Capítulo 4

Transformações Geométricas

Entende-se como **transformação** uma aplicação f que faz corresponder um ponto P do domínio $\mathcal{R}^n$ a um ponto do contra-domínio $\mathcal{S}^n$:

$$f : P \in \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{S}^n \tag{4.1}$$

Em sistemas de informações gráficas, as transformações são muito utilizadas para mudar sistemas de referência ($\mathcal{R}^n \neq \mathcal{S}^n$) ou mudar a posição dos pontos num mesmo sistema de referência ($\mathcal{R}^n = \mathcal{S}^n$). A primeira classe de transformações é recomendada para tratar, por exemplo, um grupo de objetos, em que cada um é descrito em relação a um sistema de coordenadas próprio; enquanto a segunda é apropriada para manipular a posição relativa entre os objetos para compor uma cena mais complexa ou um objeto mais complexo.

Serão apresentadas as cinco transformações básicas – translação (*translation*), rotação (*rotation*), mudança de escala (*scaling*), espelhamento (*reflection*) e deslocamento relativo linear (*shearing*). Veremos que, exceto as translações, estas transformações são lineares; portanto, representáveis por matrizes. No entanto, as translações em R^n equivalem aos deslocamentos relativos lineares em R^{n+1} quando os pontos em R^{n+1} são considerados como homogêneos aos pontos no subespaço (hiperplano) $w = 1$ do espaço R^{n+1}. Assim, as cinco transformações sobre pontos em R^n podem ser representadas uniformemente por matrizes de dimensão $(n+1)\times(n+1)$. Na seção 4.2 serão apresentados alguns sistemas de referênica mais conhecidos em Computação Gráfica e algumas transformações entre eles.

4.1 Transformações Geométricas Básicas

Embora o foco seja transformações geométricas bi- e tridimensionais, apresentaremos, quando possível, formulações gerais para pontos de n-dimensões.

4.1.1 Translação

A **translação** de um ponto num espaço é o **deslocamento** $\vec{d} = [d_1\ d_2\ \cdots\ d_n]^t$ deste ponto de $P_v = [x_{1,v}\ x_{2,v}\ \cdots\ x_{n,v}]^t$ para $P_r = [x_{1,r}\ x_{2,r}\ \cdots\ x_{n,r}]^t$. Este deslocamento corresponde à adição de uma parcela d_i a cada coordenada $x_{i,v}$

$$\begin{aligned}
x_{1,r} &= x_{1,v} + d_1 \\
x_{2,r} &= x_{2,v} + d_2 \\
x_{3,r} &= x_{3,v} + d_3 \\
&\cdots \\
x_{n,r} &= x_{n,v} + d_n
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Usando notação matricial tem-se

$$\begin{bmatrix} x_{1,r} \\ x_{2,r} \\ \cdots \\ x_{n,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,v} \\ x_{2,v} \\ \cdots \\ x_{n,v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdots \\ d_n \end{bmatrix}.$$

(Ver Fig. 5.1 do livro-texto de Foley.)

Exercício 4.1 *Dado um segmento* $P(t) = (1-t)P_0 + tP_1$, $t \in [0,1]$. *Mostre que* $P(t) + \vec{d} = (1-t)(P_0 + \vec{d}) + t(P_1 + \vec{d})$. *Por que a igualdade é um resultado computacionalmente importante?*

4.1.2 Mudança de Escala

A **mudança de escala** de um objeto implica essencialmente em mudança do seu tamanho. Em termos de vetores, isso equivale a dizer mudar a magnitude dos pares de vetores definidos pelos pontos do objeto. Dados dois pontos a e b em $\Re^3$ de um objeto. Um vetor associado a eles é

$$\vec{ab} = a - b$$

cuja magnitude é

$$|\vec{ab}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

Mudar a escala do vetor por um fator γ corresponde a multiplicar $|\vec{ab}|$ por γ, isto é,

$$\gamma|\vec{ab}| = \gamma\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}.$$

Se $a = [0\ 0\ 0]^t$, teremos

$$\gamma|\vec{ab}| = \gamma\sqrt{(b_1)^2+(b_2)^2+(b_3)^2} = \sqrt{(\gamma b_1)^2+(\gamma b_2)^2+(\gamma b_3)^2}.$$

(Ver Fig. 5.2 do livro-texto de Foley.)

Em outras palavras, obteremos o efeito de mudança de escala através da multiplicação de cada coordenada x_i por um fator γ. Quando o fator de escala é igual em todas as direções principais, dizemos que a mudança é **uniforme**.

