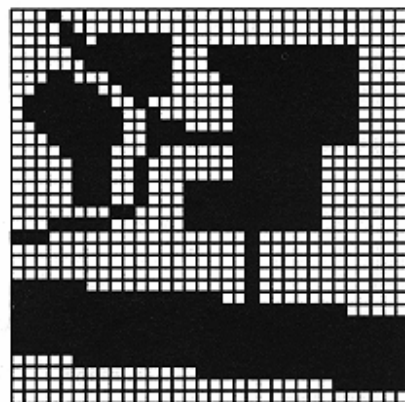
Conversão de informações vetoriais em fragmentos



Rasterização



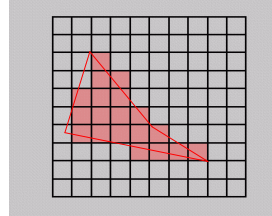
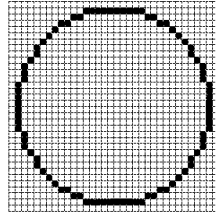
Linhas Vetoriais



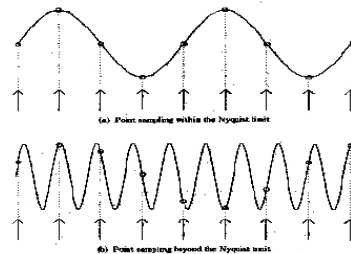
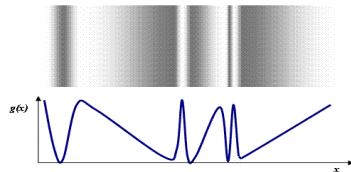
Figuras rasterizadas

Duas Abordagens

Geométrica (Rasterização): *pixels* que sobrepõem os objetos vetoriais

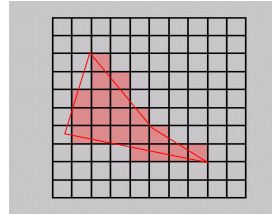
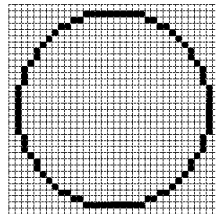


Espectral (Amostragem): amostragem da função de intensidade definida no domínio espacial

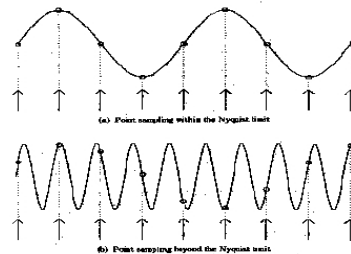
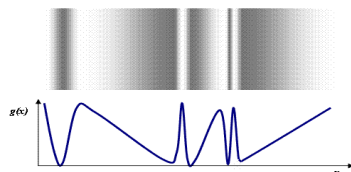


Duas Abordagens

Geométrica (Rasterização): *pixels* que sobrepõem os objetos vetoriais



Espectral (Amostragem): amostragem da função de intensidade definida no domínio espacial

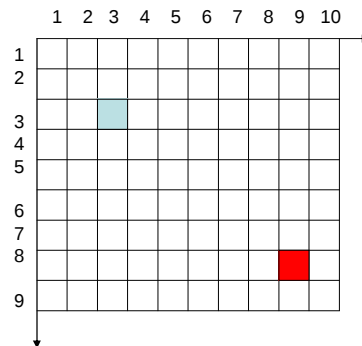


Amostragem

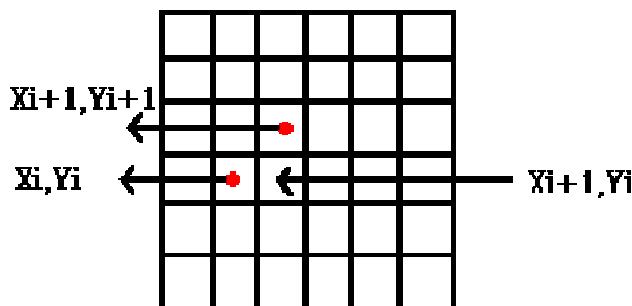
Rasterização de Pontos Truncamento ou Arredondamento

Pontos:
(2.75,3.1)
(3.1,2.8)
(3.0,3.0)

(7.6,9.3)
(7.8,9.0)
(8.3,8.7)



Rasterização de Segmentos DDA (Digital Differential Analyzer)



$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x} x + b$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad y_{i+1} = y_i + m$$

$$m \leq 1 \quad (x \text{ cresce mais}): \quad x_{i+1} = x_i + 1$$

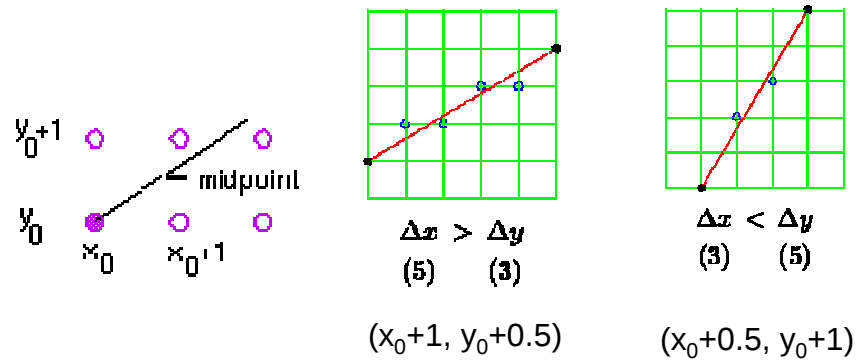
$$m > 1 \quad (y \text{ cresce mais}): \quad y_{i+1} = y_i + 1$$

Observação:
O menor
incremento da
coordenada que
cresce mais
rápido é 1!

Rasterização de Segmentos

Algoritmo de Bresenham

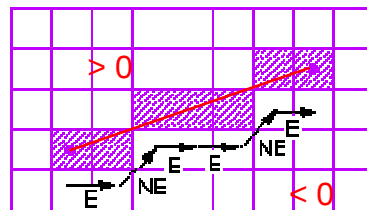
$$f(x,y) = (y_1 - y_0) x + (x_1 - x_0) y + C = -\Delta y x + \Delta x y + C = 0$$



Rasterização de Segmentos

Algoritmo de Bresenham

$$f(x,y) = (y_1 - y_0) x + (x_1 - x_0) y + C = -\Delta y x + \Delta x y + C = 0$$



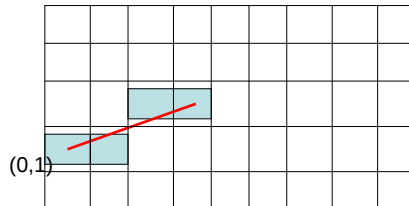
Se $(y_1 - y_0) < (x_1 - x_0)$, ou $\Delta y < \Delta x$,

Função de Decisão

$f(x_0+1, y_0+0.5) \geq 0 \rightarrow f(x_0+1, y_0+0.5)$ acima da reta $f(x,y) \rightarrow E$
 $f(x_0+1, y_0+0.5) < 0 \rightarrow f(x_0+1, y_0+0.5)$ abaixo da reta $f(x,y) \rightarrow NE$

Rasterização de Segmentos

Algoritmo de Bresenham



$$y = (1/3)x + 1 \longrightarrow f(x,y) = y - (1/3)x - 1; \quad x_0 = 0; \quad y_0 = 1:$$

$$f(0+1, 1+0.5) > 0 \longrightarrow f(1, 1.5) = 1/6 \text{ acima da reta } f(x,y) \longrightarrow E$$

$$f(1+1, 1+0.5) < 0 \longrightarrow f(2, 1.5) = -1/6 \text{ abaixo da reta } f(x,y) \longrightarrow NE$$

$$f(2+1, 2+0.5) < 0 \quad f(3, 2.5) = 0.5 \text{ acima da reta } f(x,y) \longrightarrow E$$

Rasterização de Segmentos

Algoritmo de Bresenham

Como obter $f(x_{i+2}, y_{i+2})$ de forma eficiente?

➤ Se a direção E for escolhida $y_{i+1} = y_i$:

$$f(x_{i+2}, y_{i+2}) : f(x_i+2, y_i+0.5)$$

$$f(x_i+2, y_i+0.5) = -\Delta y (x_i+2) + \Delta x (y_i+0.5) + C$$

$$= -\Delta y (x_i+1) - \Delta y + \Delta x (y_i+0.5) + C$$

$$= f(x_i+1, y_i+0.5) - \Delta y$$

$$f(x_i+2, y_i+0.5) = f(x_i+1, y_i+0.5) - \Delta y$$

➤ Se a direção NE for escolhida $y_{i+1} = y_i + 1$:

$$f(x_{i+2}, y_{i+2}) : f(x_i+2, y_i+1.5)$$

$$f(x_i+2, y_i+1.5) = -\Delta y (x_i+2) + \Delta x (y_i+1.5) + C$$

$$= -\Delta y (x_i+1) - \Delta y + \Delta x (y_i+0.5) + \Delta x + C$$

$$= f(x_i+1, y_i+0.5) - \Delta y + \Delta x$$

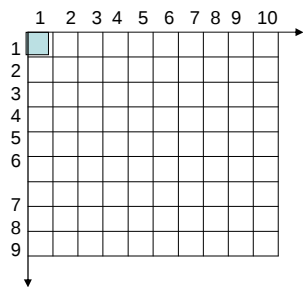
$$f(x_i+2, y_i+1.5) = f(x_i+1, y_i+0.5) - \Delta y + \Delta x$$

Exemplo 1

Rasterize o segmento definido pelos pontos $P_I=(1,1)$ e $P_F=(5,3)$

$(\Delta x = 4) \geq (\Delta y = 2) \longrightarrow x$ "anda" em passo unitário

Substituição

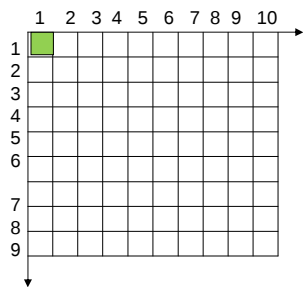


$$y = 0.5x + 0.5$$

$$y = 0.5(2) + 0.5 = 1.5$$

Arredonda para 1.0 ou
para 2.0?

DDA

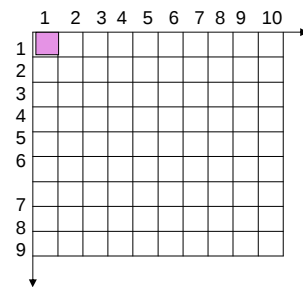


$$m = \Delta y / \Delta x = 0.5$$

$$y_1 = y_0 + m = 1.5$$

Arredonda para 1.0 ou
para 2.0?

Bresenham



$$\Delta y = 2 \quad \Delta x = 4$$

$$f(x,y) = y - 0.5x - 0.5$$

$$d_0 = f(1+1, 1+0.5) = 0$$

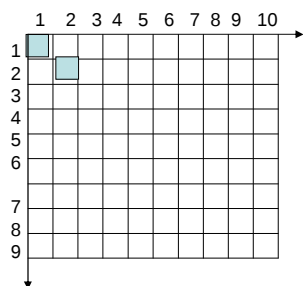
$$d_0 \geq 0 \rightarrow y_1 = y_0$$

Exemplo 1

Rasterize o segmento definido pelos pontos $P_I=(1,1)$ e $P_F=(5,3)$

$(\Delta x = 4) \geq (\Delta y = 2) \longrightarrow x$ "anda" em passo unitário

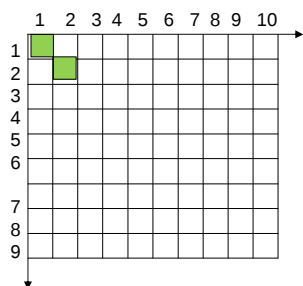
Substituição



$$y = 0.5x + 0.5$$

$$y = 0.5(3) + 0.5 = 2.0$$

DDA

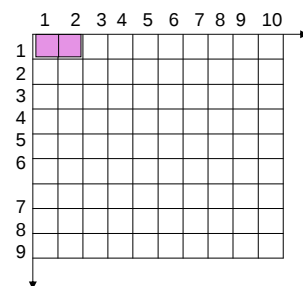


$$m = \Delta y / \Delta x = 0.5$$

$$y_2 = y_1 + m = 2.5$$

Arredonda para 2.0 ou
para 3.0?

Bresenham



$$\Delta y = 2 \quad \Delta x = 4$$

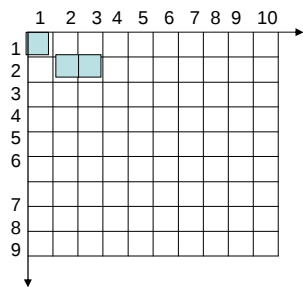
$$y_1 = y_0 \rightarrow d_1 = d_0 - \Delta y = -2$$

$$d_1 < 0 \rightarrow y_2 = y_1 + 1$$

Exemplo 1

Rasterize o segmento definido pelos pontos $P_I=(1,1)$ e $P_F=(5,3)$
 $(\Delta x = 4) \geq (\Delta y = 2) \longrightarrow x$ "anda" em passo unitário

Substituição

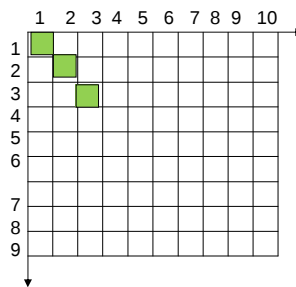


$$y = 0.5x + 0.5$$

$$y = 0.5(4) + 0.5 = 2.5$$

Arredonda para 2.0 ou
para 3.0?

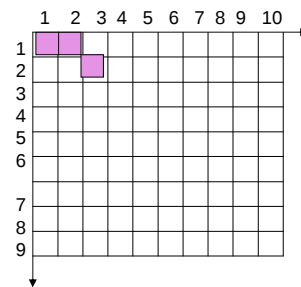
DDA



$$m = \Delta y / \Delta x = 0.5$$

$$y_3 = y_2 + m = 3.0$$

Bresenham



$$\Delta y = 2 \quad \Delta x = 4$$

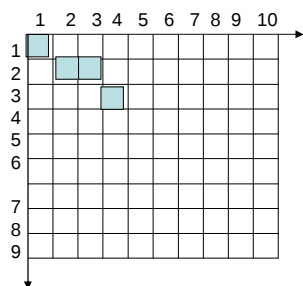
$$y_2 = y_1 + 1 \rightarrow d_2 = d_1 - \Delta y + \Delta x = 0$$

$$d_2 \geq 0 \rightarrow y_3 = y_2$$

Exemplo 1

Rasterize o segmento definido pelos pontos $P_I=(1,1)$ e $P_F=(5,3)$
 $(\Delta x = 4) \geq (\Delta y = 2) \longrightarrow x$ "anda" em passo unitário

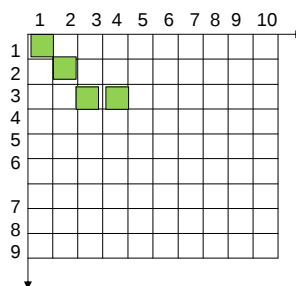
Substituição



$$y = 0.5x + 0.5$$

$$y = 0.5(5) + 0.5 = 3.0$$

DDA

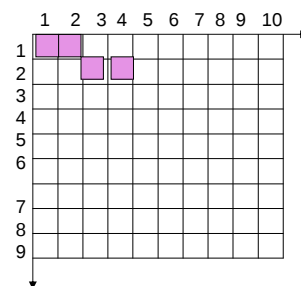


$$m = \Delta y / \Delta x = 0.5$$

$$y_4 = y_3 + m = 3.5$$

Arredonda para 3.0 ou
para 4.0?

Bresenham



$$\Delta y = 2 \quad \Delta x = 4$$

$$y_3 = y_2 \rightarrow d_3 = d_2 - \Delta y = -2$$

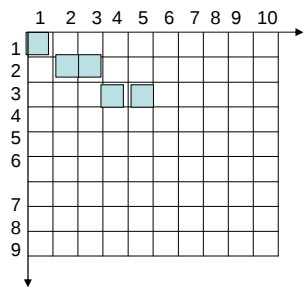
$$d_3 < 0 \rightarrow y_4 = y_3 + 1$$

Exemplo 1

Rasterize o segmento definido pelos pontos $P_I=(1,1)$ e $P_F=(5,3)$

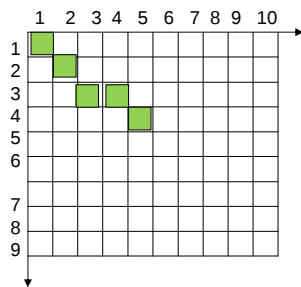
$(\Delta x = 4) \geq (\Delta y = 2) \longrightarrow x$ "anda" em passo unitário

Substituição



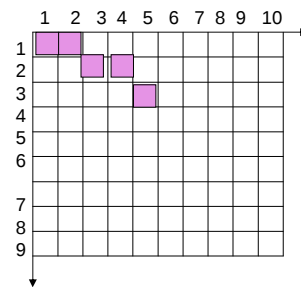
$$y = 0.5x + 0.5$$

DDA



$$m = \Delta y / \Delta x = 0.5$$

Bresenham



$$\Delta y = 2 \quad \Delta x = 4$$

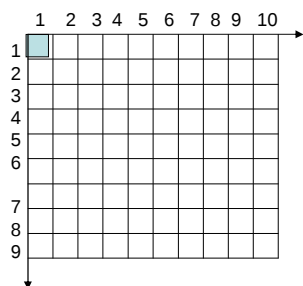
Não chegou no ponto final!!!!

