



# IA725 – Computação Gráfica I

## Modelos Geométricos

Shirley: Capítulo 2 e 13

Redbook: Capítulo 2



## Objetivos

- Técnicas para representar a forma de um objeto
- Propriedades de algumas técnicas mais conhecidas.
- Aplicações



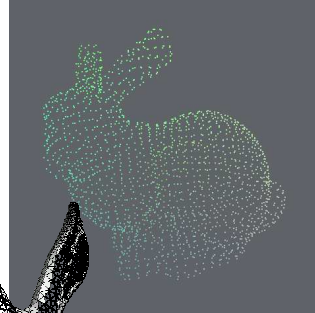
## Modelos Geométricos



Descrições da forma de um objeto  
com uso de ferramentas da  
Geometria

### Sub-problemas

1. Lugar geométrico dos pontos:  
**Geometria**
2. Conectividade entre os pontos:  
**Topologia**



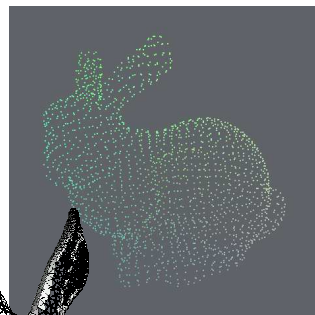
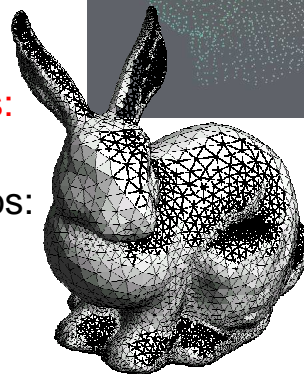
## Modelos Geométricos



Descrições da forma de um objeto  
com uso de ferramentas da  
Geometria

### Sub-problemas

1. Lugar geométrico dos pontos:  
**Geometria**
2. Conectividade entre os pontos:  
**Topologia**





## Lugar Geométrico

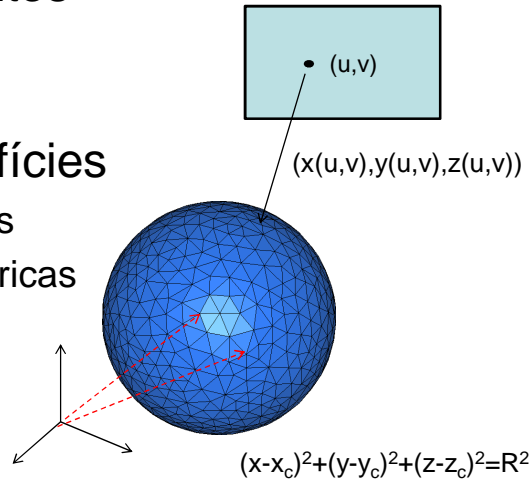


### ➤ Amostra de Pontos

- Pontos
- Vetores

### ➤ Curvas e Superfícies

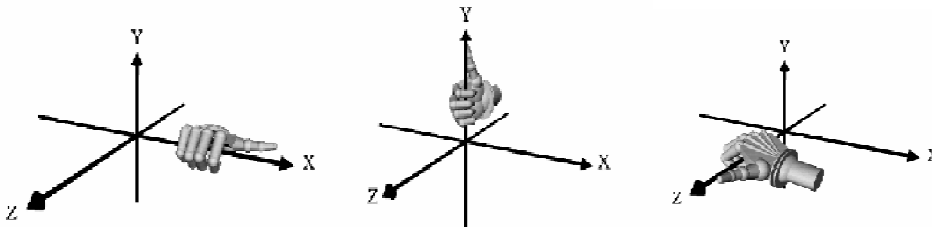
- Funções Implícitas
- Funções Paramétricas





## Representação de Pontos

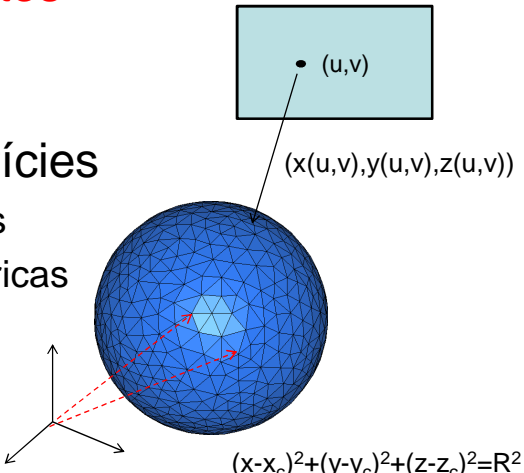


### Sistema de Referência Regra de mão-direita





 **Lugar Geométrico** 

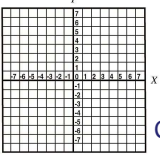
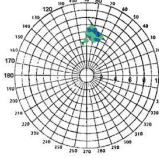
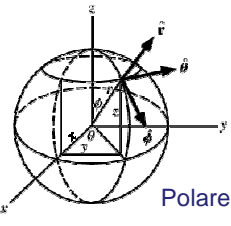
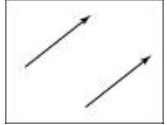

