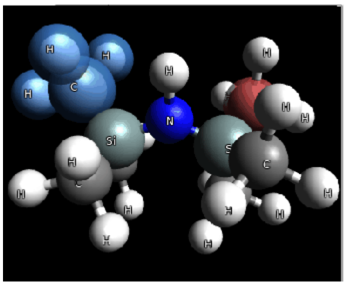
IA725 – Computação Gráfica I

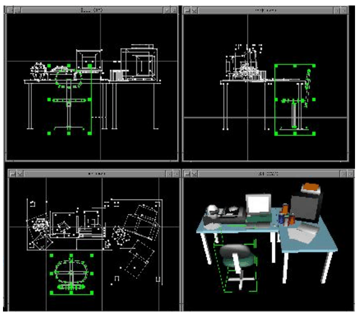
Transformações Geométricas

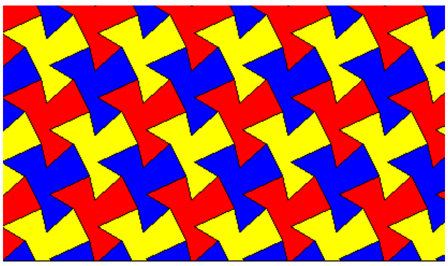
Shirley: Capítulos 5 e 6
Redbook: Capítulo 3

Transformações Geométricas

- Modificação das coordenadas dos pontos de um modelo geométrico







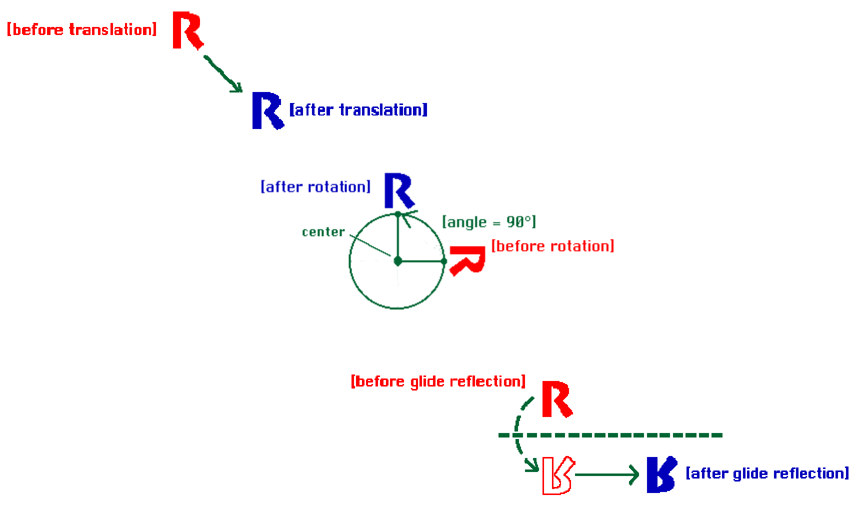
Objetivos

UNICAMP

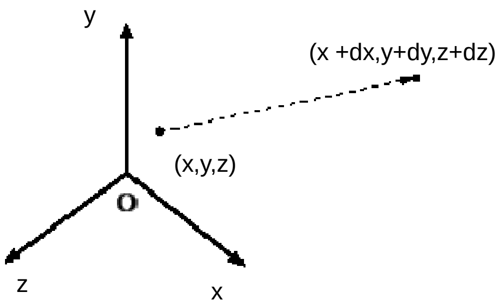
- Técnicas para reposicionar os pontos dos modelos no espaço
- Modelos computacionais
- Aplicações