Exemplo 2

Rasterize o segmento definido pelos pontos $P_I=(1,1)$ e $P_F=(3,5)$

$(\Delta x = 2) < (\Delta y = 4) \longrightarrow y$ "anda" em passo unitário

Substituição

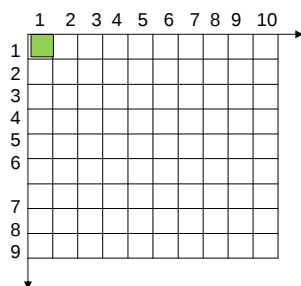


$$x = 0.5y + 0.5$$

$$x = 0.5(2) + 0.5 = 1.5$$

Arredonda para 1.0 ou
para 2.0?

DDA

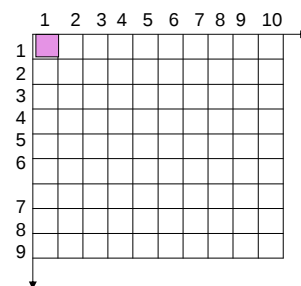


$$1/m = \Delta x / \Delta y = 0.5$$

$$x_1 = x_0 + m = 1.5$$

Arredonda para 1.0 ou
para 2.0?

Bresenham



$$\Delta y = 4 \quad \Delta x = 2$$

$$f(x,y) = y - 0.5x - 0.5$$

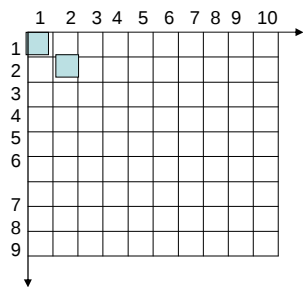
$$d_0 = f(1 + 0.5, 1 + 1) = 0$$

$$d_0 \geq 0 \rightarrow x_1 = x_0$$

Exemplo 2

Rasterize o segmento definido pelos pontos $P_I=(1,1)$ e $P_F=(3,5)$
 $(\Delta x = 2) < (\Delta y = 4) \longrightarrow x$ "anda" em passo unitário

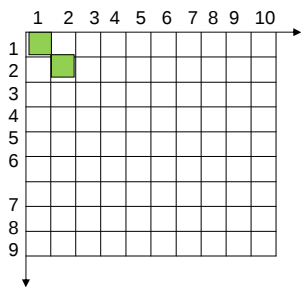
Substituição



$$x = 0.5y + 0.5$$

$$y = 0.5(3) + 0.5 = 2.0$$

DDA

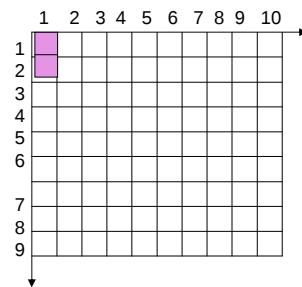


$$1/m = \Delta x / \Delta y = 0.5$$

$$x_2 = x_1 + m = 2.5$$

Arredonda para 2.0 ou
para 3.0?

Bresenham



$$\Delta y = 4 \quad \Delta x = 2$$

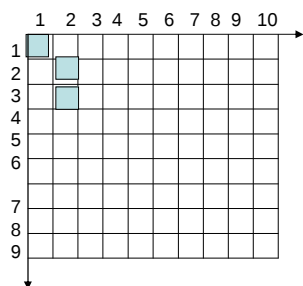
$$x_1 = x_0 \rightarrow d_1 = d_0 - \Delta x = -2$$

$$d_1 < 0 \rightarrow x_2 = x_1 + 1$$

Exemplo 2

Rasterize o segmento definido pelos pontos $P_I=(1,1)$ e $P_F=(3,5)$
 $(\Delta x = 2) < (\Delta y = 4) \longrightarrow x$ "anda" em passo unitário

Substituição

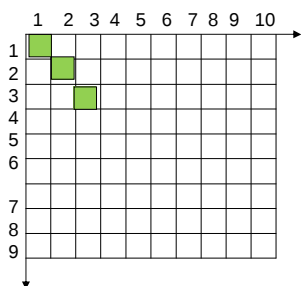


$$x = 0.5y + 0.5$$

$$x = 0.5(4) + 0.5 = 2.5$$

Arredonda para 2.0 ou
para 3.0?

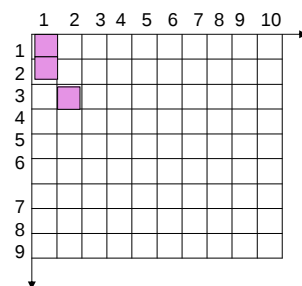
DDA



$$1/m = \Delta x / \Delta y = 0.5$$

$$x_3 = x_2 + m = 3.0$$

Bresenham



$$\Delta y = 4 \quad \Delta x = 2$$

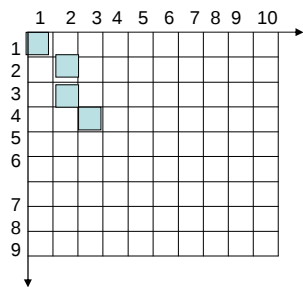
$$x_2 = x_1 + 1 \rightarrow d_2 = d_1 - \Delta x + \Delta y = 0$$

$$d_2 \geq 0 \rightarrow x_3 = x_2$$

Exemplo 2

Rasterize o segmento definido pelos pontos $P_I=(1,1)$ e $P_F=(3,5)$
 $(\Delta x = 2) < (\Delta y = 4) \longrightarrow x$ "anda" em passo unitário

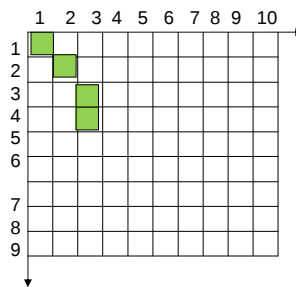
Substituição



$$x = 0.5y + 0.5$$

$$y = 0.5(5) + 0.5 = 3.0$$

DDA

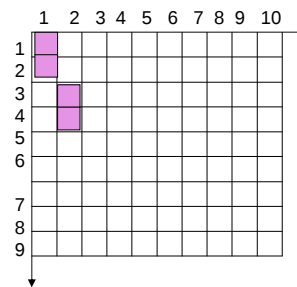


$$1/m = \Delta x / \Delta y = 0.5$$

$$x_4 = x_3 + m = 3.5$$

Arredonda para 3.0 ou
para 4.0?

Bresenham



$$\Delta y = 4 \quad \Delta x = 2$$

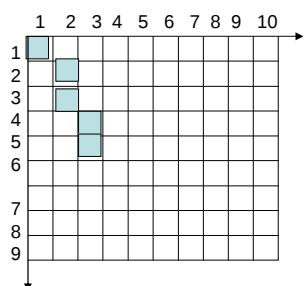
$$y_3 = y_2 \rightarrow d_3 = d_2 - \Delta y = -2$$

$$d_3 < 0 \rightarrow x_4 = x_3 + 1$$

Exemplo 2

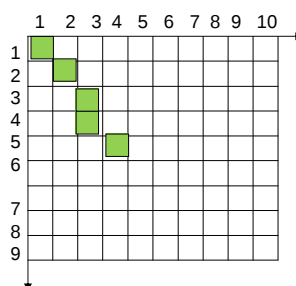
Rasterize o segmento definido pelos pontos $P_I=(1,1)$ e $P_F=(3,5)$
 $(\Delta x = 2) < (\Delta y = 4) \longrightarrow x$ "anda" em passo unitário

Substituição



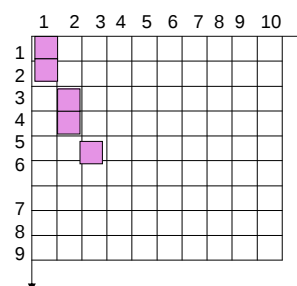
$$x = 0.5y + 0.5$$

DDA



$$1/m = \Delta y / \Delta x = 0.5$$

Bresenham

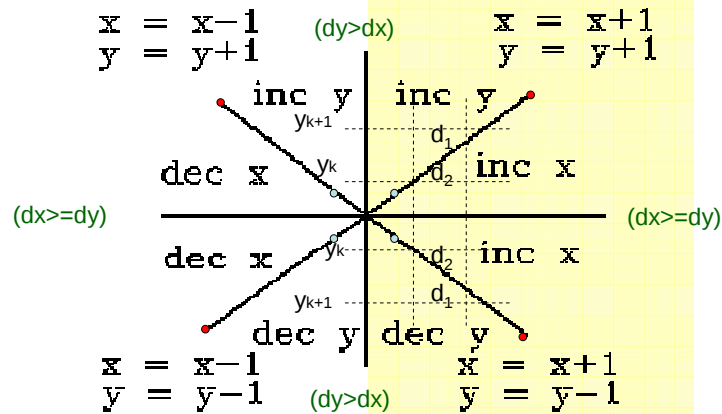


$$\Delta y = 4 \quad \Delta x = 2$$

Não chegou no ponto final!!!!

Rasterização de Segmentos

Linhas: Todos os possíveis casos



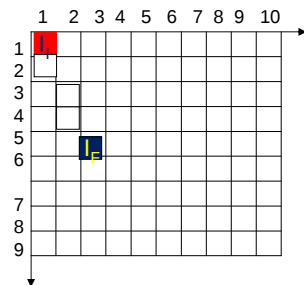
Se invertermos os pontos extremos adequadamente, reduzimos em 4 casos

Rasterização de Segmentos

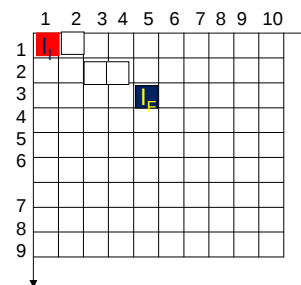
Cor em cada *pixel*

Interpolação linear

$$I_{i+1} = I_i + 1/(\text{maior variação}) (I_F - I_i)$$



$$I_{i+1} = I_i + 1/(\Delta y) (I_F - I_i)$$

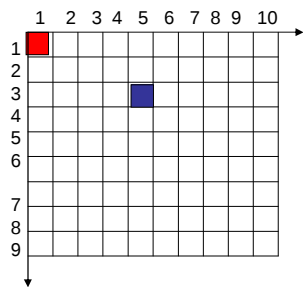


$$I_{i+1} = I_i + 1/(\Delta x) (I_F - I_i)$$

Exemplo 1

Rasterize o segmento definido pelos pontos $P_I=(1,1)$ e $P_F=(5,3)$
 $(\Delta x = 4) \geq (\Delta y = 2) \longrightarrow x$ "anda" em passo unitário

Substituição



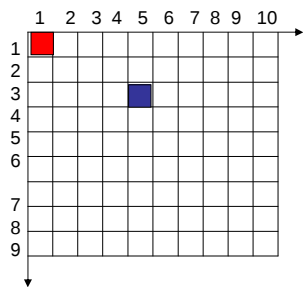
$$y = 0.5x + 0.5$$

$$y = 0.5(2) + 0.5 = 1.5$$

$$I = (1,0,0) + 0.25(-1,0,1)$$

Arredonda para 1.0 ou para 2.0?

DDA



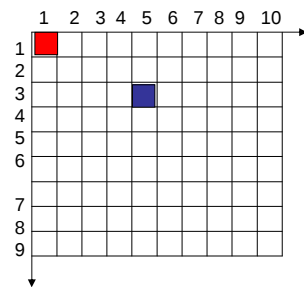
$$m = \Delta y / \Delta x = 0.5$$

$$y_1 = y_0 + m = 1.5$$

$$I_1 = I_0 + (-0.25, 0, 0.25)$$

Arredonda para 1.0 ou para 2.0?

Bresenham



$$\Delta y = 2 \quad \Delta x = 4$$

$$f(x,y) = y - 0.5x - 0.5$$

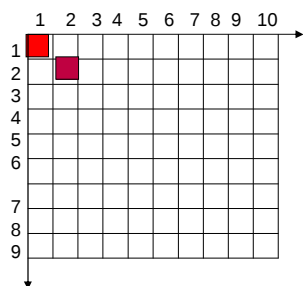
$$d_0 = f(1+1, 1+0.5) = 0$$

$$d_0 \geq 0 \rightarrow y_1 = y_0$$

Exemplo 1

Rasterize o segmento definido pelos pontos $P_I=(1,1)$ e $P_F=(5,3)$
 $(\Delta x = 4) \geq (\Delta y = 2) \longrightarrow x$ "anda" em passo unitário

Substituição

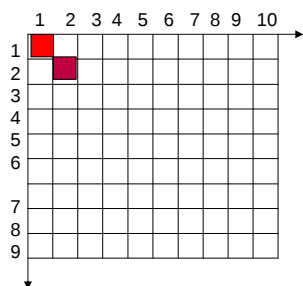


$$y = 0.5x + 0.5$$

$$y = 0.5(3) + 0.5 = 2.0$$

$$I = (1,0,0) + 0.5(-1,0,1)$$

DDA



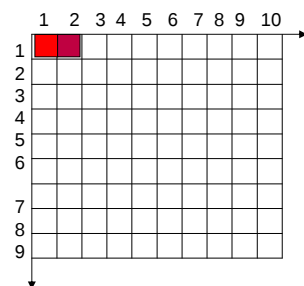
$$m = \Delta y / \Delta x = 0.5$$

$$y_2 = y_1 + m = 2.5$$

$$I_2 = I_1 + (-0.25, 0, 0.25)$$

Arredonda para 2.0 ou para 3.0?

Bresenham



$$\Delta y = 2 \quad \Delta x = 4$$

$$y_1 = y_0 \rightarrow d_1 = d_0 - \Delta y = -2$$

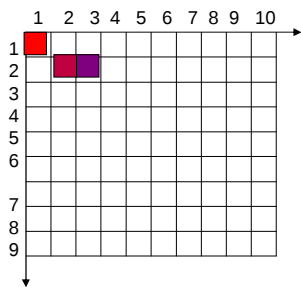
$$d_1 < 0 \rightarrow y_2 = y_1 + 1$$

Exemplo 1

Rasterize o segmento definido pelos pontos $P_I=(1,1)$ e $P_F=(5,3)$

$(\Delta x = 4) \geq (\Delta y = 2) \longrightarrow x$ "anda" em passo unitário

Substituição



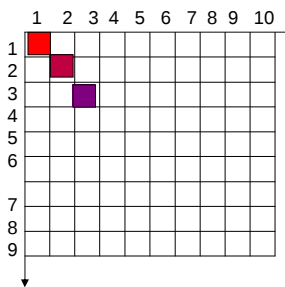
$$y = 0.5x + 0.5$$

$$y = 0.5(4) + 0.5 = 2.5$$

$$I = (1,0,0) + 0.75(-1,0,1)$$

Arredonda para 2.0 ou
para 3.0?

DDA

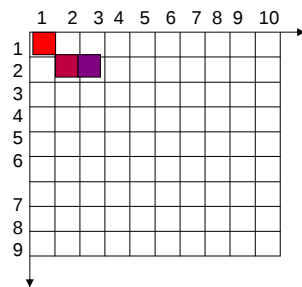


$$m = \Delta y / \Delta x = 0.5$$

$$y_3 = y_2 + m = 3.0$$

$$I_3 = I_2 + (-0.25, 0, 0.25)$$

Bresenham



$$\Delta y = 2 \quad \Delta x = 4$$

$$y_2 = y_1 + 1 \rightarrow d_2 = d_1 - \Delta y + \Delta x = 0$$

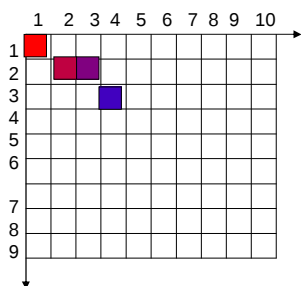
$$d_2 \geq 0 \rightarrow y_3 = y_2$$

Exemplo 1

Rasterize o segmento definido pelos pontos $P_I=(1,1)$ e $P_F=(5,3)$

$(\Delta x = 4) \geq (\Delta y = 2) \longrightarrow x$ "anda" em passo unitário

Substituição

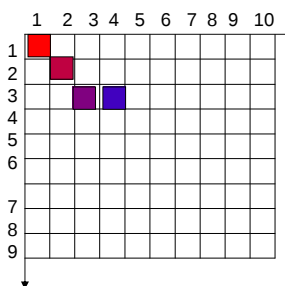


$$y = 0.5x + 0.5$$

$$y = 0.5(5) + 0.5 = 3.0$$

$$I = (1,0,0) + 1.0(-1,0,1)$$

DDA



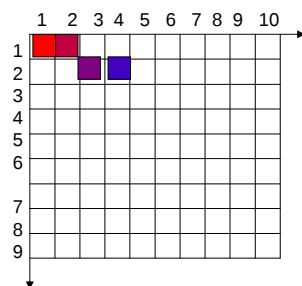
$$m = \Delta y / \Delta x = 0.5$$

$$y_4 = y_3 + m = 3.5$$

$$I_4 = I_3 + (-0.25, 0, 0.25)$$

Arredonda para 3.0 ou
para 4.0?