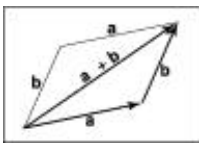
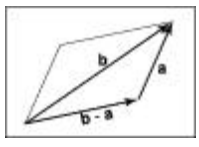
- **Amostra de Pontos**
  - Pontos
  - Vetores
- **Curvas e Superfícies**
  - Funções Implícitas
  - Funções Paramétricas



$(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2 = R^2$

 **Representação de Pontos** 

**Pontos e Vetores**

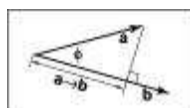
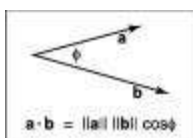
- **Pontos: posições no espaço**
  -  **Cartesianas**
  -  **Polares**
  - 
- **Vetores: grandezas providas de magnitude e direção**
  - 
  -  **inverso**
  -  **Soma de Vetores**
  -  **Subtração de Vetores**



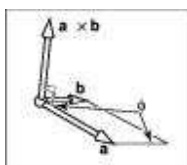
## Operações sobre Vetores



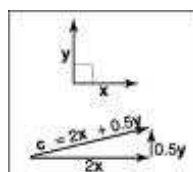
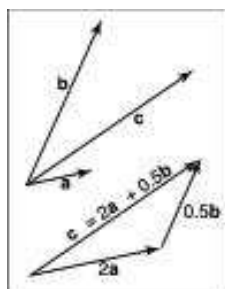
### ➤ Produto Escalar



### ➤ Produto Vetorial



## Espaço de Vetores



Base canônica:  
vetores ortonormais

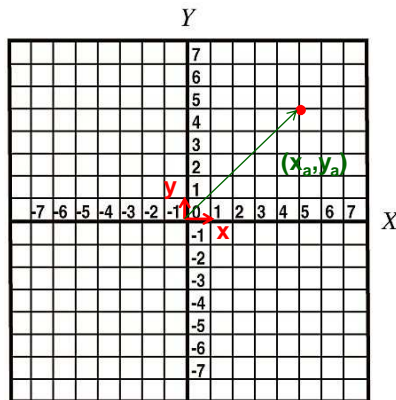
Uma **base de vetores** gera todos os vetores do espaço através de uma **combinação linear**



## Representação de Pontos Coordenadas Afins



Vetor-posição como combinação linear de vetores linearmente independentes



$$\mathbf{a} = x_a \mathbf{x} + y_a \mathbf{y}$$

$x_a, y_a$ : coordenadas afins

$$|\mathbf{a}| = \text{raiz}(x_a^2 + y_a^2)$$

Representação:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x_a & y_a \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \end{bmatrix}$$

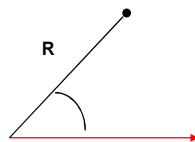


## Representação de Pontos

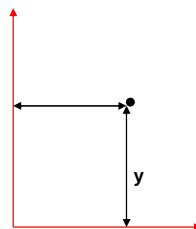


$n$  valores escalares no espaço  $R^n$

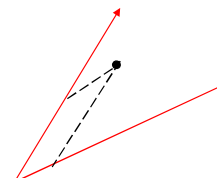
- Coordenadas cartesianas
- Coordenadas polares
- Coordenadas cilíndricas
- Coordenadas esféricas
- Coordenadas afins



Polares



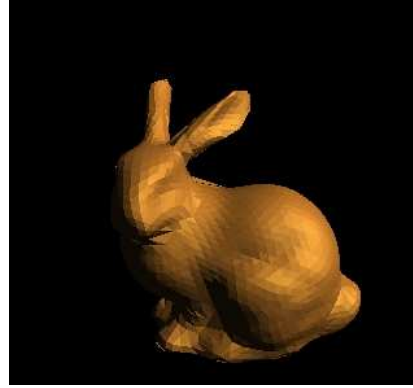
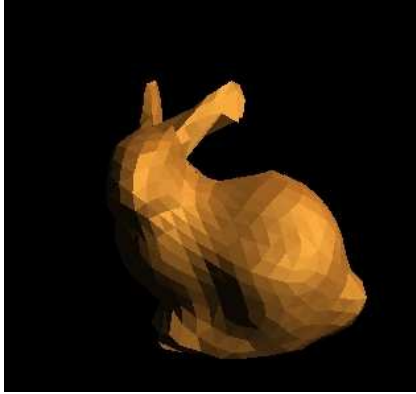
Cartesianas