Transformações Básicas

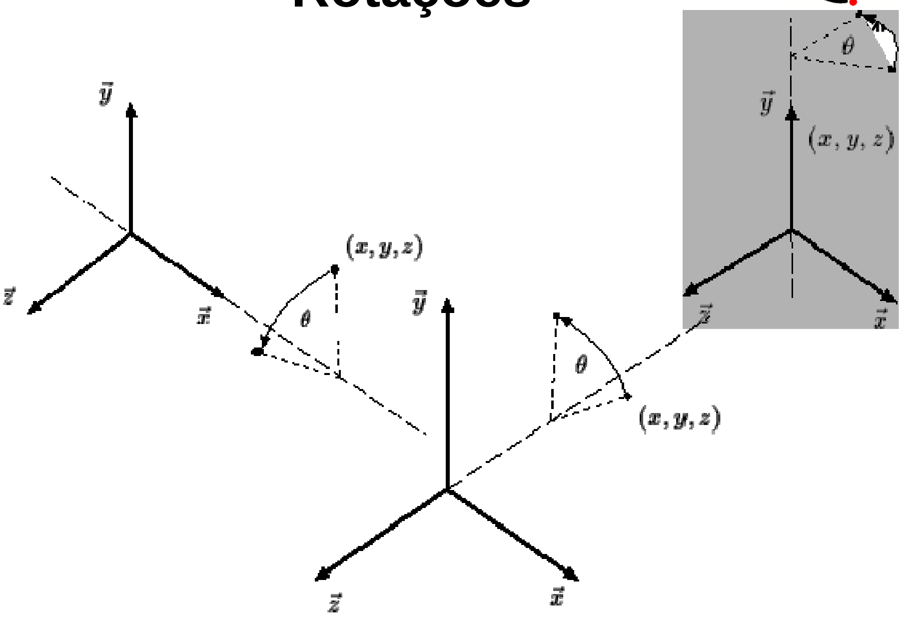
UNICAMP



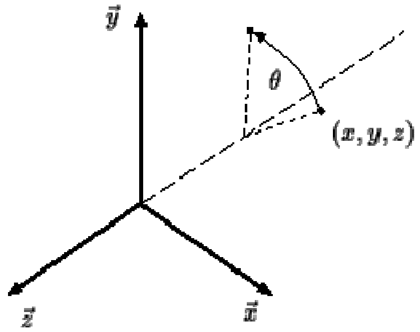
Translações

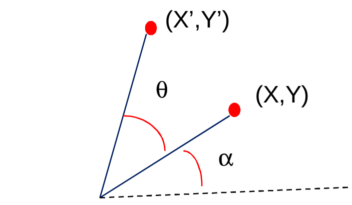


Rotações



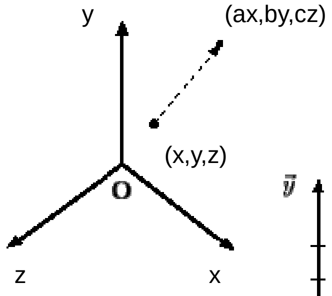
Rotações

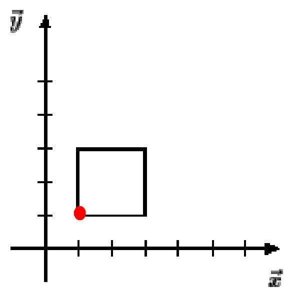


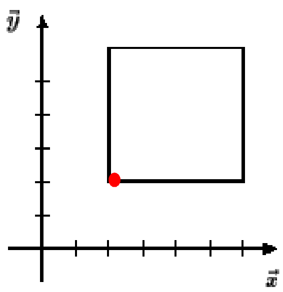


X' = R cos (α+θ) = R cos α cos θ - R sen α sen θ
= X cos θ - Y sen θ
Y' = R sen (α+θ) = R cos α sen θ + R sen α cos θ
= X sen θ + Y cos θ

Ampliação ou Redução

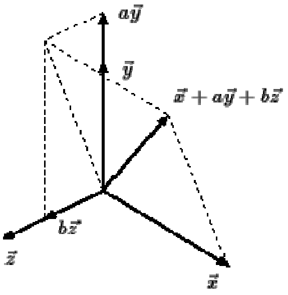




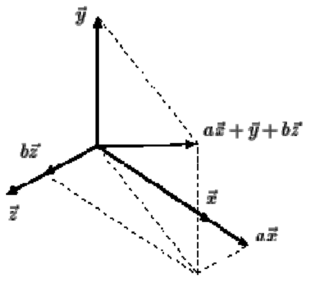


Como se pode evitar deslocamentos?