Bresenham



$$\Delta y = 2 \quad \Delta x = 4$$

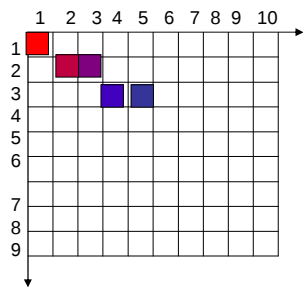
$$y_3 = y_2 \rightarrow d_3 = d_2 - \Delta y = -2$$

$$d_3 < 0 \rightarrow y_4 = y_3 + 1$$

Exemplo 1

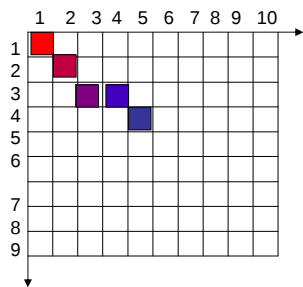
Rasterize o segmento definido pelos pontos $P_I=(1,1)$ e $P_F=(5,3)$
 $(\Delta x = 4) \geq (\Delta y = 2) \longrightarrow x$ "anda" em passo unitário

Substituição



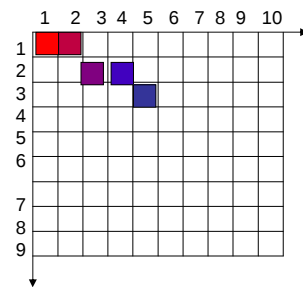
$$y = 0.5x + 0.5$$

DDA



$$m = \Delta y / \Delta x = 0.5$$

Bresenham



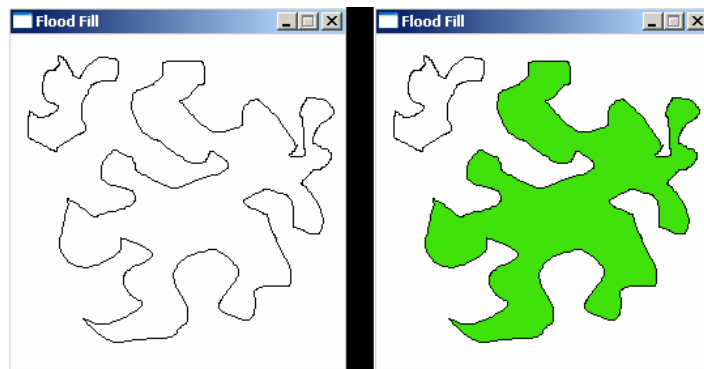
$$\Delta y = 2 \quad \Delta x = 4$$

Não chegou no ponto final!!!!

Rasterização de Polígonos

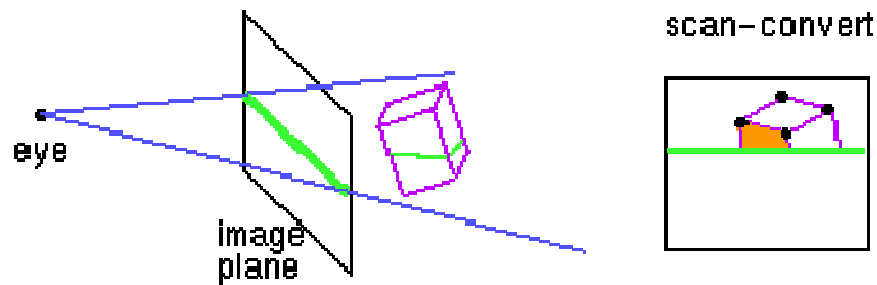
Princípio de Preenchimento

```
flood_fill(x,y) {
  enquanto (pixel(x,y) = branco) {
    mudar cor de (x,y);
    flood_fill(x-1,y);
    flood_fill(x+1,y);
    flood_fill(x,y-1);
    flood_fill(x,y+1);
  }
}
```



Rasterização de Polígonos

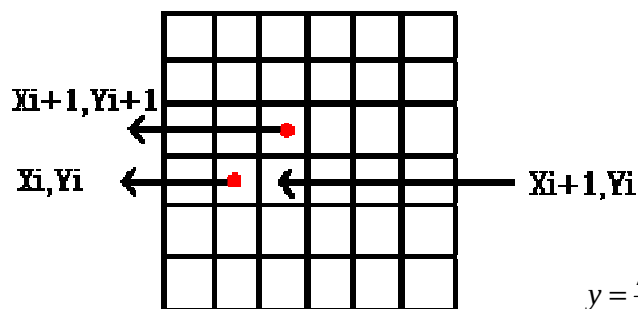
Princípio de Scanline



1. Rasterizar borda com DDA
2. Utilizar coerência para preenchimento de linhas

Rasterização de Segmentos

DDA



$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x} x + b$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

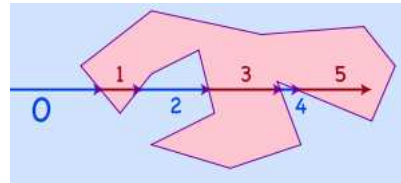
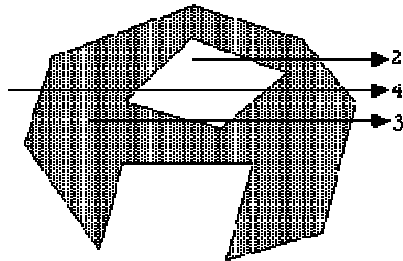
$$m \leq 1 \rightarrow y_{i+1} = y_i + m$$

$$m > 1 \rightarrow x_{i+1} = x_i + 1/m$$

Rasterização de Polígonos

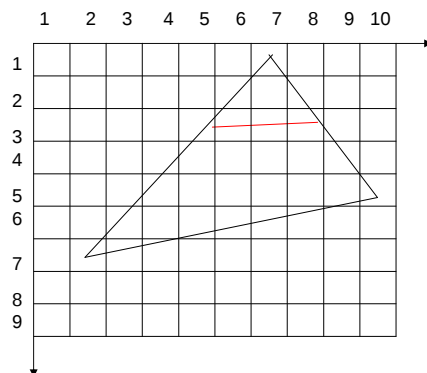
Teste de Pertinência

Ray Casting



Rasterização de Polígonos

Scanline

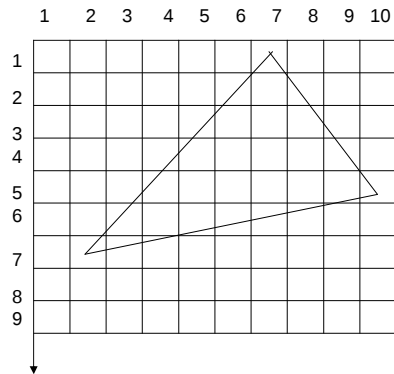


Varredura por linha

Para cada linha:

1. Determinar os pontos de interseção
2. Ordenar os pontos de interseção
3. Preencher o interior

Rasterização de Polígonos Scanline



1. Inserir as arestas na tabela de arestas (ET);

Rasterização de Polígonos Scanline

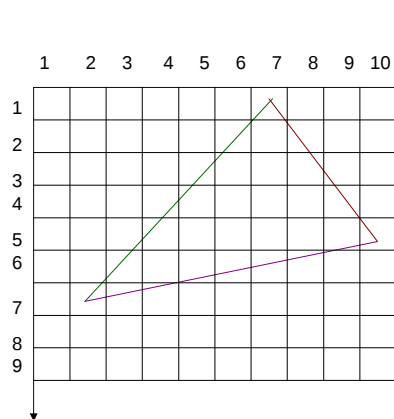
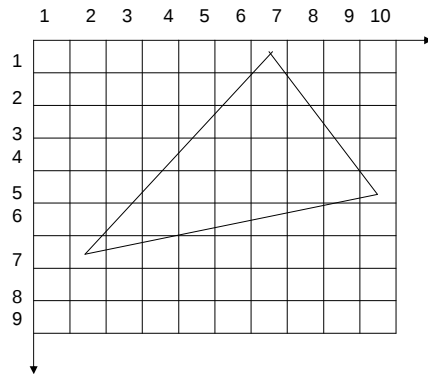


Tabela de Arestas

$y_{\max}$	x	1/m	
5	7	-5/6	→ 7 7 3/4
7	10	-4	

Rasterização de Polígonos Scanline



1. Inserir as arestas na tabela de arestas (ET);
2. Setar a linha $y=1$ como ativa;
3. Inicializar a tabela de arestas ativa (AET) para linha ativa, ordenando as células em relação à coordenada x
4. Preencher os intervalos

Rasterização de Polígonos Scanline

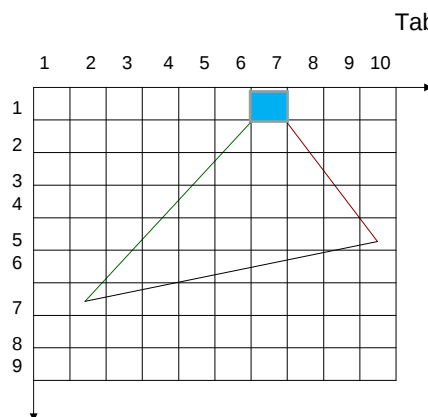
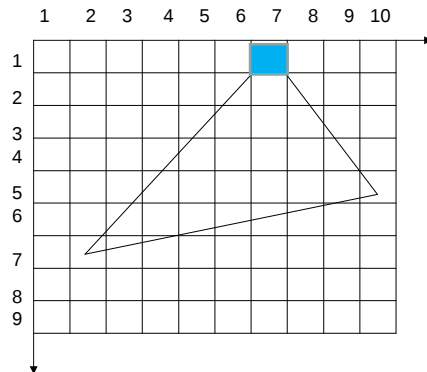


Tabela de Arestas

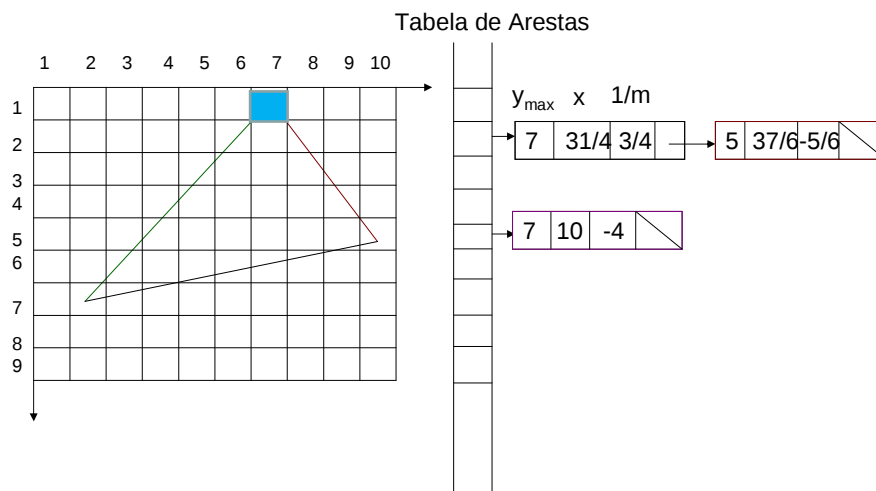
y_{max}	x	$1/m$	
5	7	-5/6	→ 7 7 3/4
7	10	-4	

Rasterização de Polígonos Scanline

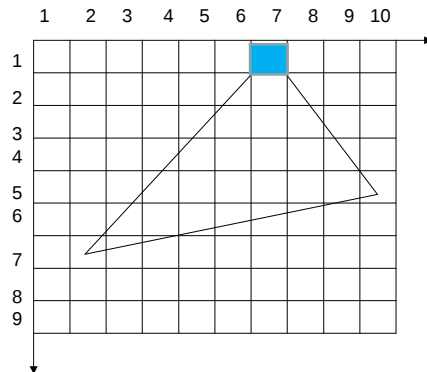


1. Inserir as arestas na tabela de arestas (ET);
2. Setar a linha $y=1$ como ativa;
3. Inicializar a tabela de arestas ativa (AET) para linha ativa, ordenando as células em relação à coordenada x
4. Preencher os intervalos
5. Se a próxima linha é menor que $y_{\max}$, atualize x e transfere a célula para a próxima linha

Rasterização de Polígonos Scanline



Rasterização de Polígonos Scanline



1. Inserir as arestas na tabela de arestas (ET);
2. Setar a linha $y=1$ como ativa;
3. Inicializar a tabela de arestas ativa (AET) para linha ativa, ordenando as células em relação à coordenada x
4. Preencher os intervalos
5. Se a próxima linha é maior que $y_{\max}$, atualize x e transfere a célula para a próxima linha
6. Se há arestas na ET, ir para (3).

Rasterização de Polígonos Scanline

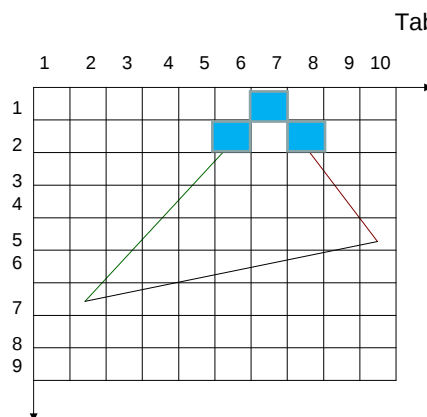
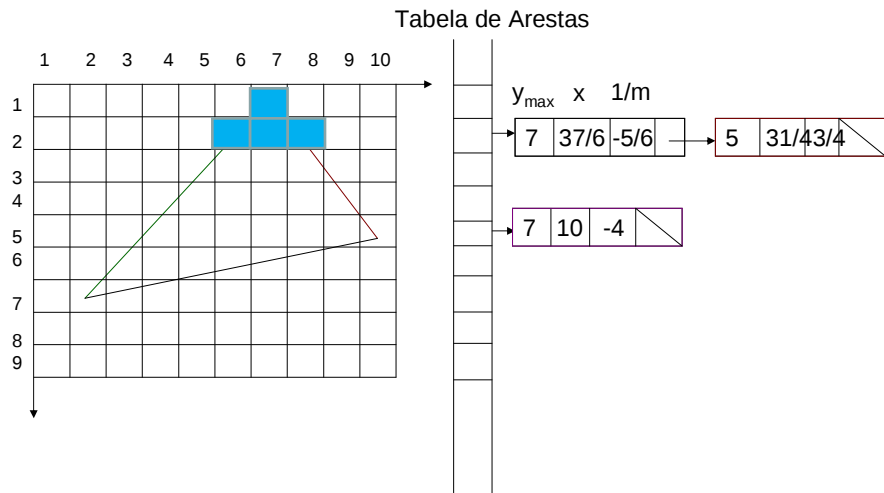


