Modelagem Geométrica I

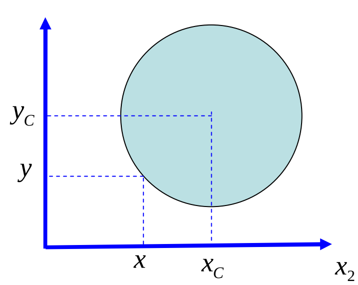
Rogers & Adams – Seções 4.1-4.4,5.1-5.2,5.8-5.8,6.1,6.11-6.12

Apostila – Capítulo 3

Representação Implícita

$$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=R^2=4$$

Possíveis inferências geométricas:



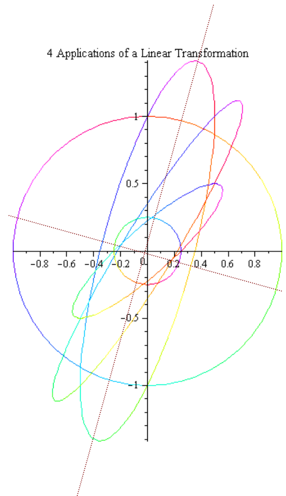
Perímetro: $2\pi R$

Área: πR^2

Pertinência/Continência de um ponto:

$$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2\leq 4$$

Funções Cônicas



$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$P^t MP = 0$$

$$M\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

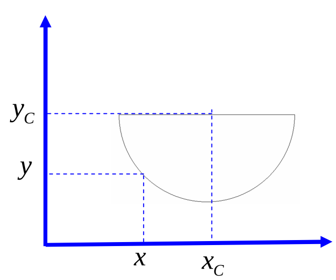
$$(M - \lambda I)\vec{v} = 0$$

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

Equação Característica

Para cada λ determina-se $\vec{v}$

Representação Explícita



$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2 = 4$$

Obtenção explícita de pares ordenados

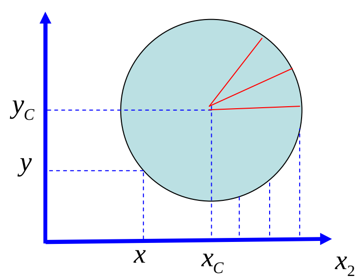
$$x = x_C \pm \sqrt{R^2 - (y - y_C)^2}$$

Possíveis inferências geométricas:

Perímetro: $2\pi R$

Área: πR^2

Representação Paramétrica



$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2 = 4$$

Pontos com coordenadas *x* ou *y* igualmente espaçados não implicam em distribuição uniforme (mesma variação angular) de amostras sobre a circunferência!

⇩

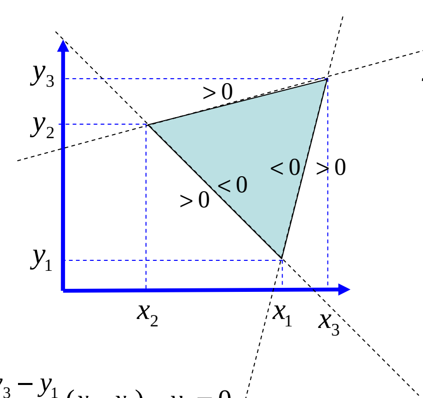
Parametrizar as coordenadas em termos do ângulo θ de cada arco

$$x = R\cos\theta$$

$$y = Rsen\theta$$

Coordenadas Polares

Representação Implícita



Interseção (b)

$$y - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}(x - x_3) - y_3 = 0$$

Inclinação (a)

$$y - ax - b = 0$$

$$y - \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}(x - x_1) - y_1 = 0$$

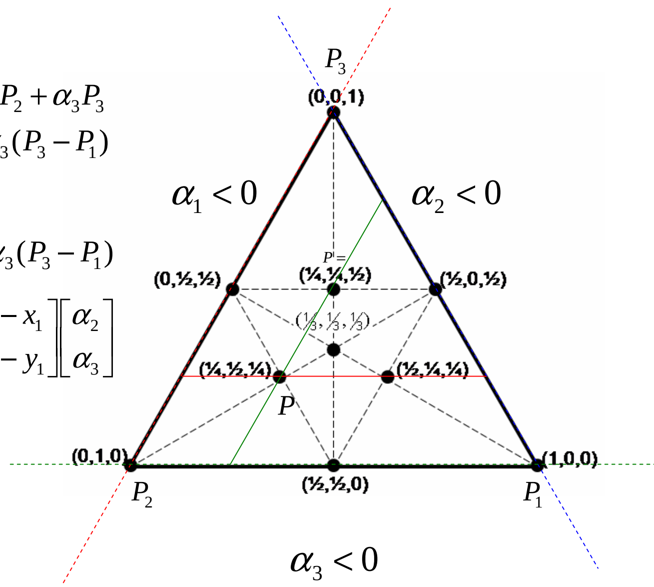
$$y - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_2) - y_2 = 0$$