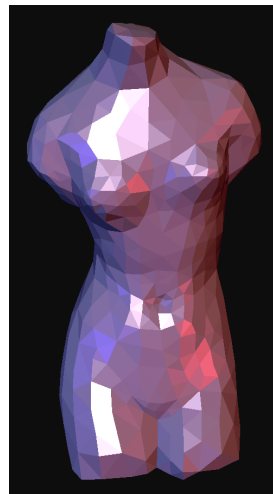
Afins



# Malhas Triangulares

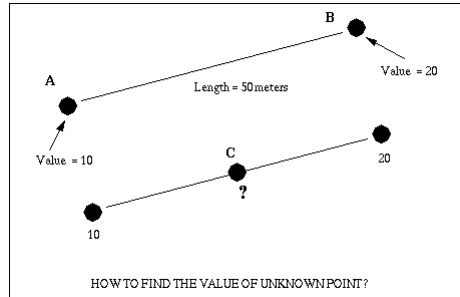


# Malhas Triangulares





## Interpolação Linear



$$\text{Valor}_C = \text{Valor}_A + (25/50) (\text{Valor}_B - \text{Valor}_A)$$



Proporção dos segmentos

independe da referência e das grandezas



## Interpolação Linear Segmentos



$$p(t) = p_0 + t(p_1 - p_0)$$

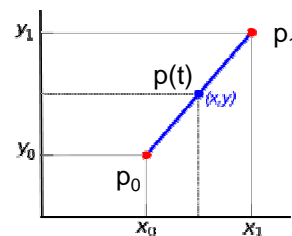


Proporção dos segmentos

$$p(t) = (1-t) p_0 + t p_1$$



Coordenadas baricêntricas  
Combinação convexa de  $p_0$  e  $p_1$





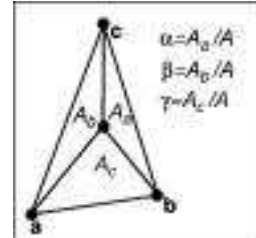


## Interpolação Linear Triângulos



$$p(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

Proporção de áreas



Coordenadas baricêntricas  
Combinação convexa de a, b, c

$$p(\alpha, \beta, \gamma), a, b, c \longrightarrow \alpha, \beta, \gamma ?$$



## Interpolação Linear Triângulos

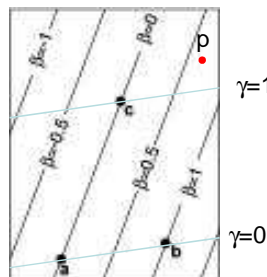


$$p(\alpha, \beta, \gamma), a, b, c \longrightarrow \alpha, \beta, \gamma ?$$

$$p(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

$$p = (1 - \beta - \gamma) a + \beta b + \gamma c$$

$$(p - a) = \beta(b - a) + \gamma(c - a)$$





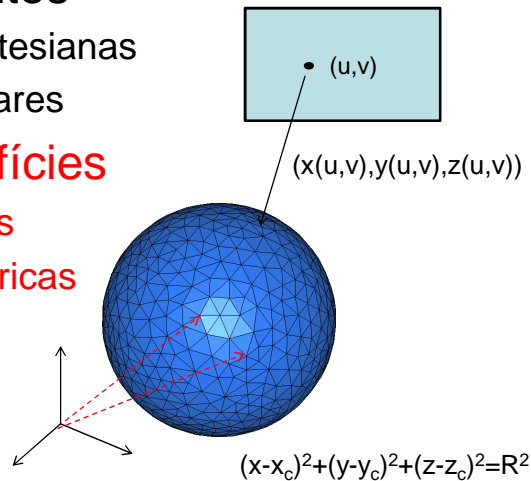
## Lugar Geométrico



- Amostra de Pontos
  - Coordenadas Cartesianas
  - Coordenadas Polares

### ➤ Curvas e Superfícies

- Funções Implícitas
- Funções Paramétricas



## Representação Analítica

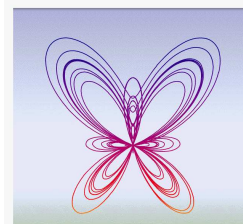
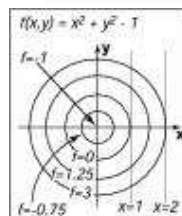
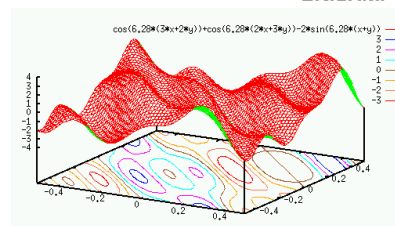


- Funções Explícitas:
 

Uma das coordenadas é explicitamente dada em função das outras.
- Funções Implícitas:
 

As coordenadas são relacionadas por uma função.
- Funções Paramétricas:
 

As coordenadas são dadas em termos de um conjunto de parâmetros.



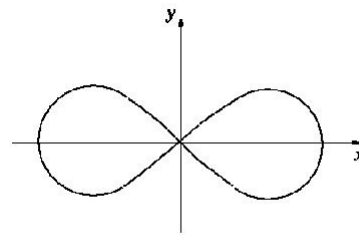
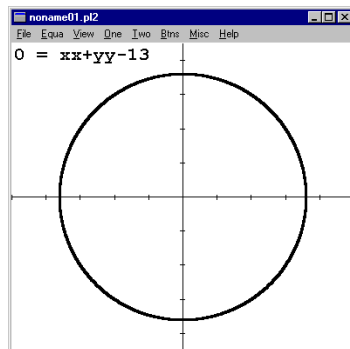


## Representação Analítica Função Explícita



$$y = f(x) \text{ ou } z = f(x,y)$$

Não permite representar correspondências  
sobrejetivas!