Tabela de Arestas

$y_{\max}$	x	$1/m$	
7	37/6	-5/6	→ 5 31/43/4
7	10	-4	

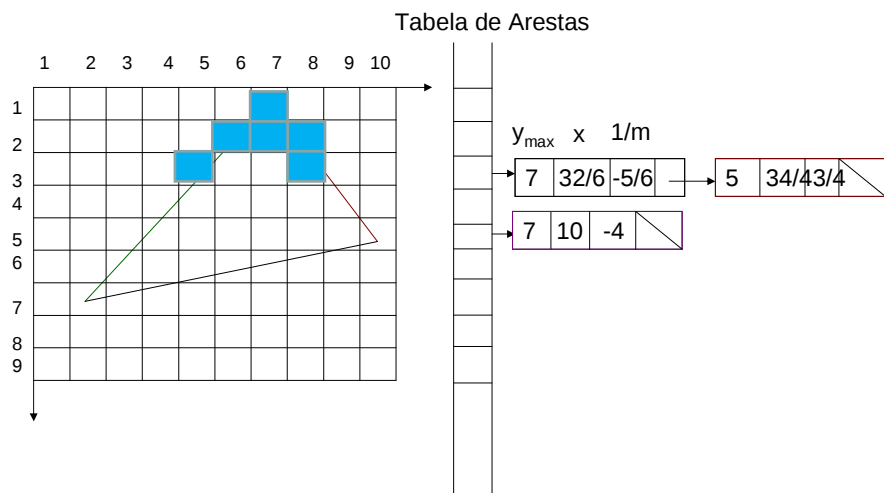
Rasterização de Polígonos

Scanline

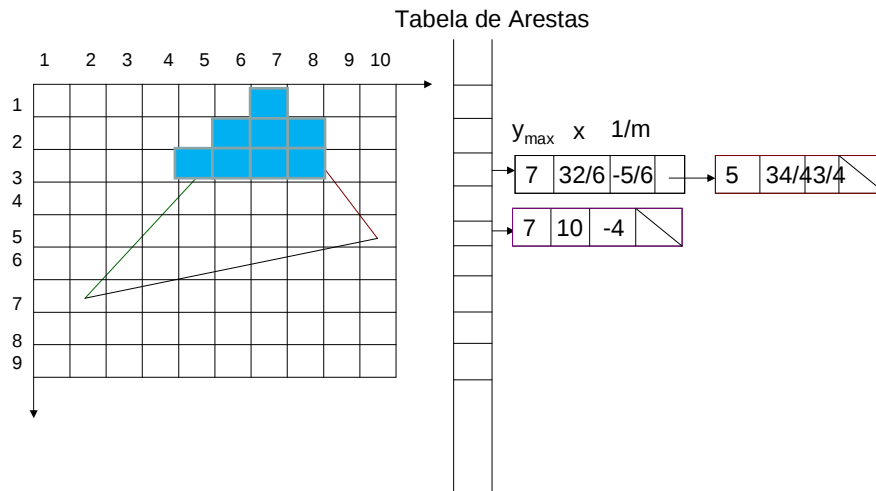


Rasterização de Polígonos

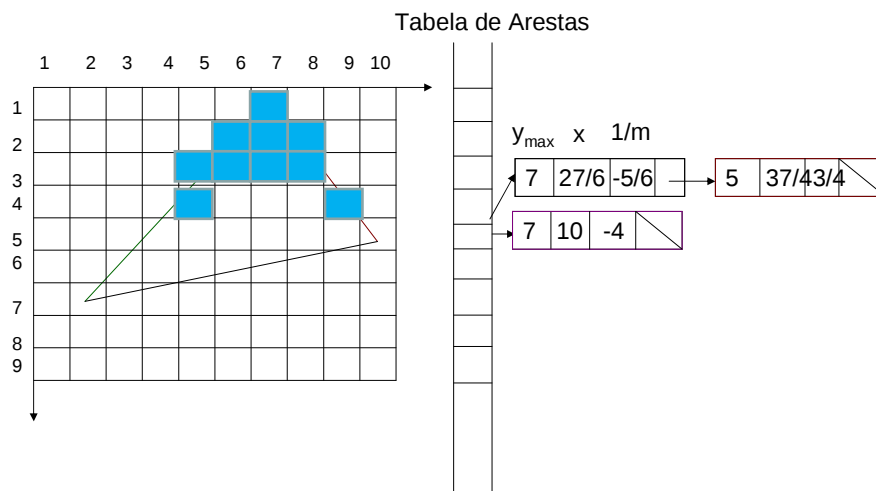
Scanline



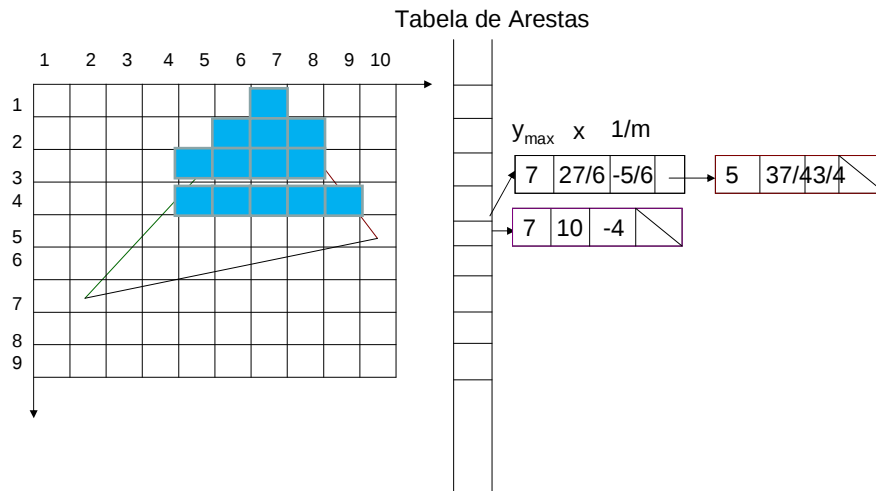
Rasterização de Polígonos Scanline



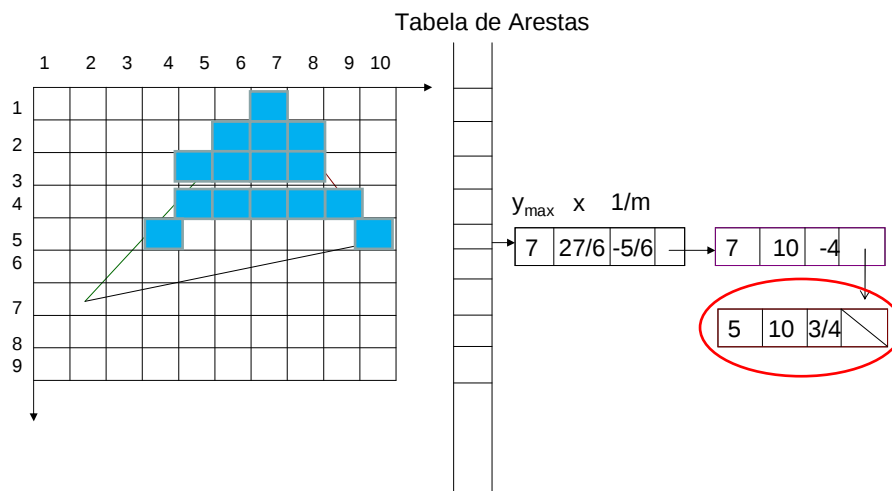
Rasterização de Polígonos Scanline



Rasterização de Polígonos Scanline

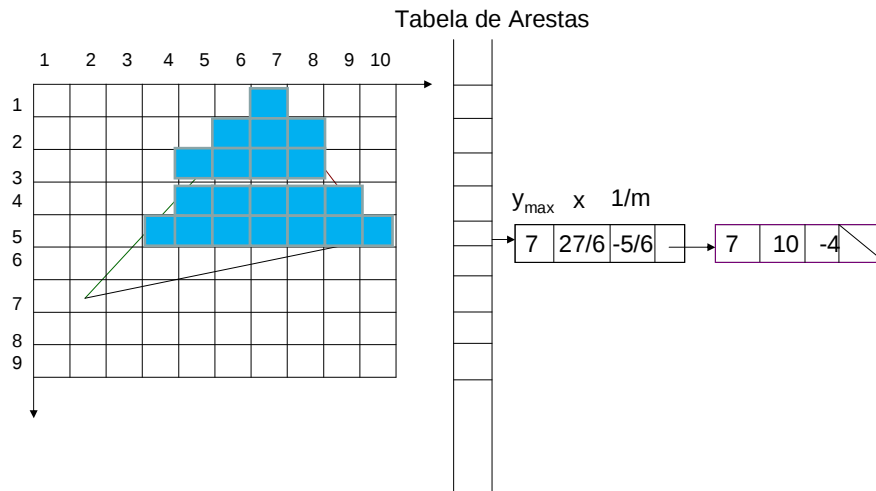


Rasterização de Polígonos Scanline



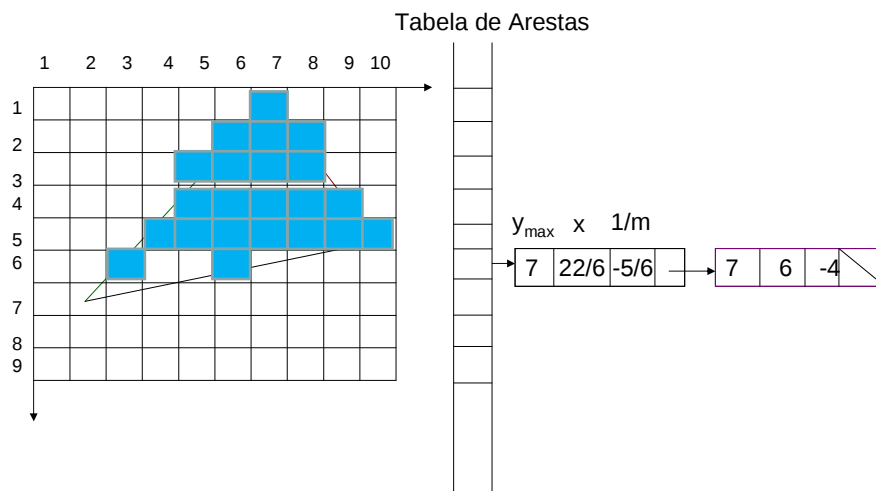
Rasterização de Polígonos

Scanline

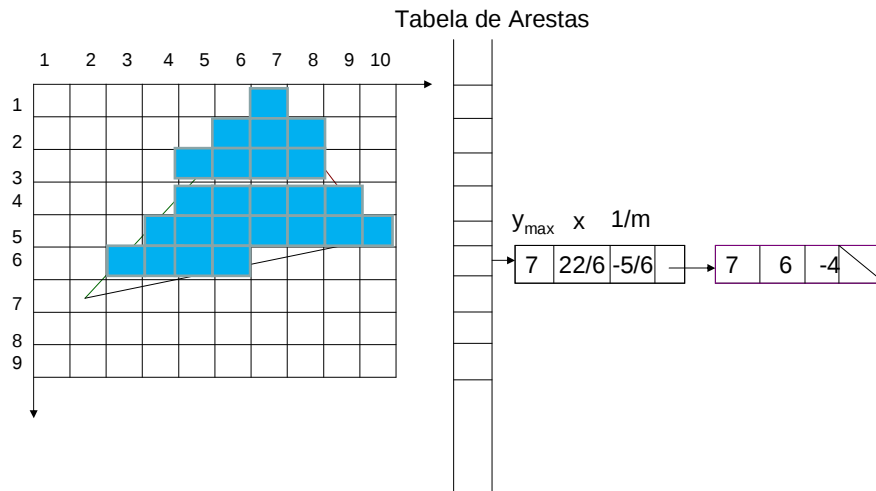


Rasterização de Polígonos

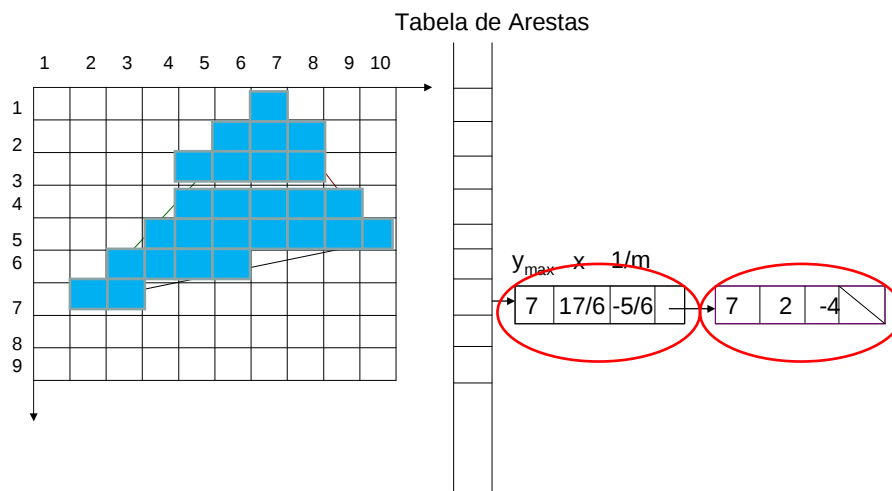
Scanline



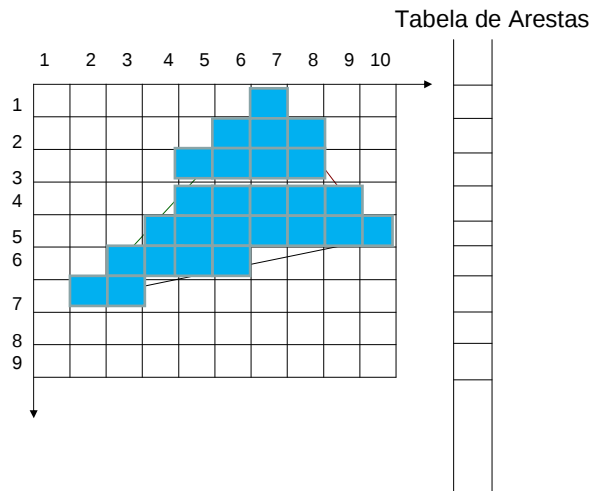
Rasterização de Polígonos Scanline



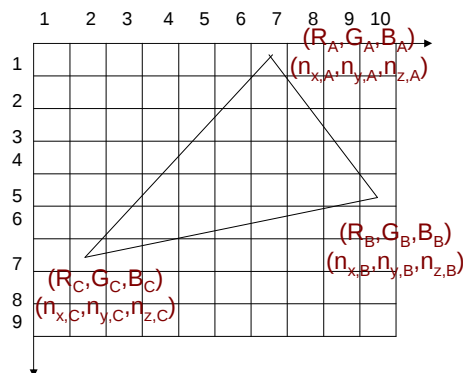
Rasterização de Polígonos Scanline



Rasterização de Polígonos Scanline



Rasterização de Polígonos Scanline - Variações



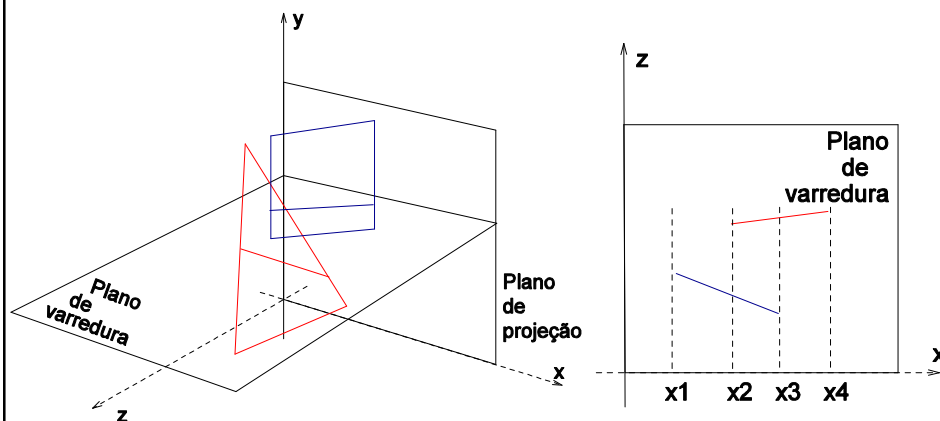
Tonalização de Gouraud:

A intensidade nos vértices é computada e a intensidade dos restantes pixels, interpolada linearmente.

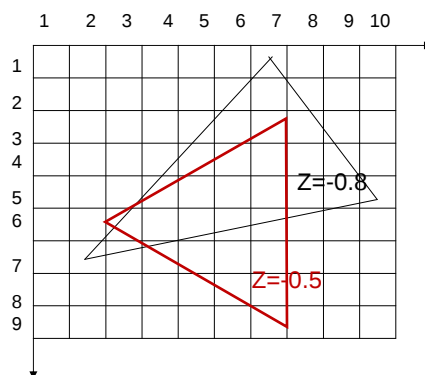
Tonalização de Phong:

O vetor normal nos vértices é computado e o vetor normal dos restantes pixels, interpolado linearmente.

Algoritmo *Scanline* com *z-Buffer*



Rasterização de Polígonos *Scanline com z-buffer*

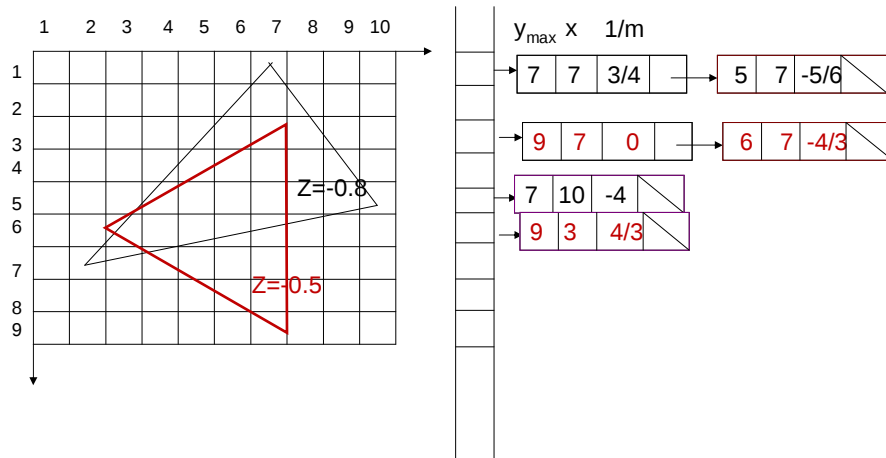


Para cada polígono:

1. Inserir as arestas na tabela de arestas (ET);

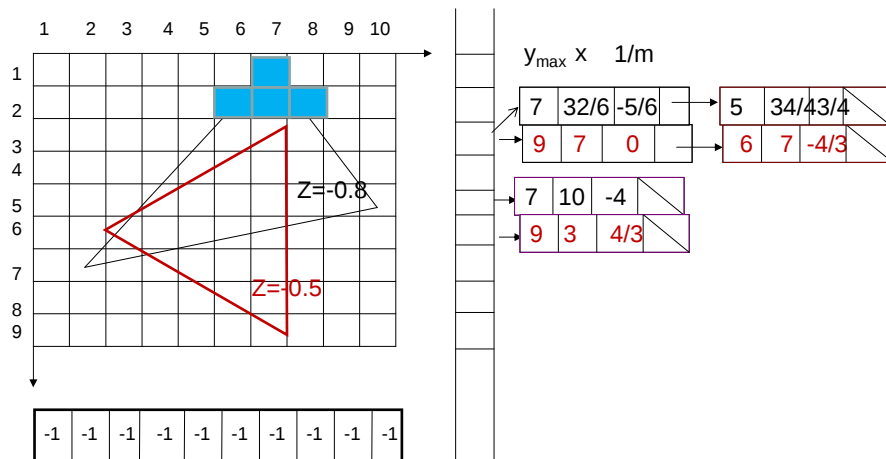
Rasterização de Polígonos

Scanline com z-buffer

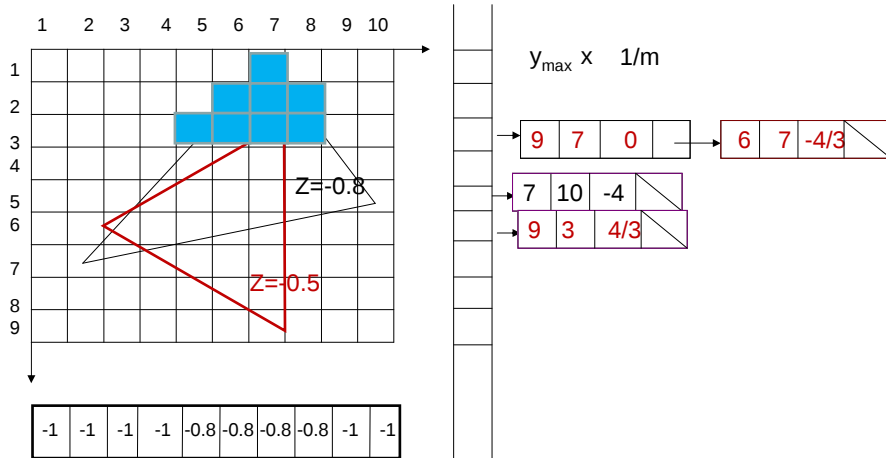


Rasterização de Polígonos

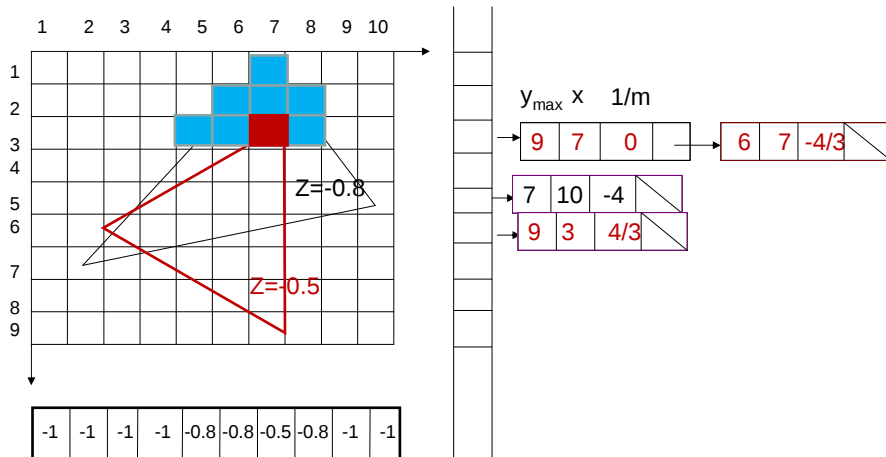
Scanline com z-buffer



Scanline com z-buffer



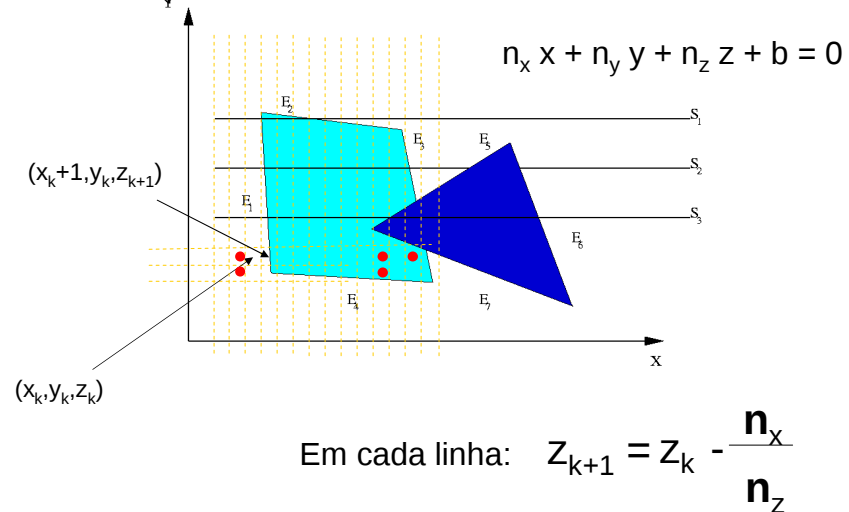
Scanline com z-buffer



Rasterização de Polígonos

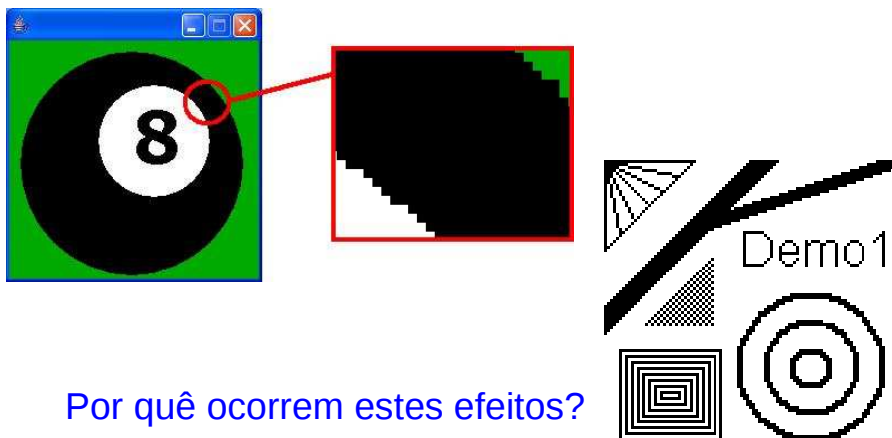
Scanline com z-buffer

- Valor de profundidade obtido incrementalmente



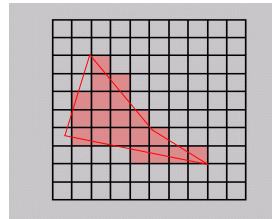
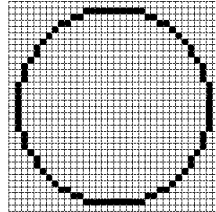
Rasterização de Polígonos

Efeito de Borda Serrilhada

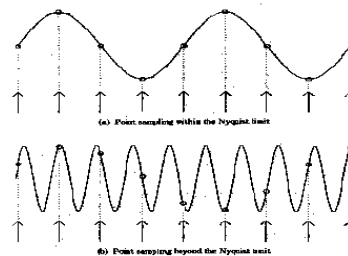
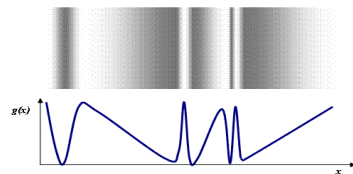


Duas Abordagens

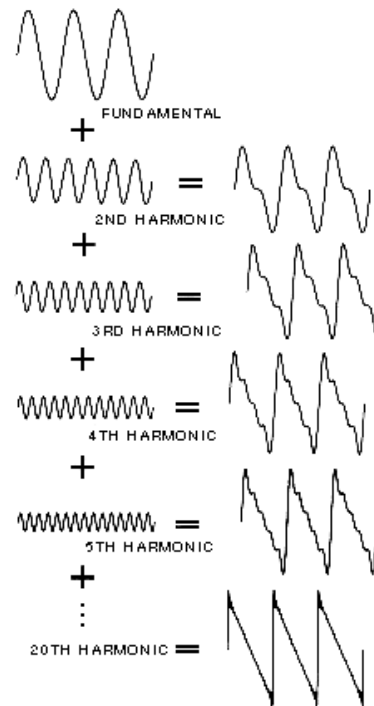
Geométrica (Rasterização): *pixels* que sobrepõem os objetos vetoriais



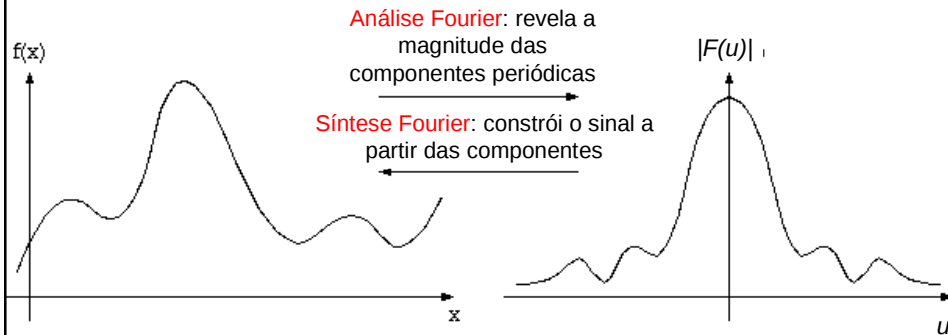
Espectral (Amostragem): amostragem da função de intensidade definida no domínio espacial



Harmônicos de Fourier



Transformada de Fourier 1D



Par de transformadas:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx \quad (\text{Análise})$$

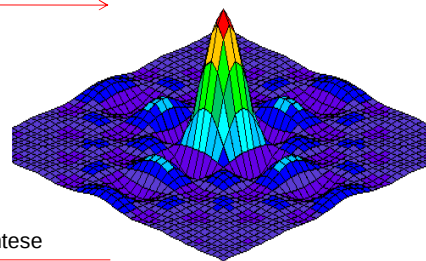
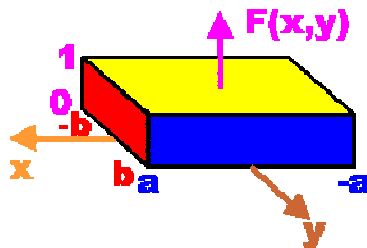
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du \quad (\text{Síntese})$$

Transformada de Fourier 2D

$$F(u, v) = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux + vy)} dx dy$$

$$F(u, v) = (4ab) \frac{\sin(2\pi ua)}{2\pi ua} \frac{\sin(2\pi vb)}{2\pi vb}$$

Análise



Síntese

$$f(x, y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux + vy)} du dv$$

Transformada de Fourier 2D

$$F(u,v) = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

$$P(u,v) = R^2(u,v) + I^2(u,v) \quad \text{Espectro de Potência}$$

$$|F(u,v)| = (R^2(u,v) + I^2(u,v))^{1/2} \quad \text{Espectro de Fourier}$$

$$\varphi(u,v) = \text{tg}^{-1} (I(u,v)/R(u,v)) \quad \text{Ângulo de fase}$$

$$F(u,v) = |F(u,v)| e^{j\varphi(u,v)}$$

$$f(x,y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} F(u,v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$

Transformada Discreta de Fourier 1D

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du$$

$$e^{-j2\pi ux} = \cos(2\pi ux) - j \sin(2\pi ux)$$

$$f(x_0), f(x_1=x_0+\Delta x), f(x_2=x_0+2\Delta x), \dots, f(x_{N-1}=x_0+(N-1)\Delta x)$$

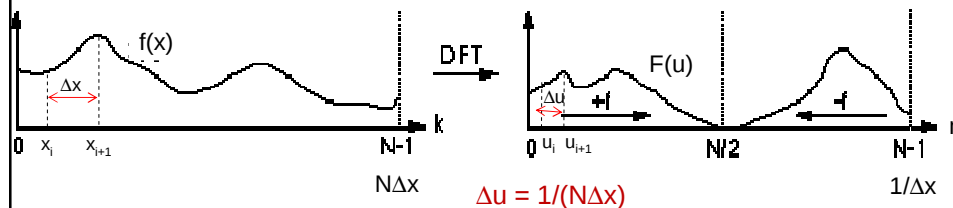
$$f(x_k) = f(x_{k+N})$$

Transformada discreta

$$F(u_n) = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) e^{-j2\pi nk/N}$$

Transformada discreta inversa

$$f(x_k) = \sum_{n=0}^{N-1} F(u_n) e^{j2\pi nk/N}$$



Transformada Discreta de Fourier 1D

Propriedades

$$F(u_n) = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) e^{-j2\pi nk/N}$$

$$F(0) = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) e^{-j2\pi 0k/N} = 1/N \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)$$

A **componente DC** corresponde à média dos valores $f(x_k)$ das amostras.

$$F(u_{n+N}) = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) e^{-j2\pi (n+N)k/N} = F(u_n)$$

Transformada discreta de Fourier é **periódica**.

$$F(u_{-n}) = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) e^{-j2\pi (-n)k/N} = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) e^{j2\pi nk/N} = F(u_n)$$

Se $f(x_k)$ for real, a magnitude da transformada discreta é **simétrica** em relação à origem.

Transformada Discreta de Fourier 1D

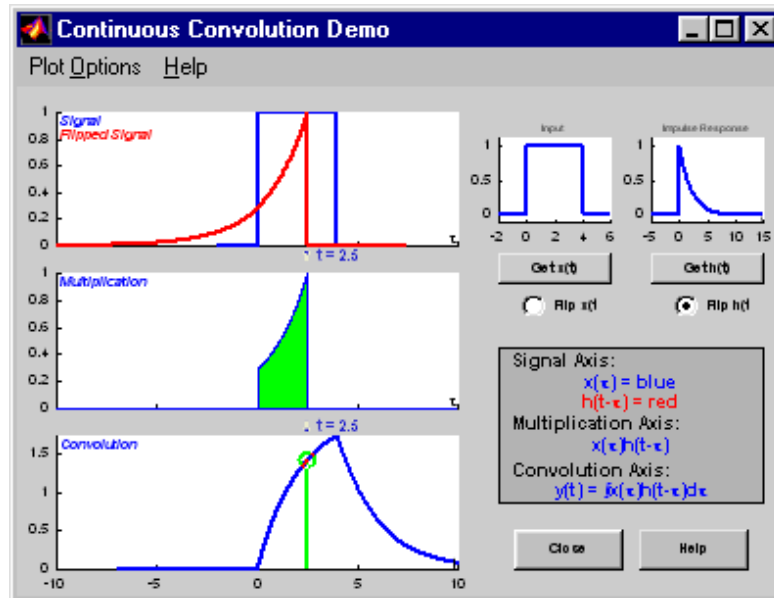
Propriedades

$$F(u_n) = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) e^{-j2\pi nk/N}$$

$$F(f_1(x_k) * f_2(x_k)) = F_1(u_n) \cdot F_2(u_n)$$

A **convolução** no domínio espacial pode ser obtida com a transformada de Fourier inversa do produto $F_1(u_n) \cdot F_2(u_n)$.

Convolução

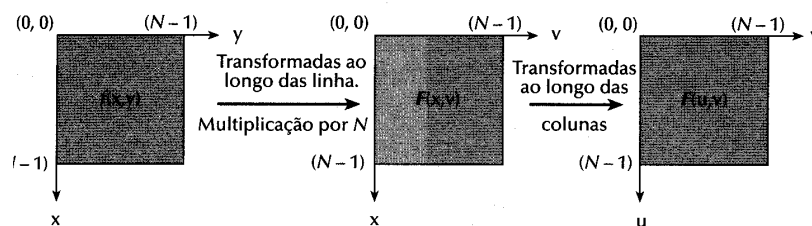


Transformada Discreta de Fourier 2D

$$F(u, v) = \frac{1}{NM} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x, y) e^{-2\pi i (ux/N + vy/M)},$$

Separabilidade

$$F(u, v) = (1/NM) \sum_{x=0}^{N-1} e^{-j2\pi ux/N} \left[\sum_{y=0}^{M-1} f(x, y) e^{-j2\pi vy/N} \right]$$



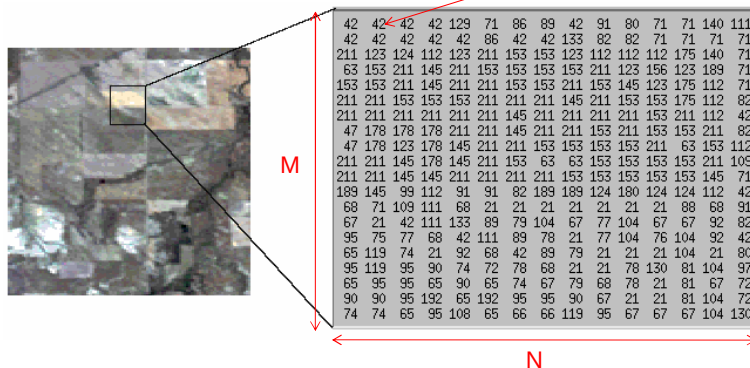
Transformada Discreta de Fourier 2D

Propriedades

Deslocamento
Periodicidade e Simetria Conjugada
Distributividade quanto à adição
Mudança de Escala
Convolução
Separabilidade
Rotação

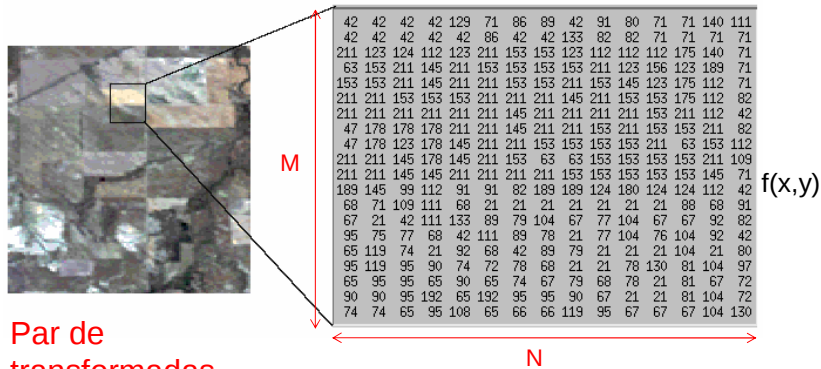
Imagem Discreta

$f(x,y)$: intensidade em cada *pixel*



Quais são as componentes
periódicas de intensidade?