Representação Paramétrica

$$
\begin{aligned}
P &= \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 \\
&= (1-\alpha_2-\alpha_3)P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 \\
&= P_1 + \alpha_2 (P_2 - P_1) + \alpha_3 (P_3 - P_1)
\end{aligned}
$$

$$P - P_1 = \alpha_2 (P_2 - P_1) + \alpha_3 (P_3 - P_1)$$

$$\begin{bmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$



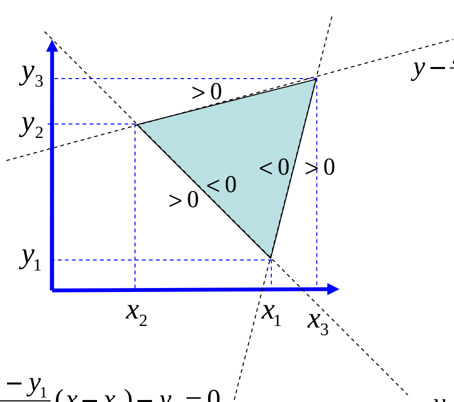
Representação Implícita

Interseção (b)

$$y - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}(x - x_3) - y_3 = 0$$

Inclinação (a)

$$y - ax - b = 0$$



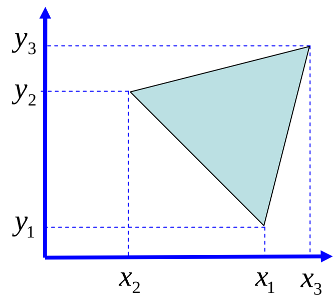
$$y - \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}(x - x_1) - y_1 = 0$$

$$y - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_2) - y_2 = 0$$

Representação Discreta

Sequência de pontos em coordenadas cartesianas

$$(x_1, y_1), (x_3, y_3), (x_2, y_2)$$



Possíveis inferências geométricas:

Comprimento do lado: $\sqrt{\begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix}}$

Orientação no plano: $Base = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}; Altura = \begin{pmatrix} y_2 - y_1 \\ -(x_2 - x_1) \end{pmatrix}$

Pertinência/Continência de um ponto:

$$y - \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}(x - x_1) - y_1 \leq 0 \qquad y - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_2) - y_2 \leq 0 \qquad y - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}(x - x_3) - y_3 \leq 0$$

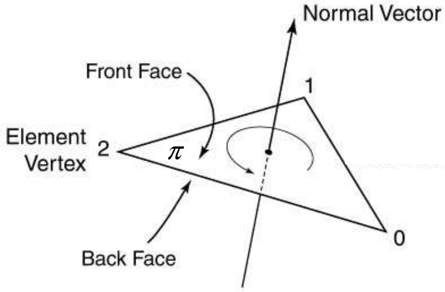
Síntese

- •Distintas formas para representar pontos no espaço
  - •Coordenadas cartesianas
  - •Coordenadas polares, esféricas, cilíndricas
  - •Coordenadas afins, baricêntricas, convexas

- •Distintas formas para especificar os pontos de um lugar geométrico
  - •Sequência orientada de vértices
  - •Funções
    - •Paramétricas
    - •Implícitas
    - •Explícitas

- •Distintos algoritmos de inferência geométrica
  - •Propriedades de interesse para Computação Gráfica: vetores-posição e vetores normais.

Representações de um triângulo



Alternativas de Representação:

1. Sequência orientada:

$$P_0, P_1, P_2$$

$$\vec{n} = \frac{(P_0 - P_2) \times (P_1 - P_0)}{|P_0 - P_2||P_1 - P_0|}$$

2. Implícita

$f = \vec{n} \cdot (P - P_2) = 0$ e domínio de x,y,z

$$\vec{n} = \nabla f$$

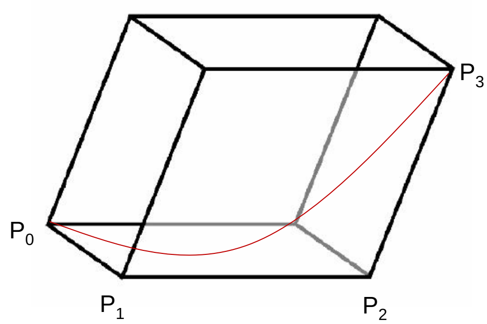
3. Paramétrica

$$P(\alpha, \beta) = \alpha P_0 + \beta P_1 + (1 - \alpha - \beta) P_2$$

$$\vec{n} = \frac{\partial P/\partial \alpha \times \partial P/\partial \beta}{|\partial P/\partial \alpha||\partial P/\partial \beta|}$$

Curvas de Bézier

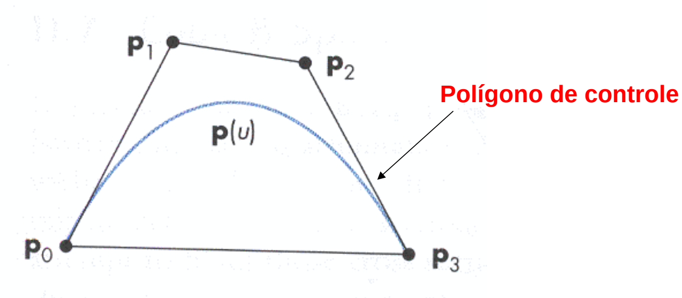
Conceito Original: curvas fixas num paralelepípedo que controla a sua forma



Curva de Bézier

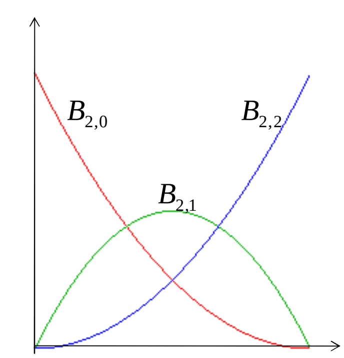
$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i J_{n,i}(t) \qquad J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \qquad t \in [0,1]$$

$\sum J_{n,i}(t) = 1, J_{n,i}(t) \geq 0$ ⟹ Combinação convexa de P_i



Curvas de Bézier Quadráticas

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i J_{2,i}(t) \qquad J_{2,i}(t) = \binom{2}{i} t^i (1-t)^{2-i}$$