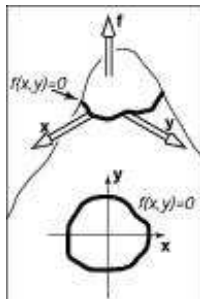
Lemniscate:  $(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2) = 0$



## Representação de Curvas Curvas Implícitas



$$f(x,y)=0 \text{ ou } f(x,y,z)=0$$



Exemplo:  $x^2+y^2=R^2$

$$f(x,y) = x^2+y^2-R^2 = 0$$

Para um dado R:

- (x,y) sobre a curva  
 $x^2+y^2 - R^2 = 0$
- (x,y) dentro da curva  
 $x^2+y^2 - R^2 < 0$
- (x,y) fora da curva  
 $x^2+y^2 - R^2 > 0$

Função de classificação de pertinência

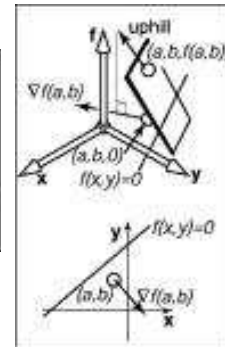
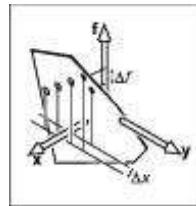
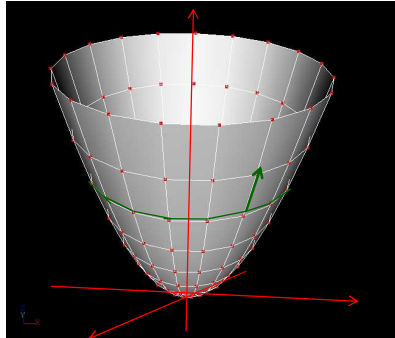


## Representação de Curvas Curvas Implícitas



Gradiente: taxa de variação da função

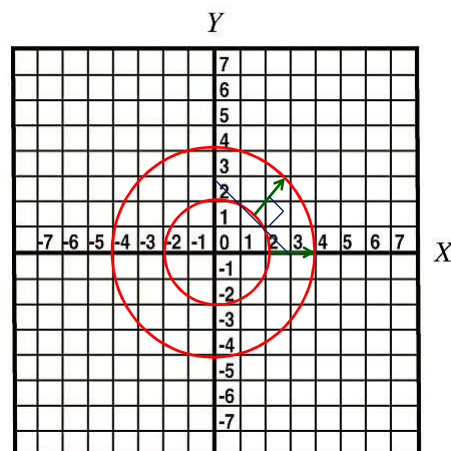
Ex:  $f(x,y) = x^2 + y^2 - R^2$   
( $x, y, x^2 + y^2$ )



## Representação de Curvas Curvas Implícitas



Gradiente = Vetor Normal





## Representação de Curvas Curvas Implícitas



Retas

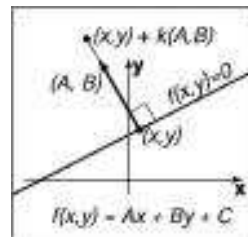
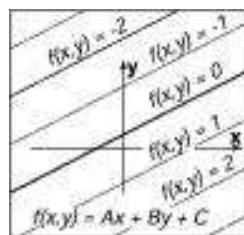
Curvas Quadráticas



## Representação de Curvas Retas implícitas



$$f(x,y) = Ax + By + C$$



Qual distância de  $(a,b)$  em relação a  $f(x,y)$ ?

$$A = y_1 - y_0 \quad B = x_1 - x_0$$

$$\text{distância}(\text{ponto}, f(x,y)) = k \text{ raiz}(A^2 + B^2)$$

$$f(x+kA, y+kB) = f(x,y) + k(A^2 + B^2)$$

Se  $f(x,y) = 0$ , então  $f(x+kA, y+kB) = k(A^2 + B^2)$



## Representação de Curvas Curvas Quadráticas



$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$P^t \quad \quad Q \quad \quad P = 0$

$ac - b^2/4$	$\det(Q)$	Tipo
-	0	retas
0	Diferente de 0	parábola
> 0	Diferente de 0	elipse
< 0	Diferente de 0	hipérbole

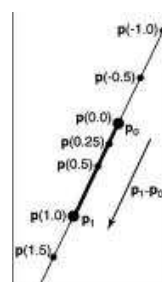


## Representação de Curvas Curvas Paramétricas



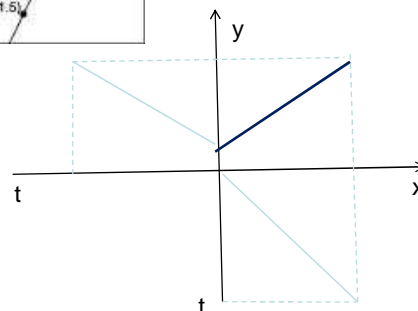
### ➤ Segmentos

$$p(t) = p_0 + t(p_1 - p_0)$$



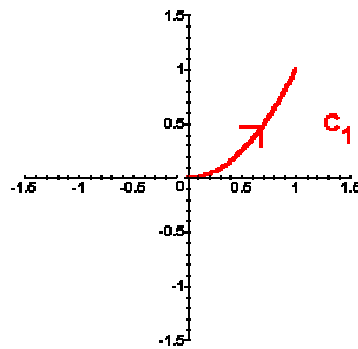
### ➤ Curvas

$$p(t) = (x(t), y(t))$$





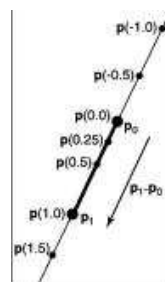
## Representação de Curvas Curvas Paramétricas