Transformada Discreta de Fourier 2D

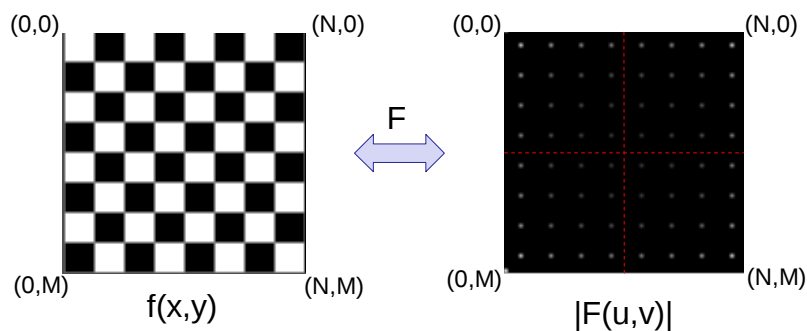


$$F(u, v) = \frac{1}{NM} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x, y) e^{-2\pi i (xu/N + yv/M)},$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} F(u, v) e^{2\pi i (xu/N + yv/M)}.$$

Espectro de Fourier Análise Visual

Periodicidade → somente um período NxM é suficiente

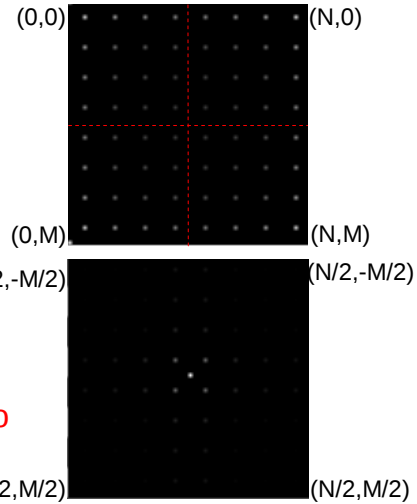
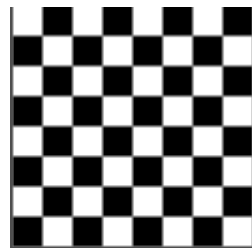


Espectro de Fourier Análise Visual

Simetria Conjugada → imagem simétrica

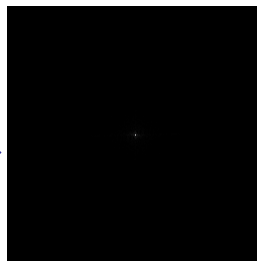
Deslocamento não afeta amplitude → mover $F(0,0)$ para centro

$$F(u+N/2, v+N/2) \leftrightarrow f(x,y) e^{j\pi(x+y)} \\ = f(x,y)(-1)^{x+y}$$

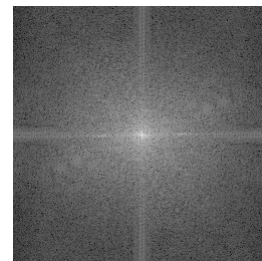


Simetria, periodicidade, translação

Transformada Discreta de Fourier 2D



Escala dinâmica
muito alta →
compressão por
função logarítmica



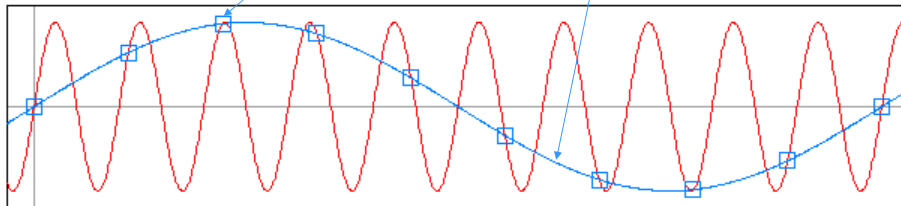
$$I(u,v) = c \log(1+|F(u,v)|)$$

Amostragem



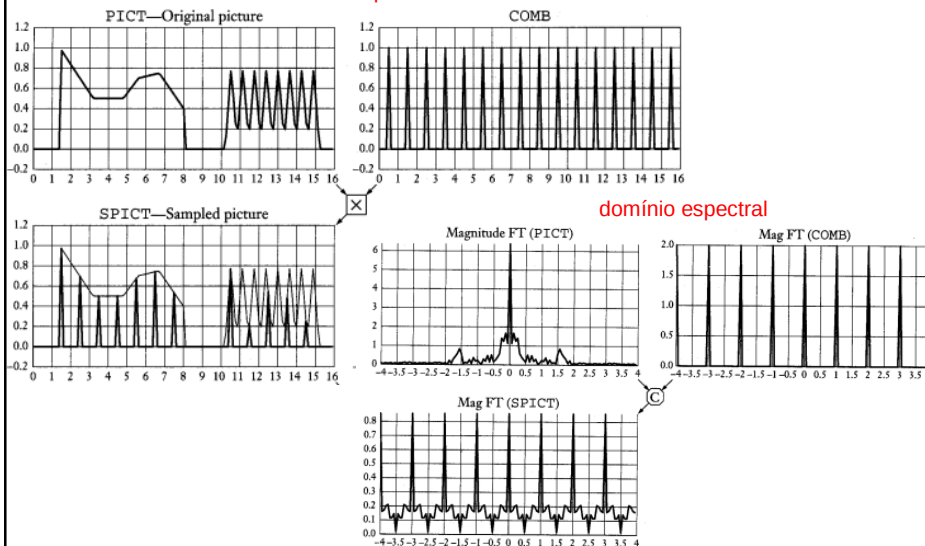
Amostragem

Reconstrução



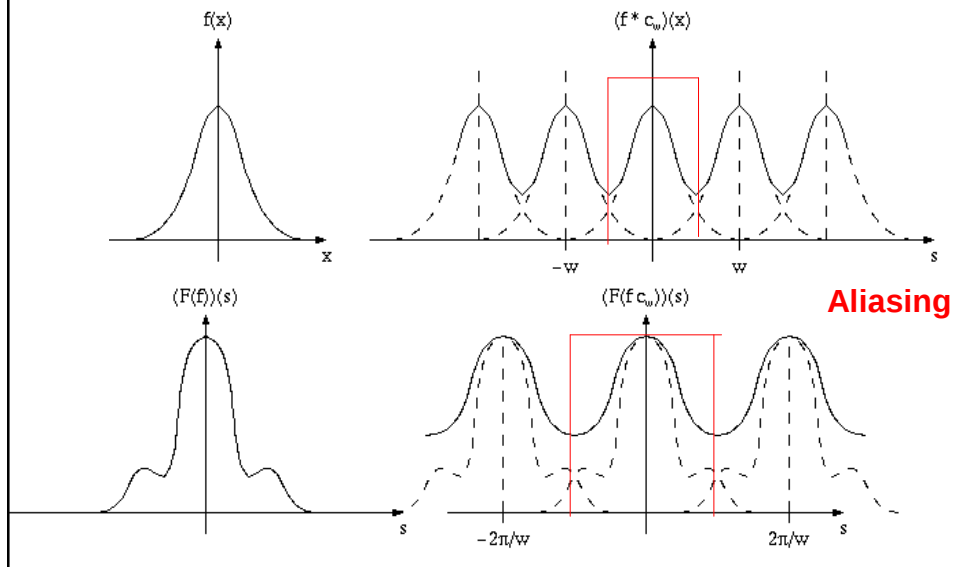
Amostragem 1D

domínio espacial

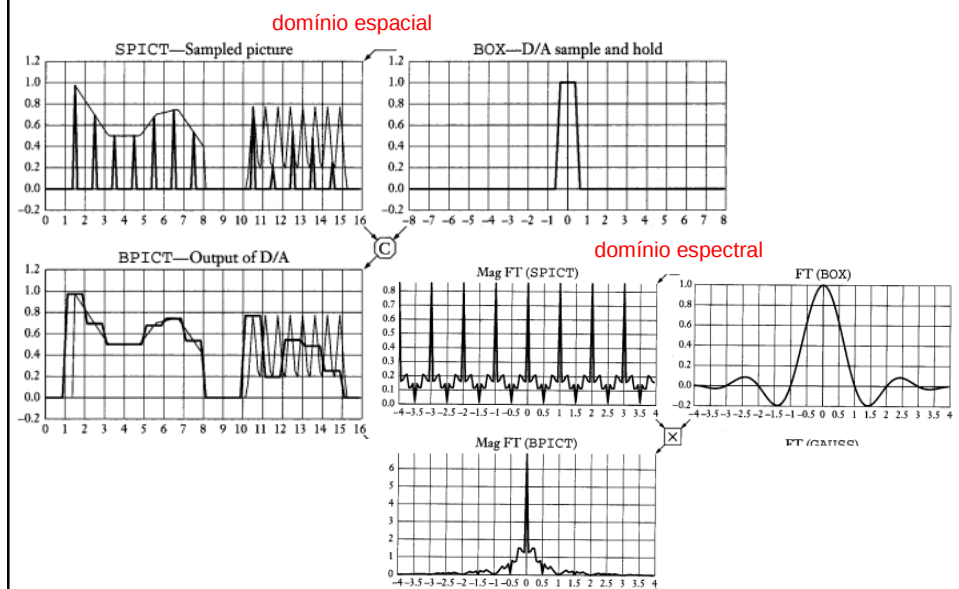


Amostragem 1D

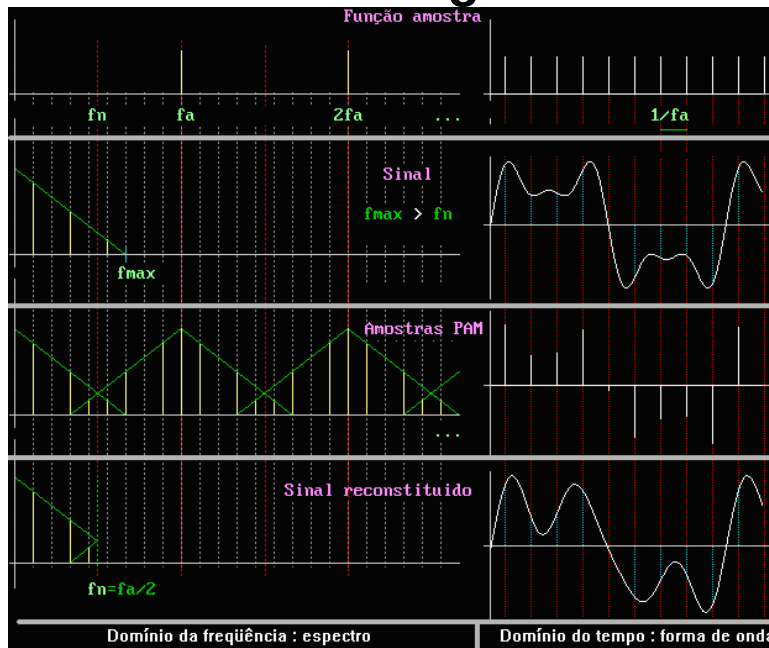
Subamostragem



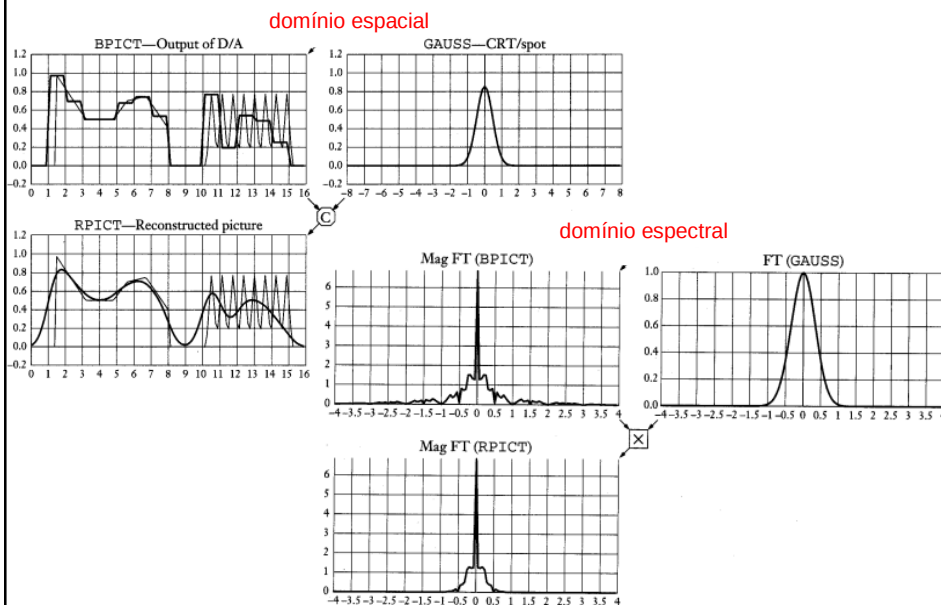
Reconstrução



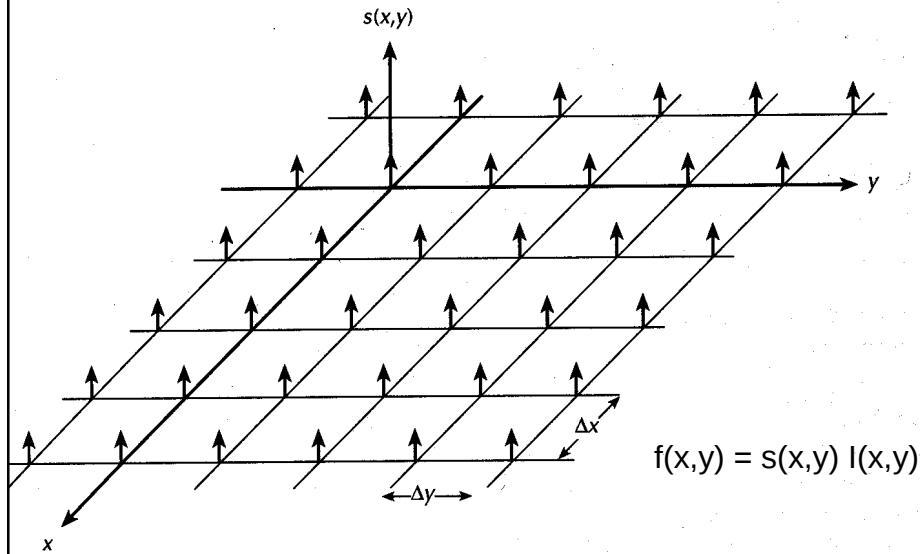
Amostragem



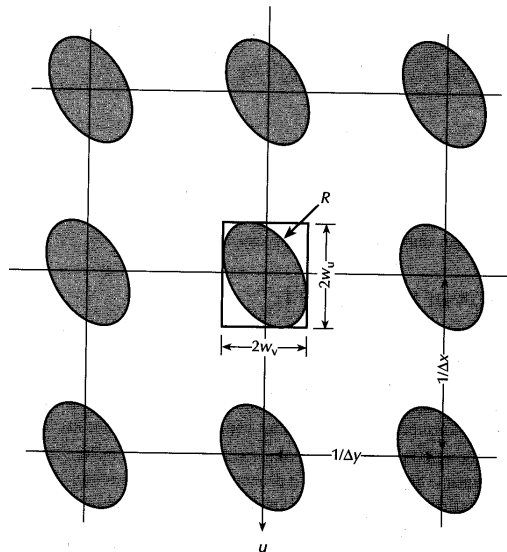
Exibição



Amostragem 2D



Amostragem



Anti-aliasing

Aliased

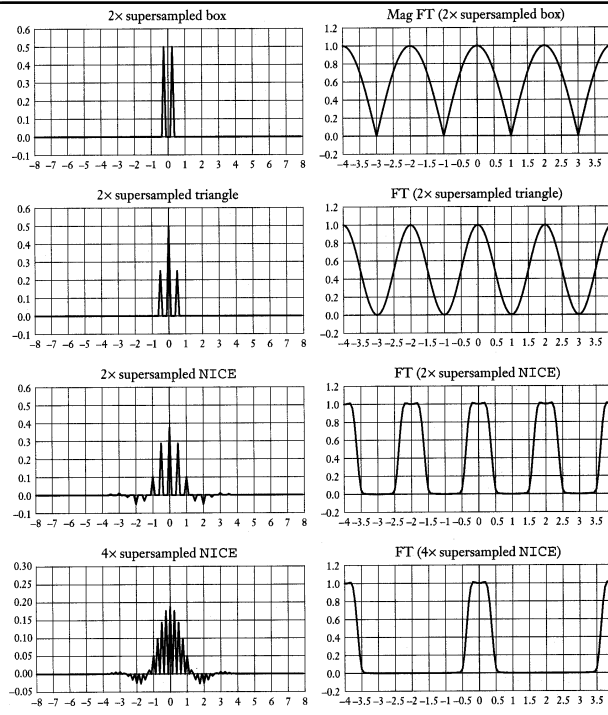
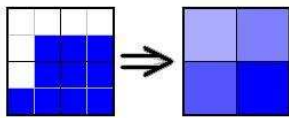


Anti-Aliased

Aumentar a taxa de amostragem

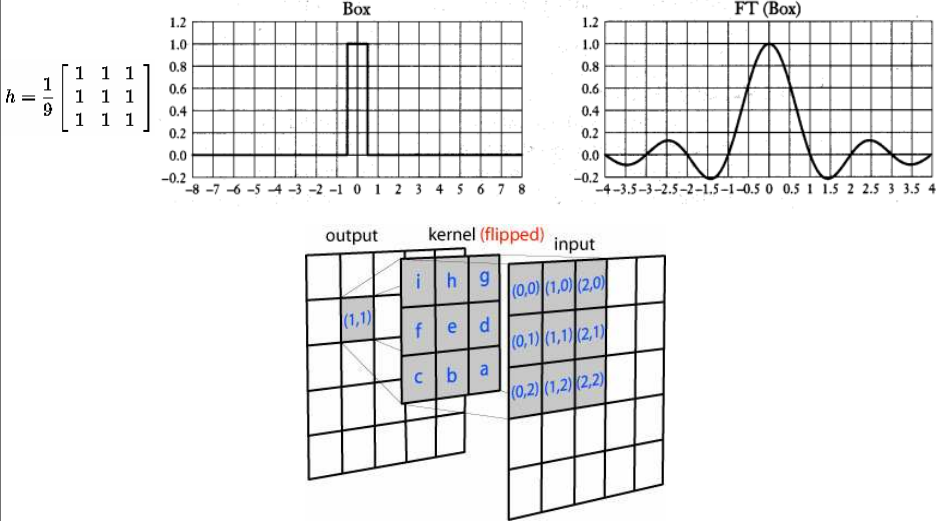
Eliminar as altas frequências → Filtragem

Super amostragem



Filtragem

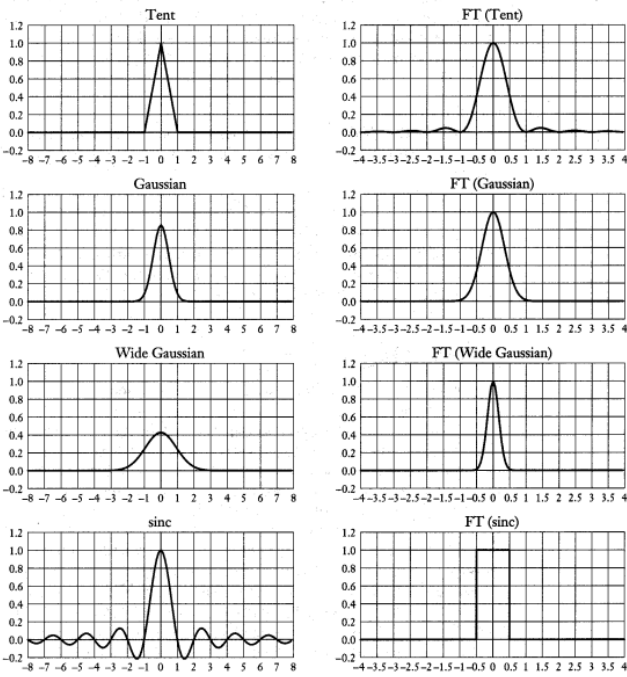
Função de Espalhamento Pontual



$$\frac{1}{115}$$

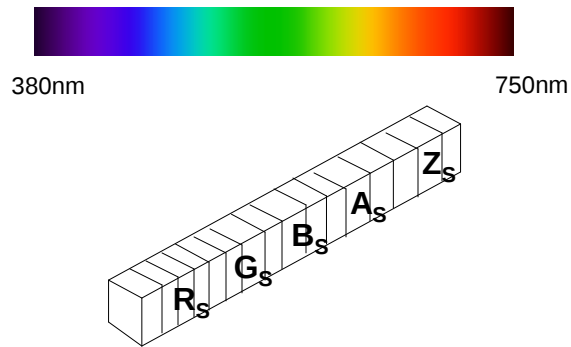
2	4	5	4	2
4	9	12	9	4
5	12	15	12	5
4	9	12	9	4
2	4	5	4	2

Figure 3 Discrete approximation to Gaussian function with $\sigma=1.4$



Quantização

Discretização no contra-domínio



Quantidade de cores limitada pelo número de bits associado a cada *pixel*!