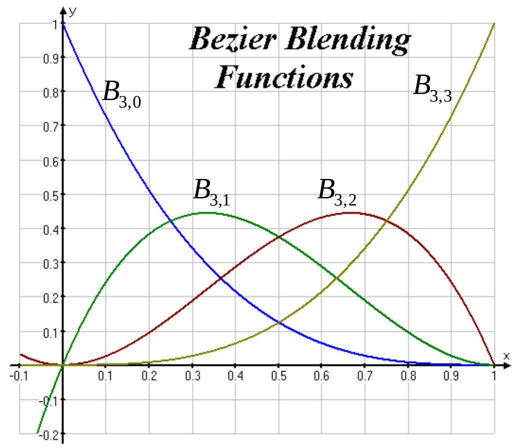


$B_{2,0}(t) = (1-t)^2$
$B_{2,1}(t) = 2t(1-t)$
$B_{2,2}(t) = t^2$

Curvas de Bézier Cúbicas

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i J_{3,i}(t) \qquad J_{3,i}(t) = \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i}$$

$B_{3,0}(t) = (1-t)^3$
$B_{3,1}(t) = 3t(1-t)^2$
$B_{3,2}(t) = 3t^2(1-t)$
$B_{3,3}(t) = t^3$



Outras Funções de Bernstein

http://i33www.ira.uka.de/applets/mocca/html/noplugin/curves.html

Propriedades

•É polinomial. Se a quantidade de pontos de controle é (n+1), o grau do polinômio é n.
•Acompanha a forma do polígono de controle. Está no fecho convexo dos pontos de controle.
•Influência global de cada ponto de controle.
•Pontos extremos da curva e do polígono coincidem.
•Tangente nos pontos extremos coincidem com os segmentos extremos do polígono de controle.
•A curva não oscila mais que o polígono de controle.
•São invariantes sob transformações afins.

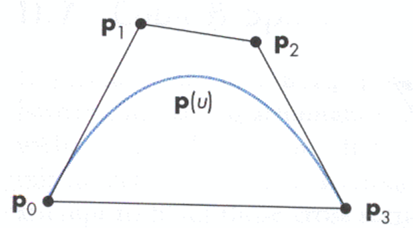
Polígono de Controle e Fecho Convexo

http://i33www.ira.uka.de/applets/mocca/html/noplugin/RenderBezierC/AppRenderBezierC/index.html

Algoritmo de DeCasteljau

http://www.cs.technion.ac.il/~cs234325/Applets/applets/bezier/GermanApplet.html

Notação Matricial



Curva de Bézier Cúbica

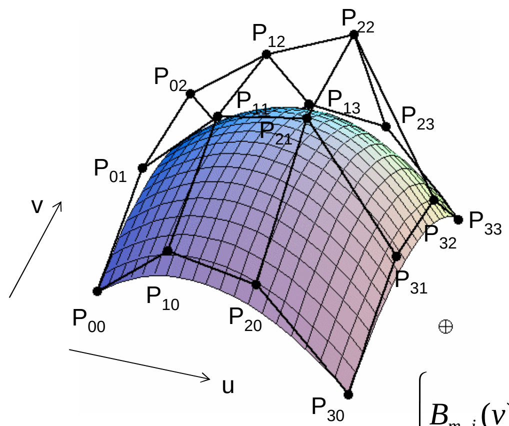
$$P(t) = B_{3,0}(t)\,P_0 + B_{3,1}(t)P_1 + B_{3,2}(t)\,P_2 + B_{3,3}(t)\;P_3$$

$$= (1-t)^3\,P_0 + 3t(1-t)^2\,P_1 + 3t^2(1-t)\,P_2 + t^3\,P_3$$

$$= (1-3t+3t^2-t^3)P_0 + (3t-6t^2+3t^3)\,P_1 + (3t^2-3t^3)\,P_2 + t^3\,P_3$$

$$= \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

Superfícies de Bézier

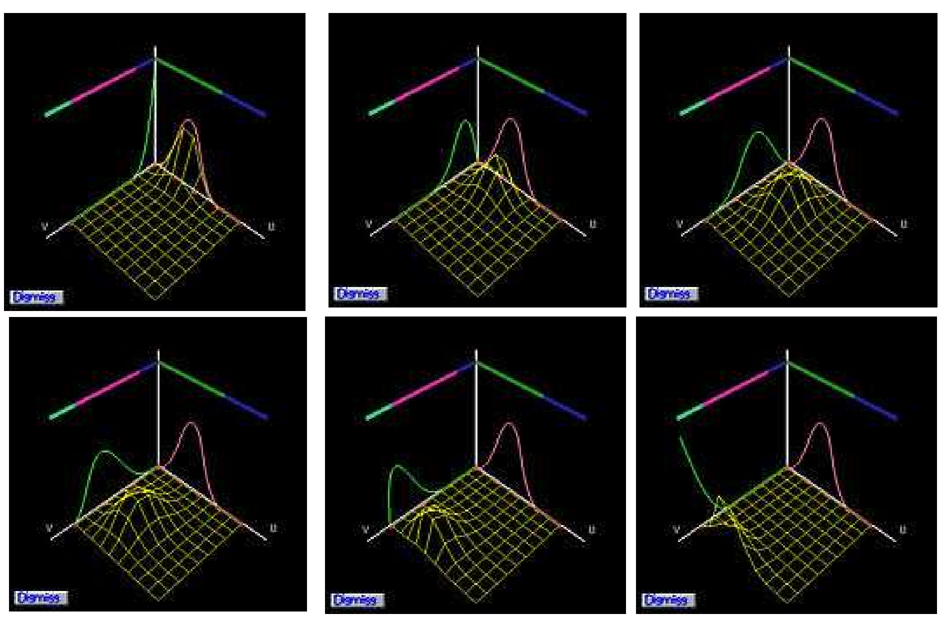


$P(u,v) = \Sigma B_{m,j}(v) (\Sigma B_{n,i}(u) P_{ij})$ onde

$$\begin{cases} B_{m,j}(v) = \binom{m}{j} v^j (1-v)^{m-j} \\ B_{n,i}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \end{cases}$$