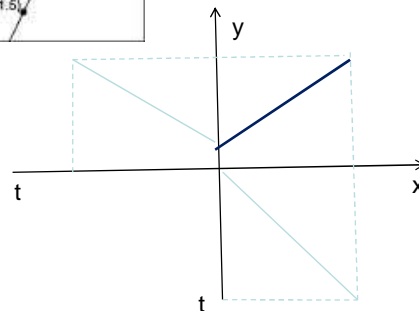
## Representação de Curvas Curvas Paramétricas



- Segmentos  
 $p(t) = p_0 + t(p_1 - p_0)$



- Curvas  
 $p(t) = (x(t), y(t))$



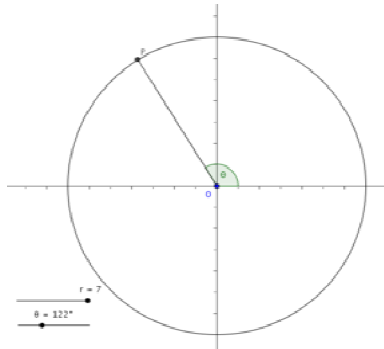


## Representação de Curvas Curvas Paramétricas



Circuferências

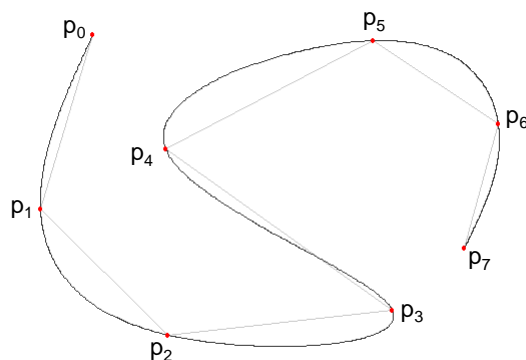
$$p(t) = (r \cos t, r \sin t)$$



## Representação de Curvas Curvas de Bézier



Bezier Curves Interpolation B-Spline Help



$$P(t) = \sum B_{n,i}(t) p_i \quad \text{onde } B_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Combinação convexa de  $p_i$



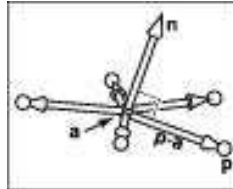


## Representação de Superfícies Superfícies Implícitas



$$f(x,y,z) = 0$$

- Vetor Normal  
 $\text{grad}(f)$
- Planos Implícitos  
 $(p-a) \cdot \mathbf{n} = 0$
- Cônicas: elipsóides,  
hiperbolóides e parabolóides



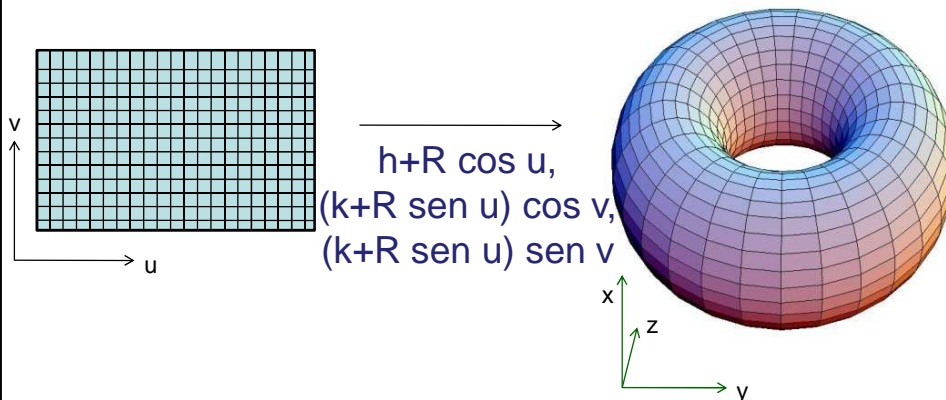
$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+fxz+gx+hy+jz+k=0$$



## Representação de Superfícies Superfícies Paramétricas

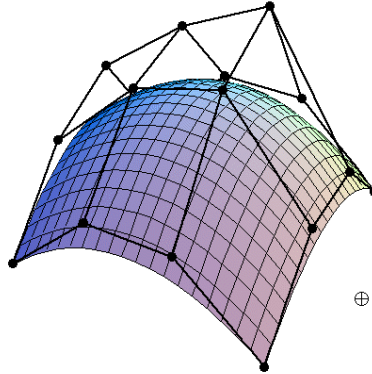


$$(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$





## Representação de Superfícies Superfícies de Bézier



$$P(u,v) = \sum B_{m,j}(v) \sum B_{n,i}(u) p_{ji} \text{ onde } B_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$