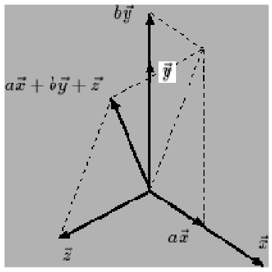
Shearing



x em relação a y e z

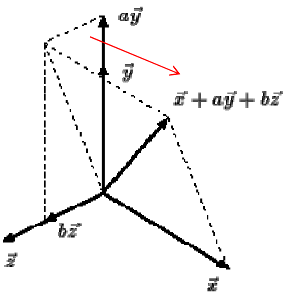


y em relação a x e z

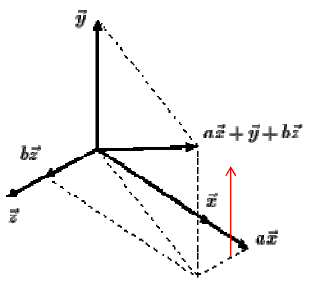


z em relação a x e y

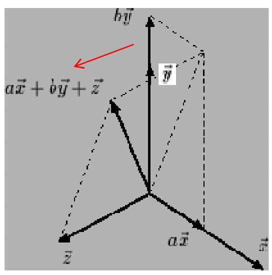
Shearing



x em relação a y e z



y em relação a x e z



z em relação a x e y

Representação Matricial

Transformação Linear

Funções lineares satisfazem:
1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$
2. $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Transformações lineares

$T(\alpha P) = \alpha T(P)$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}$$

Translações

$T(\alpha P) \neq \alpha T(P)$

Representação Matricial

Transformação Linear em 3D Translação

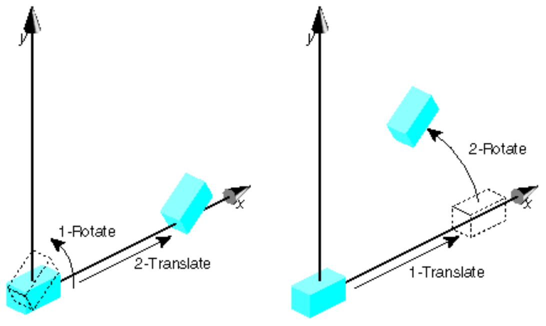
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas = pontos R^n representados por (n+1) escalares

Propriedades de Matrizes

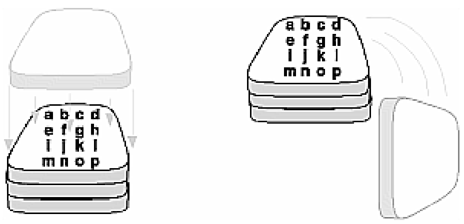
- Multiplicação:
  - Nem sempre vale a comutatividade
  - Associatividade ((AB)C = A(BC))
  - Nem sempre vale o cancelamento (AC=BC não implica em A=B)
- Transposta: as linhas se transformam em colunas
  - $(A^t)^t = A$
  - $(A+B)^t = A^t + B^t$
  - $(AB)^t = B^tA^t$
- Matrizes com propriedades especiais
  - Matriz identidade I: IA= A
  - Matriz inversa: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
  - Matriz ortonormal: $A^{-1} = A^t$

Concatenação



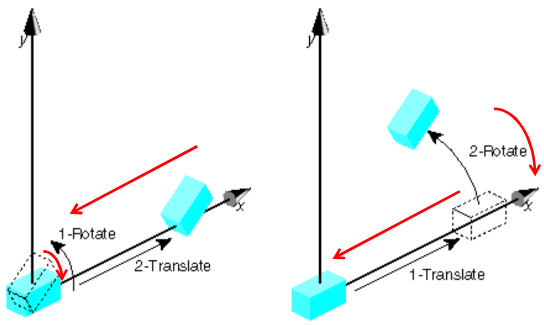
P' = T.(R.P) = (T.R).P   P' = R.(T.P) = (R.T).P