IA725 – 1s2011
Profa. Ting

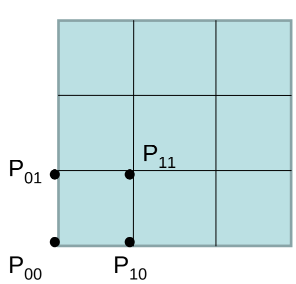
Funções de Bernstein Bi-dimensionais



Superfícies de Bézier Bicúbicas

http://www.nbb.cornell.edu/neurobio/land/OldStudentProjects/cs490-96to97/anson/BezierPatchApplet/

Superfícies de Bézier Bicúbicas



Pontos de controle na borda:
p.ex.: P_{00} , P_{01} , P_{10}

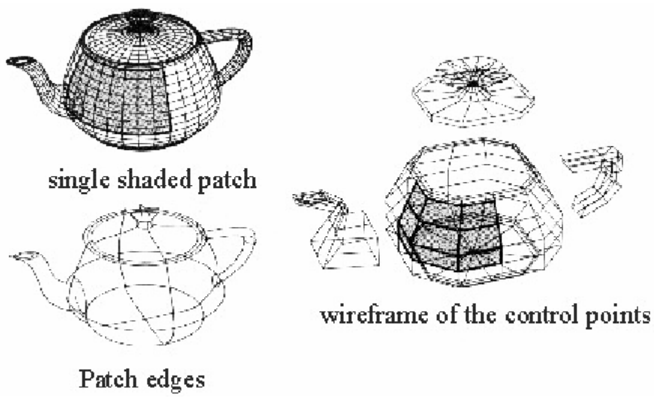
Vetores-tangente na borda
p.ex.: $3(P_{10} – P_{00})$, $3(P_{01} – P_{00})$

Vetores-torsão (derivada mista) na borda
p.ex.: $9(P_{00} – P_{01} – P_{10} – P_{11})$

Se $9(P_{00} – P_{01} – P_{10} – P_{11}) = 0$
$P_{00} – P_{01} – P_{10} = P_{11}$

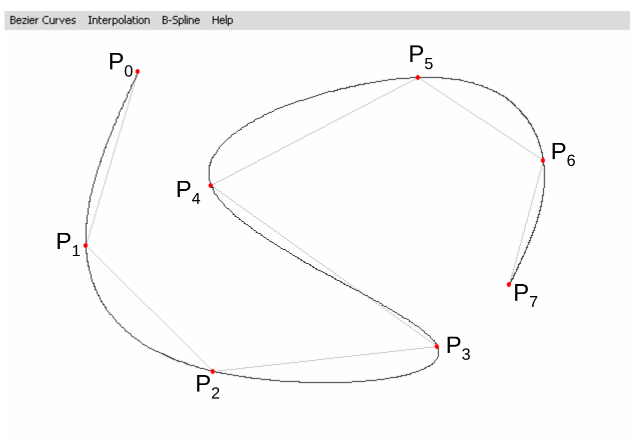
Superfícies de Bézier

Bule de Utah

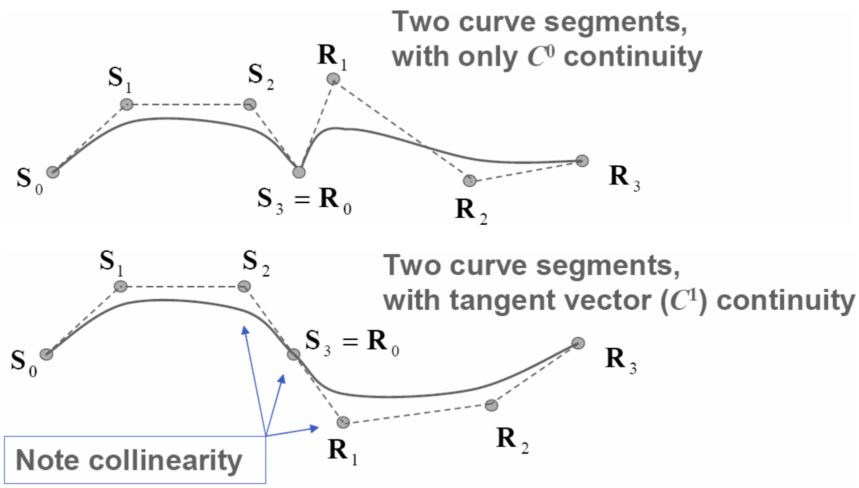


http://www.holmes3d.net/graphics/teapot/

Curvas de Bézier "Complexas"