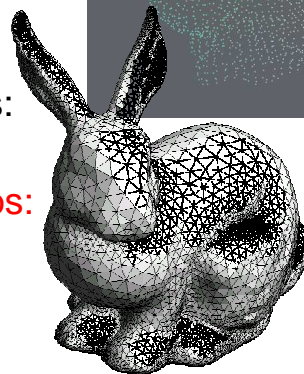
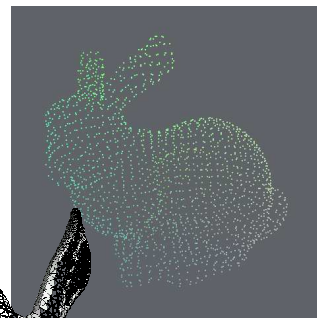
## Modelos Geométricos

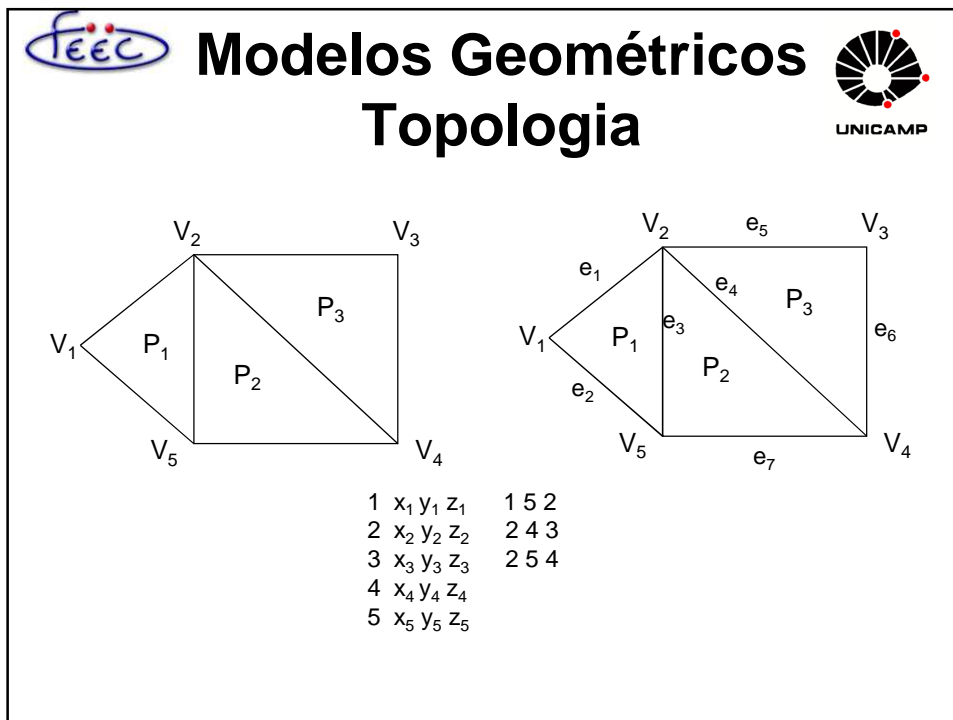
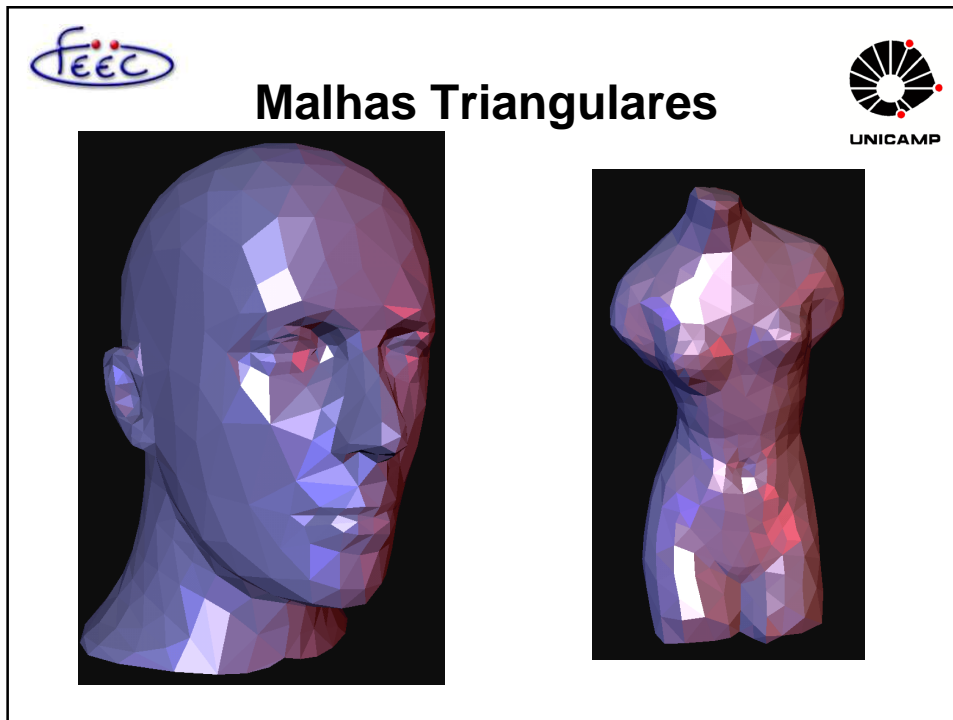