Quantização



2 níveis



4 níveis



256 níveis

Quantização



24 bits = Paleta de 2^{24} cores

4 bits = Paleta de 16 cores

Procedimento

- Analisar as amostras de cores na imagem
- Definir um conjunto de **níveis de quantização**
- **Associar** cada amostra a um nível
- Gerar nova imagem



Análise e
definição



Correspon
dência



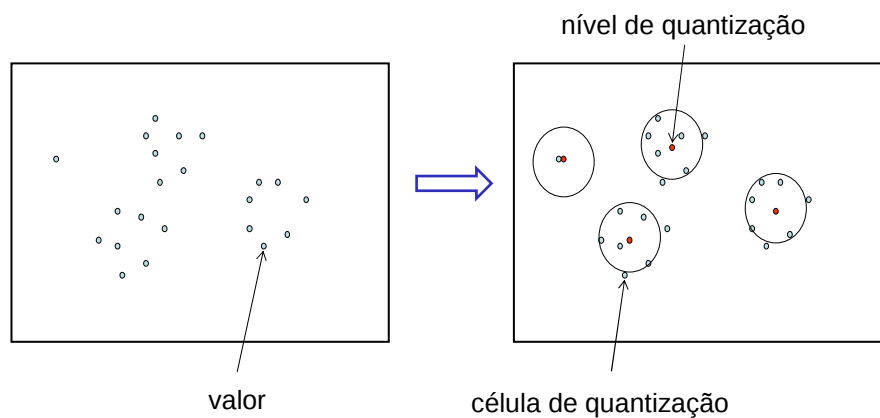
Critério de Fidelidade

Imagem Discreta $e(x,y)$ $\rightarrow$ Imagem Digital $\hat{e}(x,y)$

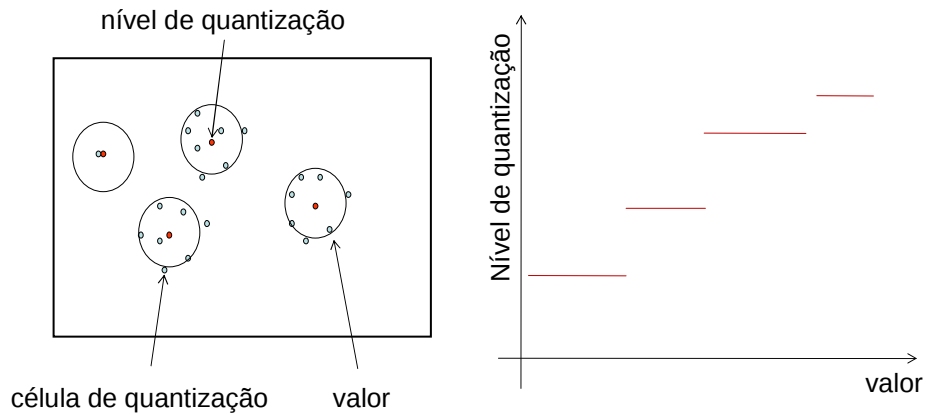
Erro médio quadrático

$$e_{\text{RMS}} = \text{raiz}(1/MN \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\hat{e}(x,y) - e(x,y)]^2)$$

Interpretação Geométrica

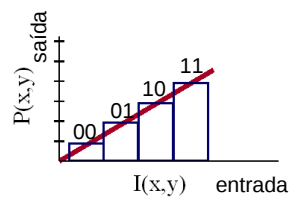


Representação Gráfica



Quantização

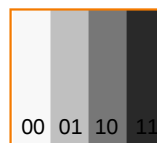
Uniform Quantization



Função de transferência



$I(x,y)$



$P(x,y)$
(2 bits per pixel)

Problema: Nem todas as cores/os níveis de cinza aparecem na imagem!

Quantização

Uniform Quantization



- Images with decreasing bits per pixel:



8 bits



4 bits



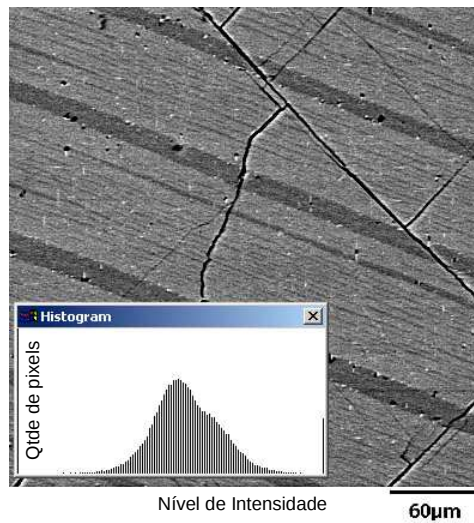
2 bits



1 bit

Contornos falsos!!!

Análise Estatística



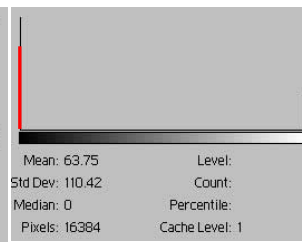
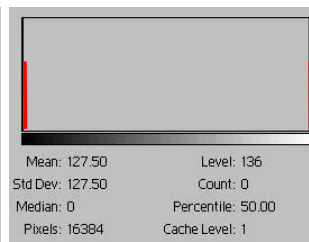
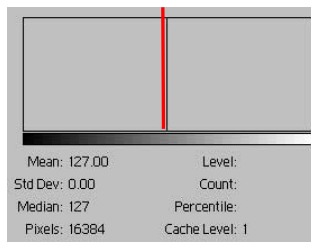
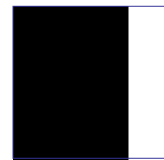
Quantização
conforme a
quantidade de
ocorrências de
cada
intensidade.



Histograma

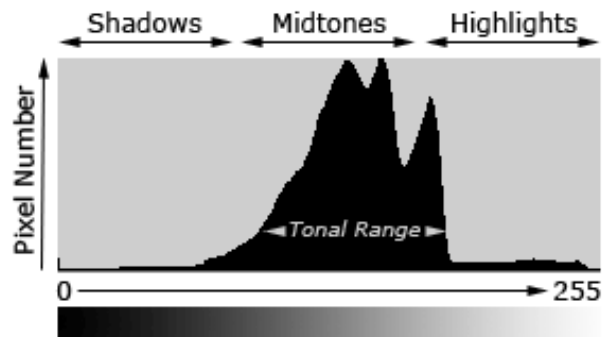
Histograma

Distribuição de freqüências de intensidade



Histograma

Caracterização das Imagens



Histograma

Exemplos

Imagem escura

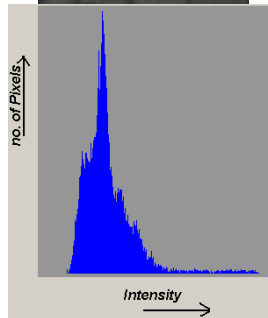


Imagem clara

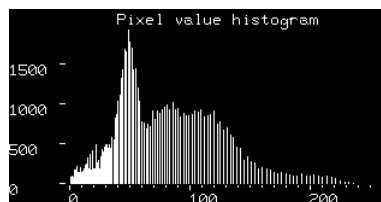


High Key

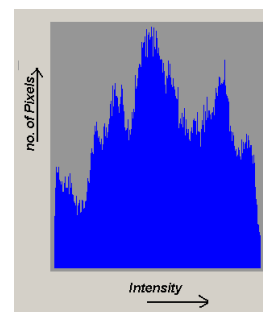
Histograma

Exemplos

Baixo contraste

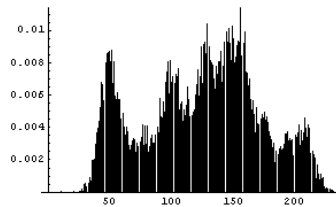


Alto contraste

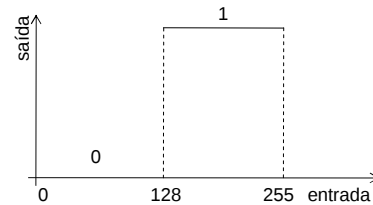


Histograma

Subdivisão Uniforme



Função de
transferência



Algoritmo de Populosidade

Heckbert (1982)

Para minimizar

$$e_{\text{RMS}} = \text{raiz}(1/MN \sum \sum [\hat{e}(x,y) - e(x,y)]^2)$$



Níveis de quantização:
As amostras de cor/intensidade de maior ocorrência



Histograma:
Distribuição de frequência de amostras

Algoritmo de Populosidade



Amostras vermelhas desapareceram na imagem quantizada ...

Algoritmo de Corte Mediano

Células de Quantização

Minimizar:

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} p(c) |c - q_i|$$

c : intensidade

$p(c)$: frequência de ocorrência de c

q_i : nível de quantização

Algoritmo de Corte Mediano

Heckbert (1982)

... Uma Aproximação:

Escolher os níveis de quantização de forma que cada um seja utilizado pela **mesma quantidade de pixels**.

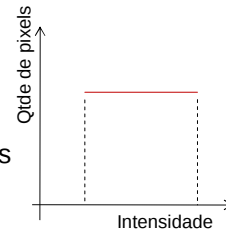


Histograma Equalizado:
distribuição uniforme das intensidades



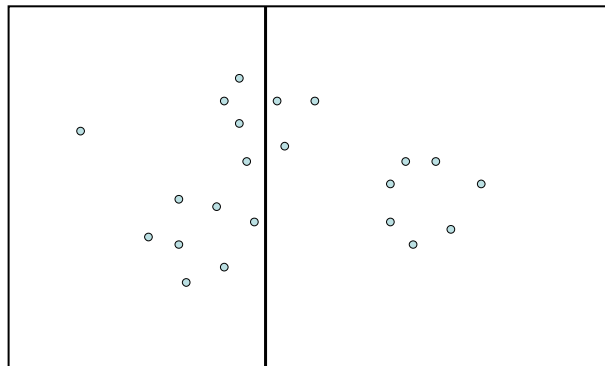
Mediana:

medida estatística que permite equalizar um histograma. Ela divide o conjunto de dados em duas partes com igual número de elementos.



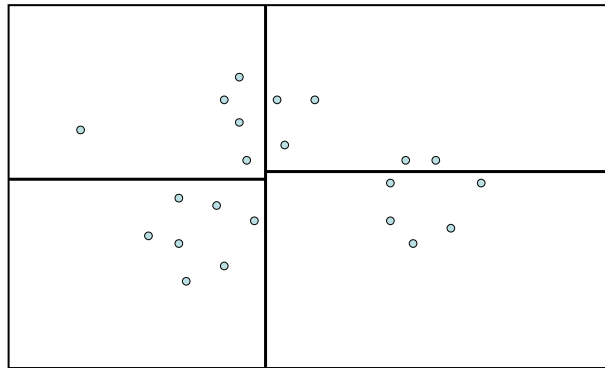
Algoritmo de Corte Mediano

A mediana ao longo do “lado” maior subdivide o espaço de amostras em dois subespaços



Algoritmo de Corte Mediano

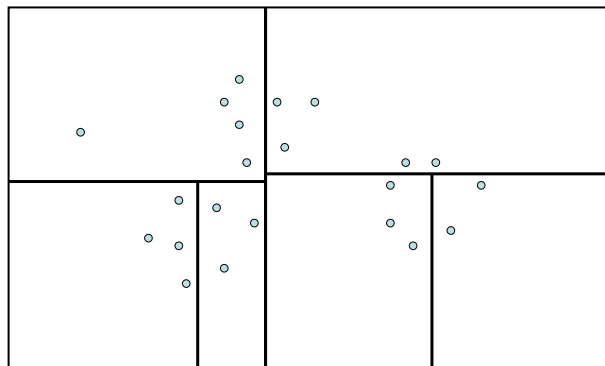
A mediana ao longo do “lado” maior de cada subespaço subdivide o espaço original em 4 subespaços



2 bits

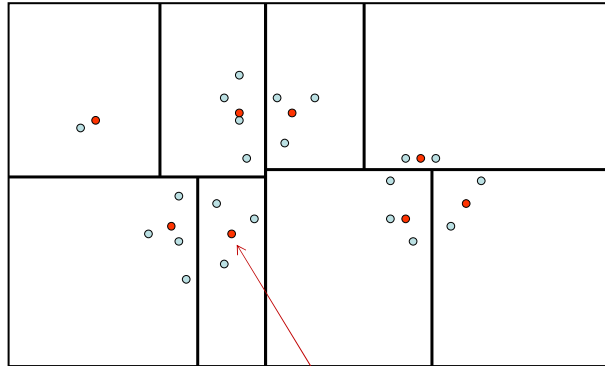
Algoritmo de Corte Mediano

Se houver mais um bit, pode-se subdividir recursivamente



Algoritmo de Corte Mediano

E obter 8 subespaços, ou 8 células de quantização



3 bits

O **nível de quantização** pode ser o centróide de cada célula.

Algoritmo de Corte Mediano

```
Quantização_cor(Imagem, n){  
    Posicionar a cor em cada pixel no espaço RGB;  
  
    B = {espaço RGB};  
    Enquanto (n-- > 0) {  
        L = Mais_populosa(B);  
        Dividir L em L1 e L2, no eixo de maior variação;  
        Substituir L por L1 e L2 em B;  
    }  
  
    Para todas as células em B faça  
        selecionar o nível de quantização (p.ex, centróide);  
  
    Para cada pixel na imagem faça  
        substituir a cor pelo nível de quantização da célula;  
}
```

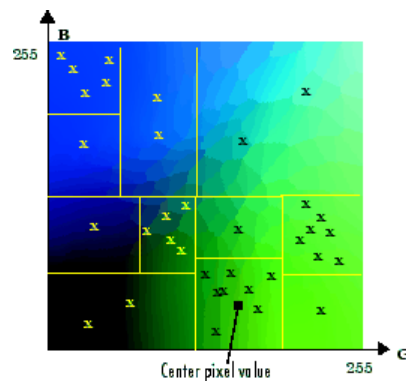
Algoritmo de Corte Mediano

Crêterios de Escolha

- Vários cr terios podem ser utilizados para escolha da célula “mais populosa” do espaço:
 - Quantidade de ocorrências de cores na célula;
 - Quantidade de cores distintas;
 - Dimensões da célula.

Algoritmo de Corte Mediano

Níveis de Quantização



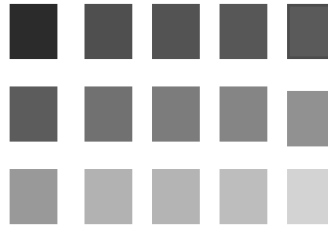
Quantização

Exemplo

42	42	86	42	42	133	82	82
112	123	211	153	153	123	112	112
145	211	153	153	211	153	145	189
178	211	211	211	145	211	211	153
178	145	211	211	153	153	211	133
112	91	91	82	189	189	123	180
133	42	112	89	78	42	42	123
145	211	211	211	145	211	153	123

Quantize em 5 níveis

- Determinar 3 limiares/4 níveis de quantização para uma imagem com 15 distintos valores



Quantização

Exemplo

Quantize em 4 níveis

- Determinar 3 limiares/4 níveis

a. Subdivisão uniforme

Células de quantização:

0 - 63

64 - 127

128 - 191

192 - 255

b. Algoritmo de populosoidade

Níveis de quantização:

211, 153, 42, 145

c. Algoritmo de corte mediano

Células de quantização:

0 - 115,

116 - 150,

151 - 200,

201 - 255

Ocorrências

42	7
78	1
82	3
86	1
89	1
91	2
112	5
123	5
133	3
145	6
153	9
178	2
180	1
189	3
211	15

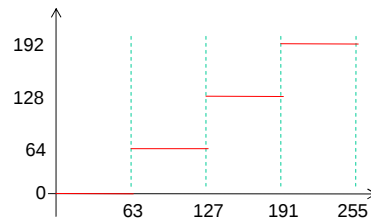
Quantização

Exemplo

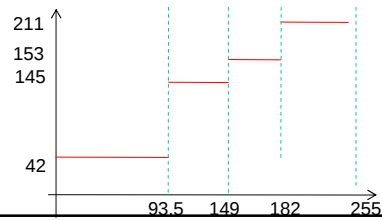
42	42	86	42	42	133	82	82
112	123	211	153	153	123	112	112
145	211	153	153	211	153	145	189
178	211	211	211	145	211	211	153
178	145	211	211	153	153	211	63
112	91	91	82	189	189	124	180
68	42	112	89	78	42	42	124
145	211	211	211	145	211	153	124

1. Determinar 3 limiares/4 níveis
2. Determinar nível/célula de quantização

a. Subdivisão uniforme



b. Algoritmo de Populosidade



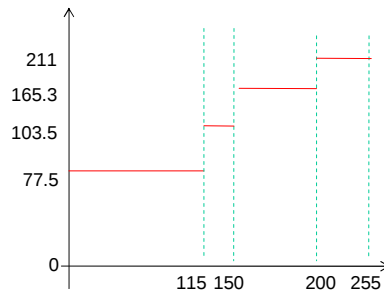
Quantização

Exemplo

42	42	86	42	42	133	82	82
112	123	211	153	153	123	112	112
145	211	153	153	211	153	145	189
178	211	211	211	145	211	211	153
178	145	211	211	153	153	211	63
112	91	91	82	189	189	124	180
68	42	112	89	78	42	42	124
145	211	211	211	145	211	153	124

1. Determinar 3 limiares/4 níveis
2. Determinar nível/célula de quantização

c. Algoritmo de Corte Mediano



Quantização

Exemplo

42	42	86	42	42	133	82	82
112	123	211	153	153	123	112	112
145	211	153	153	211	153	145	189
178	211	211	211	145	211	211	153
178	145	211	211	153	153	211	63
112	91	91	82	189	189	124	180
68	42	112	89	78	42	42	124
145	211	211	211	145	211	153	124

- Determinar 4 limiares/5 níveis
 - Subdivisão uniforme
 - Algoritmo de populosidade
 - Algoritmo de corte mediano
- Determinar níveis/células de quantização
- Aplicar a função de transferência sobre a imagem
 - Subdivisão Uniforme**
 $[0, 64) \rightarrow 0$; $[64, 128) \rightarrow 64$
 $[128, 192) \rightarrow 128$; $[192, 255] \rightarrow 192$
 - Populosidade**
 $[0, 93.5) \rightarrow 42$; $[93.5, 149) \rightarrow 145$
 $[149, 182] \rightarrow 153$; $[182, 255] \rightarrow 211$
 - Corte Mediano**
 $[0, 115) \rightarrow 77.5$; $[115, 150] \rightarrow 103.5$
 $[151, 200) \rightarrow 165.3$; $[200, 255] \rightarrow 211$

Quantização

Exemplo



Subdivisão uniforme



Populosidade



Corte Mediano



Quantização

Redução de Níveis → Contornos Falsos!