Splines de Curvas de Bézier
Concatenação de curvas S e R



Continuidade

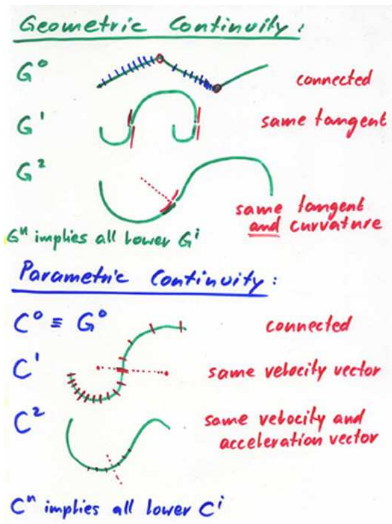
Diferenciabilidade:

C^0: S3= R
C^1: primeiras derivadas são iguais
C^2: primeiras e segundas derivadas são iguais
C^n: as primeiras n derivadas são iguais

Continuidade Geométrica (Representação Paramétrica):

G^0: S3(1)= R(0)
G^1: $\partial S(1)/\partial t_1 = k_1 \partial R(0)/\partial t_2$
G^2: $\partial S(1)/\partial t_1 = k_1 \partial R(0)/\partial t_2;$ $\partial^2 S(1)/\partial^2 t_1 = k_2 \partial^2 R(0)/\partial^2 t_2$
G^n: as primeiras n derivadas são iguais

Continuidade



$$\gamma(t) = (t, t^2), t \in [0,1]$$
$$\eta(t) = (2t+1, t^3+4t+1), t \in [0,1]$$

$$\gamma(1) = \eta(0)$$
$$\frac{\partial \gamma(1)}{\partial t} = (1, 2(1)) = (1,2)$$
$$\frac{\partial \eta(0)}{\partial t} = (2, 3(0)^2 + 4) = (2,4)$$

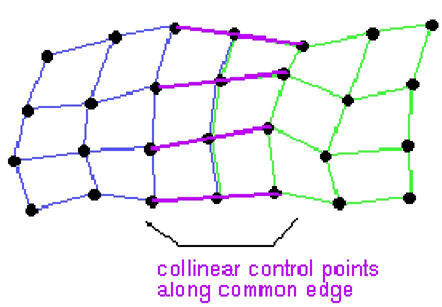
$$\gamma(t) = (t^2 - 2t + 2, t^3 - 2t^2 + t), t \in [0,1]$$
$$\eta(t) = (t^2 + 1, t^3), t \in [0,1]$$

$$\gamma(1) = \eta(0)$$
$$\frac{\partial \gamma(1)}{\partial t} = (2(1) - 2, 3(1)^2 - 4(1) + 1) = (0,0)$$
$$\frac{\partial \eta(0)}{\partial t} = (2(0), 3(0)^2) = (0,0)$$

Continuidade

Continuidade Geométrica:

G^0: $S3(1,v_1) = R(0,v_2)$
G^1: $\partial S(1, v_1)/\partial v_1 = k_1 \partial R(0, v_2)/\partial v_2$

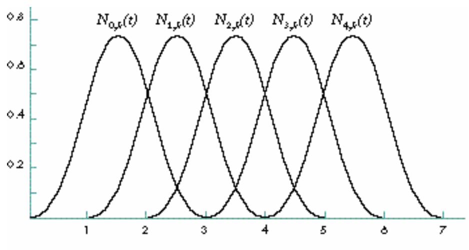


Splines de Base (B-*Splines*)

- pontos de controle: m
- ordem: k (grau:n=k-1)
- vetor de nós: $\{t_0, t_1, t_2 \ldots, t_{m+1+n}\}$
- (m-n+1) “segmentos de curvas”

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} N_{i,k}(t) P_i$$

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, \text{ se } t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0, \text{ em outros intervalos} \end{cases}$$



n=2
3 segmentos

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - t_i) N_{i,k-1}(t)}{(t_{i+k-1} - t_i)} + \frac{(t_{i+k} - t) N_{i+1,k-1}(t)}{(t_{i+k} - t_{i+1})}$$

Funções de Base Constantes e Lineares

- vetor de nós: {0,1,2,3,4,5,6}

$N_{0,1}(t) = 1, t \in [0,1)$

$N_{1,1}(t) = 1, t \in [1,2)$

$N_{2,1}(t) = 1, t \in [2,3)$

$N_{3,1}(t) = 1, t \in [3,4)$

$N_{4,1}(t) = 1, t \in [4,5)$

$N_{5,1}(t) = 1, t \in [5,6)$

$N_{0,2}(t) = t, t \in [0,1)$

$N_{0,2}(t) = (1-t), N_{1,2}(t) = (t-1), t \in [1,2)$

$N_{1,2}(t) = (3-t), N_{2,2}(t) = (t-2), t \in [2,3)$

$N_{2,2}(t) = (4-t), N_{3,2}(t) = (t-3), t \in [3,4)$

$N_{3,2}(t) = (5-t), N_{4,2}(t) = (t-4), t \in [4,5)$

$N_{4,2}(t) = (6-t), t \in [5,6)$

Funções de Base Quadráticas

- vetor de nós: {0,1,2,3,4,5,6}

$N_{0,3}(t) = t^2, t \in [0,1)$

$N_{0,3}(t) = \frac{t}{2}(1-t) + \frac{3-t}{2}(t-1), N_{1,3}(t) = \frac{(t-1)^2}{2}, t \in [1,2)$

$N_{0,3}(t) = \frac{(3-t)^2}{2}, N_{1,3}(t) = \frac{(t-1)(3-t)}{2} + \frac{(4-t)(t-2)}{2}, N_{2,3}(t) = \frac{(t-2)^2}{2}, t \in [2,3)$