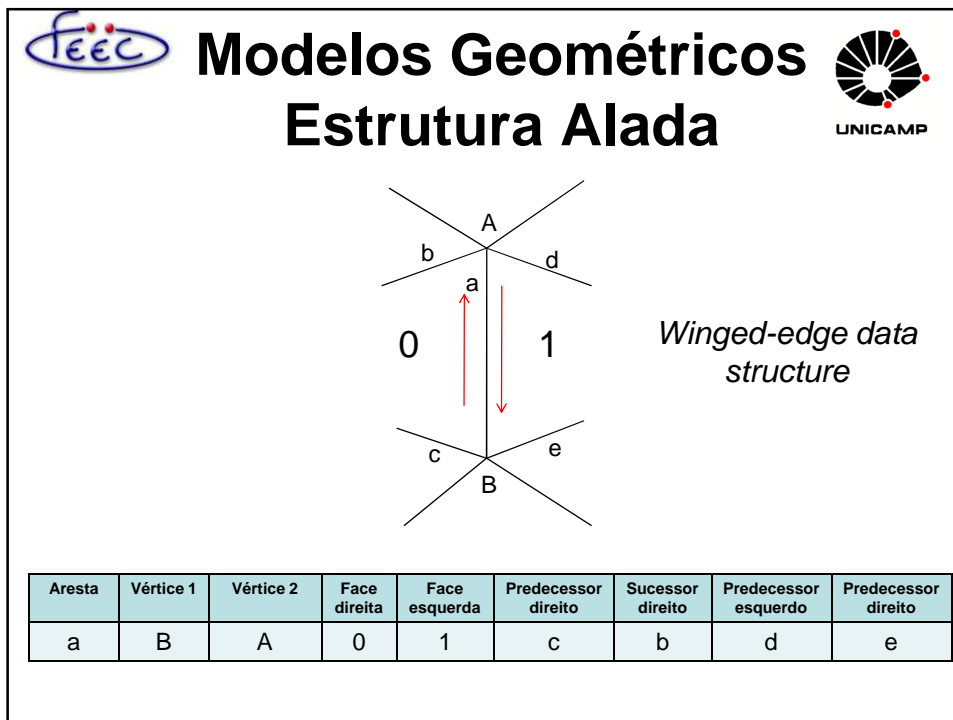
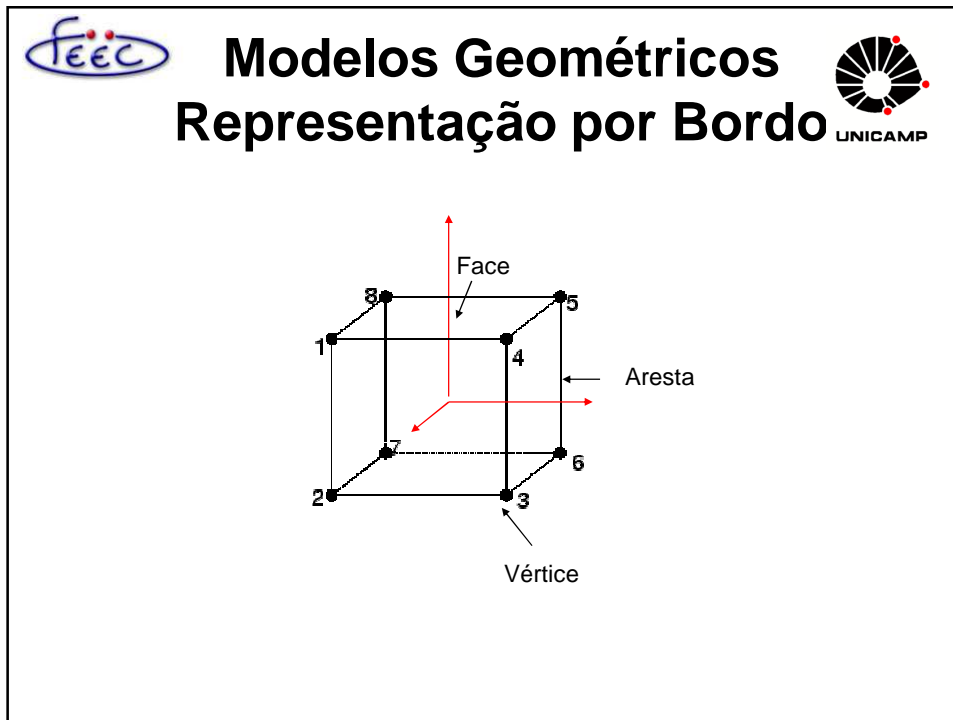
Descrições da forma de um objeto  
com uso de ferramentas da  
Geometria