Pilha de Matrizes



$$\begin{bmatrix} a_0 & a_4 & a_8 & a_{12} \\ a_1 & a_5 & a_9 & a_{13} \\ a_2 & a_6 & a_{10} & a_{14} \\ a_3 & a_7 & a_{11} & a_{15} \end{bmatrix}$$

Inversão de Matrizes

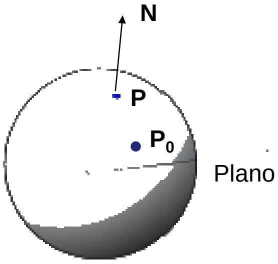


P’ = T.(R.P) = (T.R).P
$(T.R)^{-1}$ P’ = P
R^{-1} T^{-1} P’ = P

P’ = R.(T.P) = (R.T).P
$(R.T)^{-1}$ P’ = P
T^{-1} R^{-1} P’ = P

Vetores Normais

Em superfície suave, pode-se definir localmente um plano tangente a cada ponto. O vetor normal deste plano coincide com o vetor normal da superfície neste ponto **P**.



Antes da transformação T:

$N(P_0-P) = 0$

Após a transformação T:

$N'(TP_0-TP) = 0$

$N(P_0-P) = N'T(P_0-P)$

$N = N'T$

$NT^{-1} = N'$

Se for deslocamento d:

$N'(P_0+d - (P+d)) = N(P_0-P) = 0$

$N' = N$

N e N' em vetor-linha!

Funções Geométricas

Equação de um segmento

$P(t) = (1-t)P_1 + t\,P_2$

Transformação linear:

$(1-t)\,T_LP_1 + tT_LP_2 = T_L[(1-t)P_1 + tP_2] = T_LP(t)$

Translação:

$(1-t)\,(P_1+d) + t(P_2+d) = (1-t)P_1 + tP_2 + (1+t-t)d = P(t)+d$

Equação de uma curva de Bézier

$P(t) = \Sigma\, B_{n,i}(t)\, P_i$

Transformação linear:

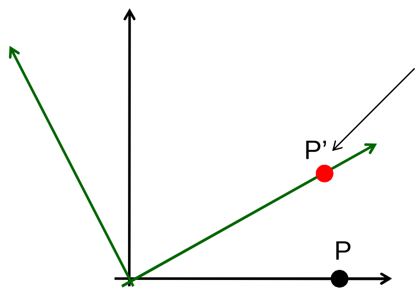
$\Sigma\, B_{n,i}(t)\, (T_L\, P_i) = T_L(\Sigma\, B_{n,i}(t)\, P_i) = T_LP(t)$

Translação:

$\Sigma\, B_{n,i}(t)\, (P_i + d) = \Sigma\, B_{n,i}(t)\, P_i + \Sigma\, B_{n,i}(t)\, d = P(t) + d$

Para algumas funções, podemos, ao invés de aplicarmos as transformações sobre a função, aplicá-las sobre os pontos de controle!

Transformação de Sistema de Referência



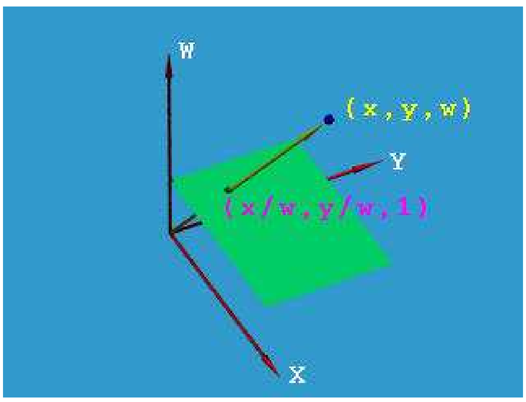
Em relação ao sistema de referência
Verde: P'=IP, onde I é a matriz-identidade
Preto: P'=(TI) P, onde T é a matriz de transformação do referencial preto para verde

P' = (T.I). P = T. (I.P) = TP

Ao invés de pensarmos em transformações dos modelos em um mesmo espaço, podemos pensar em transformações dos espaços para os quais o modelo tem a mesma representação!

Transformações Geométrica

Coordenadas Homogêneas



Transformações Geométricas
Plano Projetivo