$N_{1,3}(t) = \frac{(4-t)^2}{2}, N_{2,3}(t) = \frac{(t-2)(4-t)}{2} + \frac{(5-t)(t-3)}{2}, N_{3,3}(t) = \frac{(t-3)^2}{2}, t \in [3,4)$

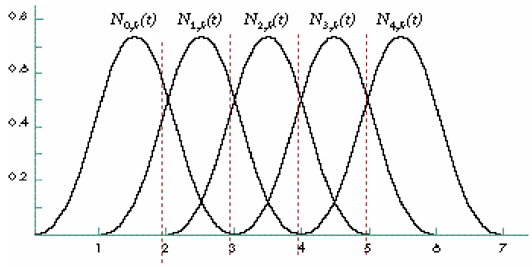
$N_{2,3}(t) = \frac{(5-t)^2}{2}, N_{3,3}(t) = \frac{(t-3)(5-t)}{2} + \frac{(6-t)(t-4)}{2}, t \in [4,5)$

$N_{3,3}(t) = \frac{(6-t)^2}{2}, t \in [5,6)$

Exemplos de Funções de Base

http://i33www.ira.uka.de/applets/mocca/html/noplugin/BSplineBasis/AppBSplineBasis/index.html

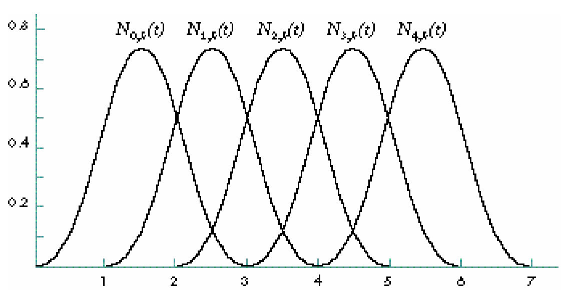
Influência Local de Pontos de Controle



P_0	P_1	P_2
P_1	P_2	P_3
P_2	P_3	P_4

Multiplicidade de Pontos

Interpolação da Curva: multiplicidade = n+1



$P_1=P_2=P_3$

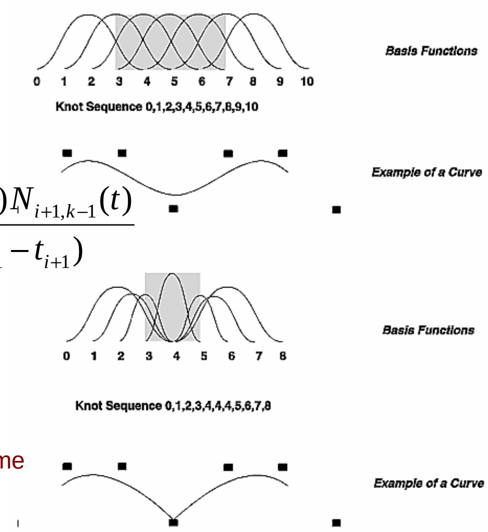
IA725 – 1s2011
Profa. Ting

Influência de Vetor de Nós

Spline de base uniforme

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - t_i)N_{i,k-1}(t)}{(t_{i+k} - t_i)} + \frac{(t_{i+k+1} - t)N_{i+1,k-1}(t)}{(t_{i+k+1} - t_{i+1})}$$

0/0=0



Spline de base não-uniforme

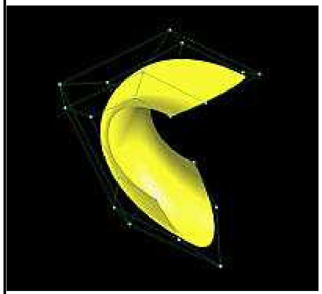
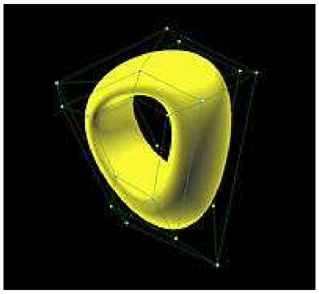
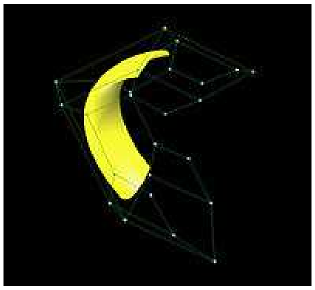
Propriedades de *Splines* de Base

•É polinomial. O grau do polinômio não depende da quantidade de pontos de controle.
•Acompanha a forma do polígono de controle. Está no fecho convexo dos pontos de controle de cada segmento de curva.
•Influência local de cada ponto de controle.
•A curva não oscila mais que o polígono de controle.
•São invariantes sob transformações afins.
•Multiplicidade m de um ponto "puxa" a curva para ele. Para m=k, curva interpola o ponto. Diferenciabilidade C^{n-1}.
•Multiplicidade m de nós altera a diferenciabilidade C^{k-m}.