### Sub-problemas

1. Lugar geométrico dos pontos:  
**Geometria**
2. **Conectividade entre os pontos:**  
**Topologia**

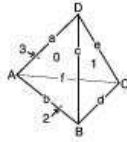








# Modelos Geométricos Estrutura Alada



edge	vertex 1	vertex 2	face left	face right	pred left	succ left	pred right	succ right
a	A	D	3	0	f	e	c	b
b	A	B	0	2	a	c	d	f
c	B	D	0	1	b	a	e	d
d	B	C	1	2	c	e	f	b
e	C	D	1	3	d	c	a	f
f	C	A	3	2	e	a	b	d

Face	Aresta
0	a
1	c
2	d
3	a

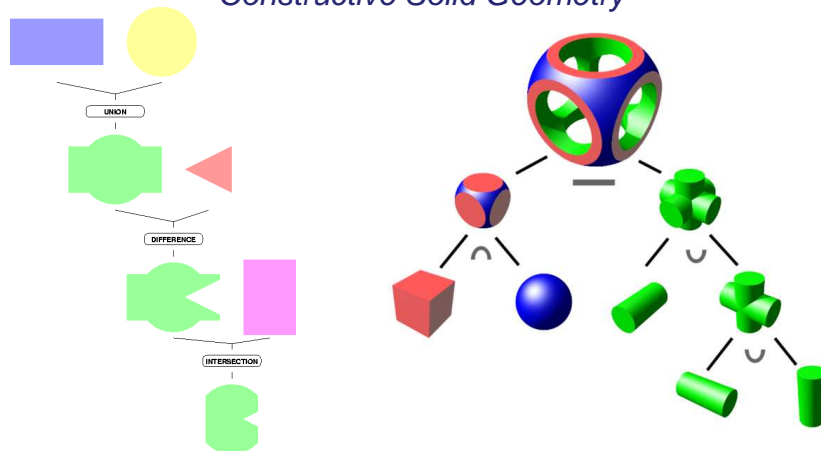
Vértice	Aresta
A	a
B	d
C	e
D	c



# Modelos Geométricos Árvore CSG



Constructive Solid Geometry



Operações Booleanas entre as primitivas

FEEC

# Modelos Geométricos

## Árvore CSG

UNICAMP

Operações?

FEEC

# Estrutura dos Dados

## Ocupação Espacial

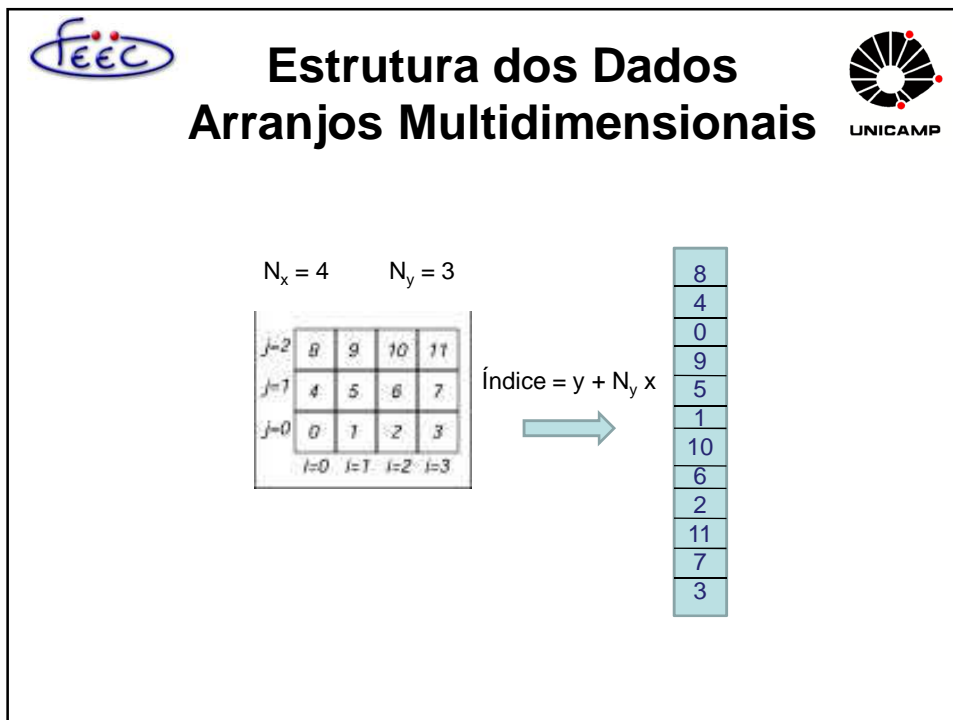
UNICAMP

Figure No. 1

File Edit View Insert Tools Window Help

Quadrilaterals

Voxels





# Estrutura dos Dados

## Arranjos Multidimensionais



### Ladrilhamento (*Tiling*)

$j=2$	8	9	12	13
$j=1$	2	3	6	7
$j=0$	0	1	4	5
	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$