256 níveis



4 níveis



2 níveis

16 níveis



8 níveis



4 níveis



2 níveis



Como “emular” mais níveis de intensidade com um número reduzido de bits?

Meio-Tom e *Dithering*

Halftoning and Dithering



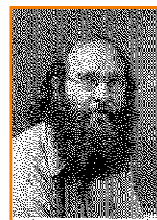
- Distribute errors among pixels
 - Exploit spatial integration in our eye
 - Display greater range of perceptible intensities



Original
(8 bits)

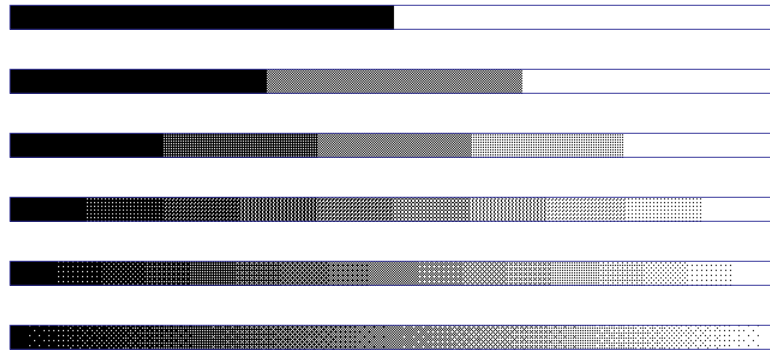


Uniform
Quantization
(1 bit)



Floyd-Steinberg
Dither
(1 bit)

Meio-Tom



Vários tons de cinza com uso de apenas branco e preto.

Meio-Tom

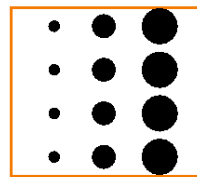
Classical Halftoning



- Use dots of varying size to represent intensities
 - Area of dots proportional to intensity in image



$I(x,y)$



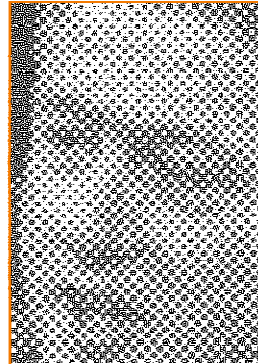
$P(x,y)$

Meio-Tom Clássico

Classical Halftoning



Newspaper Image



From New York Times, 9/21

(1999)

Meio-Tom Digital

Aglomerado de *Pixels*

Resolução espacial x Resolução de intensidades



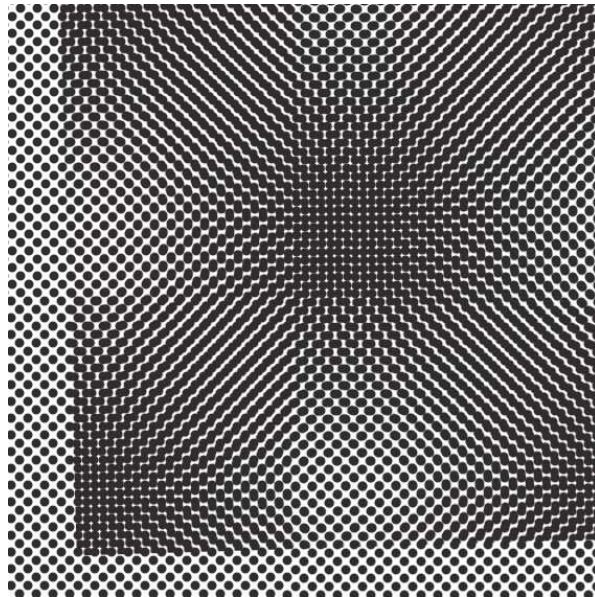
Halftoning

Digital
halftoning

Meio-Tom Digital

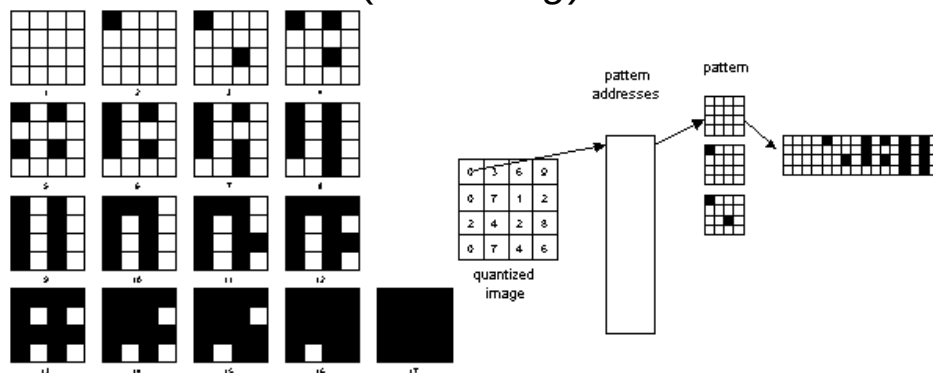
Aglomerado de Pixels

Padrões indesejáveis!!!



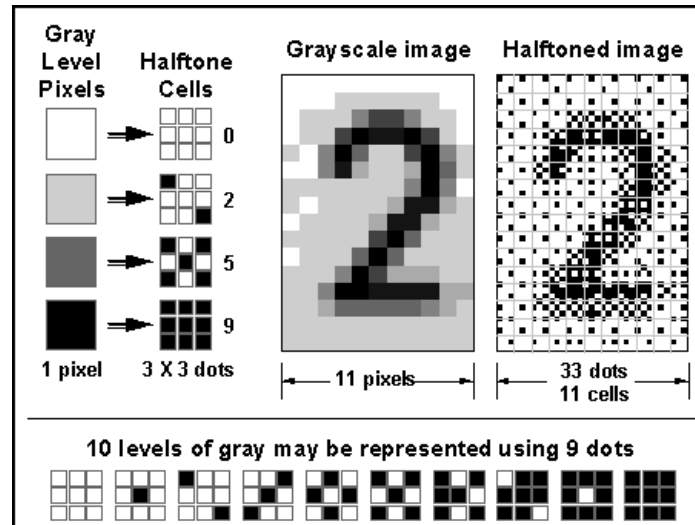
Meio-Tom Digital

Dispersão de pixels: Máscaras de Padrão (Patterning)



Meio-Tom Digital

Máscaras de Padrão



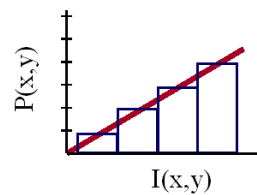
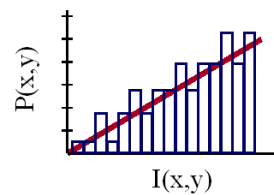
Dithering

Aumento da resolução de intensidades sem sacrificar a resolução espacial

Random Dither



- Randomize quantization errors
 - Errors appear as noise



$$P(x, y) = \text{trunc}(I(x, y) + \text{noise}(x, y) + 0.5)$$

Dithering

Random Dither



Original
(8 bits)



Uniform
Quantization
(1 bit)



Random
Dither
(1 bit)

Dithering

Ordered Dither



- Bayer's ordered dither matrices

$$D_n = \begin{bmatrix} 4D_{n/2} + D_2(1,1)U_{n/2} & 4D_{n/2} + D_2(1,2)U_{n/2} \\ 4D_{n/2} + D_2(2,1)U_{n/2} & 4D_{n/2} + D_2(2,2)U_{n/2} \end{bmatrix}$$

Nível de Intensidade 1

Nível de Intensidade 3

$$D_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Nível de Intensidade 0

Nível de Intensidade 2

$$D_4 = \begin{bmatrix} 15 & 7 & 13 & 5 \\ 3 & 11 & 1 & 9 \\ 12 & 4 & 14 & 6 \\ 0 & 8 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Dithering Algoritmo

Para cada linha y
 Para cada coluna x
 determinar a posição na matriz de dither
 $i = x \bmod n; j = y \bmod n;$
 Se $(I(x,y) \leq I(D_n(i,j)))$ então
 $P(x,y) = \text{Preto};$
 senão
 $P(x,y) = \text{Branco}$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dithering Example

Ordered Dither



Original
(8 bits)



Random
Dither
(1 bit)



Ordered
Dither
(1 bit)

Dithering Exemplo

42	42	86	42	42	133	82	82
112	123	211	153	153	123	112	112
145	211	153	153	211	153	145	189
178	211	211	211	145	211	211	153
178	145	211	211	153	153	211	133
112	91	91	82	189	189	123	180
133	42	112	89	78	42	42	123
145	211	211	211	145	211	153	123

Quantize em 5 níveis com 1 bit

1. Determinar 4 limiares

Quantização Exemplo

42	42	86	42	42	133	82	82
112	123	211	153	153	123	112	112
145	211	153	153	211	153	145	189
178	211	211	211	145	211	211	153
178	145	211	211	153	153	211	63
112	91	91	82	189	189	124	180
68	42	112	89	78	42	42	124
145	211	211	211	145	211	153	124

1. Determinar 4 limiares/5 níveis
 - a. Subdivisão uniforme
 - b. Algoritmo de populosidade
 - c. Algoritmo de corte mediano
2. Determinar níveis/células de quantização
3. Aplicar a função de transferência sobre a imagem
 - a. **Subdivisão Uniforme**
 $[0, 64) \rightarrow 0$; $[64, 128) \rightarrow 64$
 $[128, 192) \rightarrow 128$; $[192, 255] \rightarrow 192$
 - b. **Populosidade**
 $[0, 93.5) \rightarrow 42$; $[93.5, 149) \rightarrow 145$
 $[149, 182] \rightarrow 153$; $[182, 255] \rightarrow 211$
 - c. **Corte Mediano**
 $[0, 115) \rightarrow 77.5$; $[115, 150] \rightarrow 103.5$
 $[151, 200) \rightarrow 165.3$; $[200, 255] \rightarrow 211$

Dithering Exemplo

42	42	86	42	42	133	82	82
112	123	211	153	153	123	112	112
145	211	153	153	211	153	145	189
178	211	211	211	145	211	211	153
178	145	211	211	153	153	211	63
112	91	91	82	189	189	124	180
68	42	112	89	78	42	42	124
145	211	211	211	145	211	153	124

- Determinar 4 limiares
 - Subdivisão uniforme
 $[0, 64) \rightarrow 0$
 $[64, 128) \rightarrow 64$
 $[128, 192) \rightarrow 128$
 $[192, 255] \rightarrow 192$
- Construir máscara de *dither*

255	128
64	192
- Varrer a imagem

Dithering Exemplo

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- Determinar 4 limiares
 - Subdivisão uniforme
 $[0, 64) \rightarrow 0$
 $[64, 128) \rightarrow 64$
 $[128, 192) \rightarrow 128$
 $[192, 255] \rightarrow 192$
- Construir máscara de *dither*

255	128
64	192
- Varrer a imagem

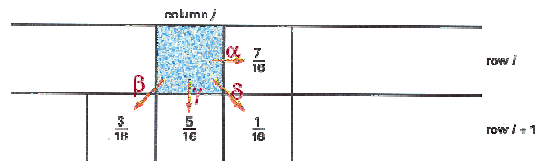
255	128
64	192

0	0	0	0	0	1	0	0
42	42	86	42	42	133	82	82
1	1	1	1	1	0	1	1
112	123	211	153	153	123	112	112
0	1	0	1	0	1	0	1
145	211	153	153	211	153	145	189
1	1	1	1	1	1	1	0
178	211	211	211	145	211	211	153
0	1	0	1	0	1	0	0
178	145	211	211	153	153	211	63
1	0	1	0	1	1	1	0
112	91	91	82	189	189	124	180
0	0	0	0	78	42	42	0
68	42	112	89	78	42	42	124
1	1	1	1	1	1	1	0
145	211	211	211	145	211	153	124

Difusão de Erro

difundir erros entre pixels vizinhos

- Spread quantization error over neighbor pixels
 - Error dispersed to pixels right and below



$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1.0$$

Figure 14.42 from H&B

Dithering

Difusão de Erro

Floyd-Steinberg Algorithm



```
for (x = 0; x < width; x++) {  
    for (y = 0; y < height; y++) {  
        P(x,y) = trunc(I(x,y) + 0.5)  
        e = I(x,y) - P(x,y)  
        I(x,y+1) +=  $\alpha$ *e;  
        I(x+1,y-1) +=  $\beta$ *e;  
        I(x+1,y) +=  $\gamma$ *e;  
        I(x+1,y+1) +=  $\delta$ *e;  
    }  
}
```

Dithering

Difusão de Erro

Error Diffusion Dither



Original
(8 bits)



Random
Dither
(1 bit)



Ordered
Dither
(1 bit)

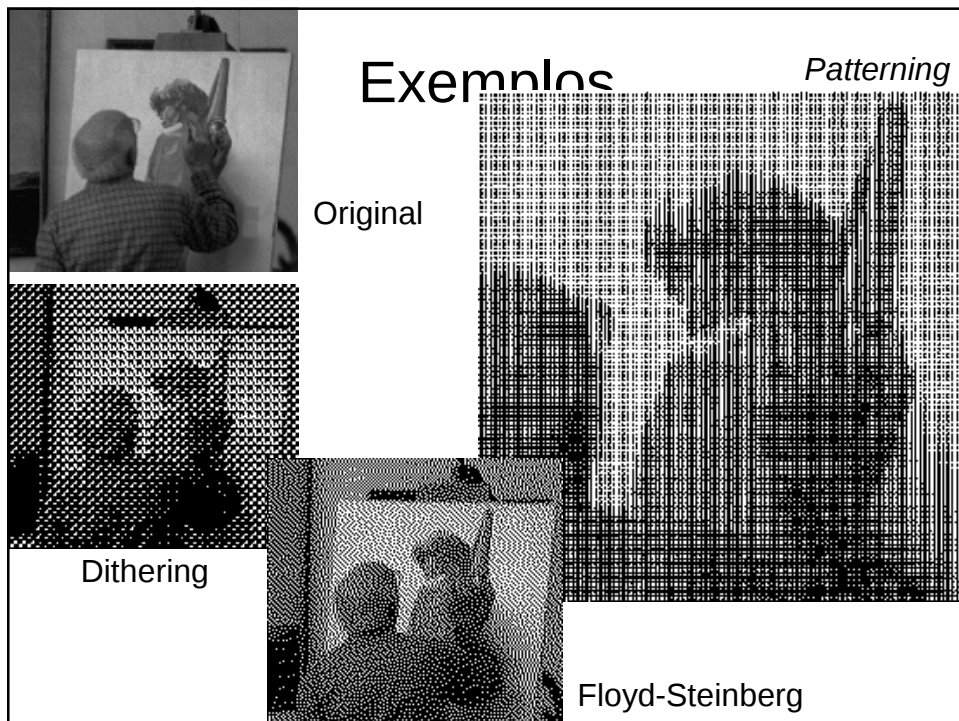


Floyd-Steinberg
Dither
(1 bit)

Meio-Tom e *Dithering*

Artifícios para redução de erros e/ou aumento das intensidades

- Aproximação por meio-tom digital
 - *pixels* são agrupado, emulando meio-tom analógico
 - sacrifica a resolução espacial
- *Dithering* ordenado
 - *pixels* são dispersos
 - minimiza artefatos visuais em regiões de luminância constante
 - mantém a mesma resolução espacial
- *Dithering* por difusão de erro
 - minimiza o erro de quantização através da distribuição de erros



Corte Mediano (8 níveis)



Corte Mediano (4 níveis)



Limiar (2 níveis)



Bayer's *Dithering* Ordenado



Dithering por Difusão de Erro