Exemplos

http://i33www.ira.uka.de/applets/mocca/html/noplugin/IntBSpline/AppSubdivision/index.html

Representação de Superfícies
Superfícies de Base

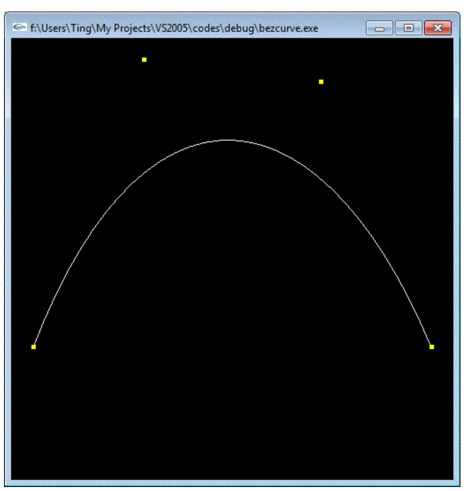




Interface do OpenGL – Curvas de Bézier

```
void init(void)
{
   glClearColor(0.0, 0.0, 0.0, 0.0);
   glShadeModel(GL_FLAT);
   glMap1f(GL_MAP1_VERTEX_3,
     0.0, 1.0, 3, 4, &ctrlpoints[0][0]);
   glEnable(GL_MAP1_VERTEX_3);
   glMapGrid1f(20,0.0,1.0);
}
```

```
void display(void)
{
   int i;

   glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT);
   glColor3f(1.0, 1.0, 1.0);
   glBegin(GL_LINE_STRIP);
      for (i = 0; i <= 30; i++)
         glEvalCoord1f((GLfloat) i/30.0);
   glEnd();
   /* The following code displays the control
      points as dots. */
   glPointSize(5.0);
   glColor3f(1.0, 1.0, 0.0);
   glBegin(GL_POINTS);
      for (i = 0; i < 4; i++)
         glVertex3fv(&ctrlpoints[i][0]);
   glEnd();
   glFlush();
}
```


Exemplo




```
GLfloat ctrlpoints[4][3] = {
        { -4.5, -4.0, 0.0},
         { -2.0, 4.5, 0.0},
        {2.0, 4.0, 0.0},
        {4.5, -2.0, 0.0}};
```

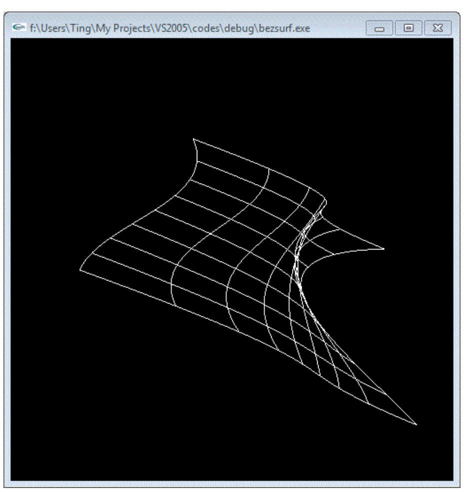
Código-fonte: http://www.opengl.org/resources/code/samples/redbook/bezcurve.c

Interface do OpenGL – Superfícies de Bézier

```
void init(void)
{
  glClearColor (0.0, 0.0, 0.0, 0.0);
     glMap2f(GL_MAP2_VERTEX_3, 0, 1,
     3, 4,         0, 1, 12, 4,
     &ctrlpoints[0][0][0]);
     glEnable(GL_MAP2_VERTEX_3);
     glMapGrid2f(20, 0.0, 1.0, 20, 0.0, 1.0);
     glEnable(GL_DEPTH_TEST);
     glShadeModel(GL_FLAT);
}
```

```
void display(void)
{
   int i, j;

   glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT |
      GL_DEPTH_BUFFER_BIT);
   glColor3f(1.0, 1.0, 1.0);
   glPushMatrix ();
   glRotatef(85.0, 1.0, 1.0, 1.0);
   for (j = 0; j <= 8; j++) {
      glBegin(GL_LINE_STRIP);
      for (i = 0; i <= 30; i++)
         glEvalCoord2f((GLfloat)i/30.0,
(GLfloat)j/8.0);
       glEnd();
      glBegin(GL_LINE_STRIP);
      for (i = 0; i <= 30; i++)
         glEvalCoord2f((GLfloat)j/8.0,
       (GLfloat)i/30.0);
      glEnd();
   }
   glPopMatrix ();
   glFlush();
}
```


Exemplo




```
GLfloat ctrlpoints[4][4][3] = {
   { {-1.5, -1.5, 4.0},
     {-0.5, -1.5, 2.0},
     {0.5, -1.5, -1.0},
     {1.5, -1.5, 2.0}},
   { {-1.5, -0.5, 1.0},
     {-0.5, -0.5, 3.0},
     {0.5, -0.5, 0.0},
     {1.5, -0.5, -1.0}},
   { {-1.5, 0.5, 4.0},
     {-0.5, 0.5, 0.0},
     {0.5, 0.5, 3.0},
     {1.5, 0.5, 4.0}},
   { {-1.5, 1.5, -2.0},
     {-0.5, 1.5, -2.0},
     {0.5, 1.5, 0.0},
     {1.5, 1.5, -1.0}}
};
```

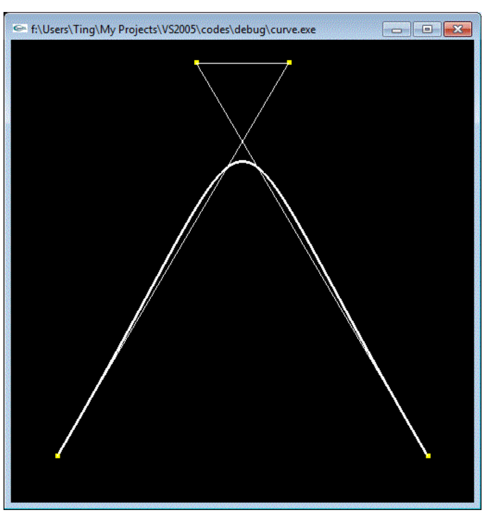
Código-fonte: http://www.opengl.org/resources/code/samples/redbook/bezsurf.c

Interface do OpenGL – Curvas B-*Splines*

```
void init(void)
{

   glClearColor (0.0, 0.0, 0.0, 0.0);

   theNurb = gluNewNurbsRenderer();

gluNurbsProperty(theNurb,GLU_SAMPLING
   _METHOD, GLU_PATH_LENGTH);
   gluNurbsProperty(theNurb,
   GLU_PARAMETRIC_TOLERANCE, 0.1);
   gluNurbsCallback(theNurb, GLU_ERROR,
      nurbsError);
}

void CALLBACK nurbsError(GLenum errorCode)
{
   const GLubyte *estring;

   estring = gluErrorString(errorCode);
   fprintf (stderr, "Nurbs Error: %s\n", estring);
   exit (0);
}
```

```
void display(void)
{
   int i, j;

   glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT
      GL_DEPTH_BUFFER_BIT);

   glLineWidth(3.0);
   glColor3f(1.0, 1.0, 1.0);
   gluBeginCurve(theNurb);
   gluNurbsCurve(theNurb,
            8, knots,
            3, &ctlpoints[0][0],
            4, GL_MAP1_VERTEX_3);
   gluEndCurve(theNurb);

   if (showPoints) {
      draw_control_polygon();
   }

   glFlush();
}
```


Exemplo




```
GLfloat ctlpoints[4][3] = {
         { -4.0, -4.0, 0.0}, { 1.0, 4.5, 0.0},
         {-1.0, 4.5, 0.0}, {4.0, -4.0, 0.0}};

GLfloat knots[8] = {0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0,
1.0, 1.0, 1.0};
```

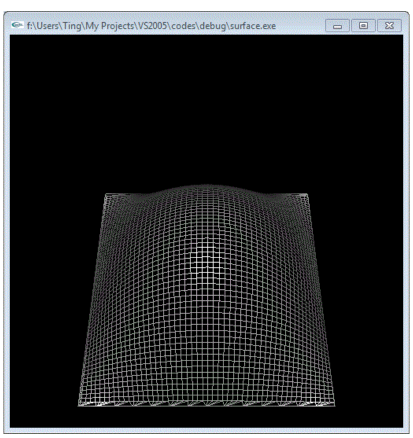
Código-fonte: http://www.dca.fee.unicamp.br/courses/IA725/1s2006/program/samples.html

Interface do OpenGL – Superfícies B-*Splines*

```
GLUnurbsObj *theNurb;
void init(void)
{
   GLfloat mat_diffuse[] = { 0.7, 0.7, 0.7, 1.0 };
   GLfloat mat_specular[] = { 1.0, 1.0, 1.0, 1.0 };
   GLfloat mat_shininess[] = { 100.0 };

   glClearColor (0.0, 0.0, 0.0, 0.0);
   glMaterialfv(GL_FRONT, GL_DIFFUSE, mat_diffuse);
   glMaterialfv(GL_FRONT, GL_SPECULAR,
      mat_specular);
   glMaterialfv(GL_FRONT, GL_SHININESS,
      mat_shininess);
   glEnable(GL_LIGHTING);
   glEnable(GL_LIGHT0);
   glEnable(GL_DEPTH_TEST);
   glEnable(GL_AUTO_NORMAL);
   glEnable(GL_NORMALIZE);

   init_surface();

   theNurb = gluNewNurbsRenderer();
gluNurbsProperty(theNurb,GLU_SAMPLING_TOLERANC
      E, 25.0);
   gluNurbsProperty(theNurb, GLU_DISPLAY_MODE,
      GLU_OUTLINE_POLYGON);
   gluNurbsCallback(theNurb, GLU_ERROR,
      nurbsError);
}
```

```
void display(void)
{
   int i, j;

   glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT |
      GL_DEPTH_BUFFER_BIT);
   glPushMatrix();
   glRotatef(330.0, 1.,0.,0.);
   glScalef (0.5, 0.5, 0.5);

   gluBeginSurface(theNurb);
   gluNurbsSurface(theNurb,
            8, knots, 8, knots,
            4 * 3, 3, &ctlpoints[0][0][0],
            4, 4, GL_MAP2_VERTEX_3);
   gluEndSurface(theNurb);

   glPopMatrix();
   glFlush();
}

void CALLBACK nurbsError(GLenum errorCode)
{
   const GLubyte *estring;

   estring = gluErrorString(errorCode);
   fprintf (stderr, "Nurbs Error: %s\n", estring);
   exit (0);
}
```


Exemplo




```
GLfloat knots[8] = {0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0};
/*
 *  Initializes the control points of the surface to a
small hill.
 *  The control points range from -3 to +3 in x, y, and
z
 */
void init_surface(void)
{
   int u, v;
   for (u = 0; u < 4; u++) {
      for (v = 0; v < 4; v++) {
         ctlpoints[u][v][0] = 2.0*((GLfloat)u - 1.5);
         ctlpoints[u][v][1] = 2.0*((GLfloat)v - 1.5);

         if ( (u == 1 || u == 2) && (v == 1 || v == 2))
            ctlpoints[u][v][2] = 3.0;
         else
            ctlpoints[u][v][2] = -3.0;
      }
   }
}
```

Código-fonte: http://www.opengl.org/resources/code/samples/redbook/surface.c