Generalizando, podemos substituir o escalar γ pelo vetor $[\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \cdots\ \gamma_n]^t$ para produzir efeitos de mudança de escala diferenciada nas n direções canônicas em $\Re^n$, ou seja, **mudança de escala não-uniforme**

$$\begin{aligned} x_{1,r} &= \gamma_1 x_{1,v} \\ x_{2,r} &= \gamma_2 x_{2,v} \\ x_{3,r} &= \gamma_3 x_{3,v} \\ &\cdots \\ x_{n,r} &= \gamma_n x_{n,v} \end{aligned}$$

Em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} x_{1,r} \\ x_{2,r} \\ \cdots \\ x_{n,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,v} \\ x_{2,v} \\ \cdots \\ x_{n,v} \end{bmatrix}.$$

(Ver Fig. 5.6 do livro-texto de Foley.)

Exercício 4.2 *Da forma como a transformação de mudança de escala é definida, é conveniente fixar um ponto do objeto de interesse na origem. Justifique.*

Exercício 4.3 *Dados os três vértices de um triângulo* $[0\ 0]^t$, $[1\ 1]^t$ *e* $[5\ 2]^t$. *Qual transformação a ser aplicada sobre os vértices do triângulo de forma que a área do triângulo seja dobrada e o ponto* $[5\ 2]^t$ *se mantenha fixo.*

4.1.3 Deslocamento Relativo Linear

Esta transformação, conhecida em inglês como *shearing* ou em português como **cisalhamento**, se caracteriza pela variação linear de uma coordenada em relação às outras, ou seja a nova coordenada transformada $x_{i,r}$ em $\Re^n$ pode ser expressa como:

$$x_{i,r} = x_{i,v} + \textstyle\sum_{j=1,j\neq i}^{n}(sh_{ij}x_{j,v}).$$

Usando notação matricial, isso equivale a:

$$\begin{bmatrix} x_{1,r} \\ x_{2,r} \\ \cdots \\ x_{n,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & sh_{12} & \cdots & sh_{1n} \\ sh_{21} & 1 & \cdots & sh_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ sh_{n1} & sh_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,v} \\ x_{2,v} \\ \cdots \\ x_{n,v} \end{bmatrix}.$$

(Ver Fig. 5.7 do livro-texto de Foley.)

Exercício 4.4 *Esboce o efeito de deslocamento relativo de um quadrado unitário* ($[0\ 0]^t$, $[1\ 0]^t$, $[1\ 1]^t$ *e* $[0\ 1]^t$)*: (a) na direção de x com $sh_{12} = 2$; (b) na direção de y com $sh_{21} = 4$; e (c) o mesmo montante $sh_{12} = sh_{21} = 3$ em ambas as direções.*

Observação 4.1 *Uma translação em R^n é um deslocamento relativo em R^{n+1} se observamos que*

$$\begin{bmatrix} x_{1,r} \\ x_{2,r} \\ \cdots \\ x_{n,r} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,v}+d_1 \\ x_{2,v}+d_2 \\ \cdots \\ x_{n,v}+d_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & d_2 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,v} \\ x_{2,v} \\ \cdots \\ x_{n,v} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4.1.4 Rotação

Rotações são transformações em que os pontos giram de um ângulo θ em torno de um dado ponto $\mathcal{O}$. Por convenção, atribuímos valores positivos a θ quando o sentido de giro for anti-horário e negativos quando for horário.

(Ver Fig. 5.3 do livro-texto de Foley.)

Se considerarmos que $\mathcal{O}$ seja a origem de um sistema de coordenadas de 2 dimensões; r, a distância entre $\mathcal{O}$ e o ponto (x, y) a ser girado; e que ϕ seja o ângulo entre a direção de (x, y) e o eixo x, então:

$$x = r\ cos\phi$$
$$y = r\ sen\phi.$$

Após a rotação de um ângulo θ, o ângulo entre a direção do "novo" ponto (x_r, y_r) e o eixo x passará para $\theta + \phi$. Assim

$$\begin{aligned}
x_r &= rcos(\theta+\phi)\\
&= rcos\phi cos\theta - rsen\phi sen\theta\\
&= x_v cos\theta - y_v sen\theta\\
y_r &= rsen(\theta+\phi)\\
&= rsen\phi cos\theta + rcos\phi sen\theta\\
&= y_v cos\theta + x_v sen\theta.
\end{aligned}$$

Em forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} x_r \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \end{bmatrix}.$$

(Ver Fig. 5.4 do livro-texto de Foley.)

Esta transformação equivale a girar um ponto em torno de um eixo z em $\Re^3$:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{bmatrix}.$$

Analogamente, pode-se derivar a matriz de rotação em torno do eixo x (segundo a regra da mão-direita em relação ao eixo de rotação):

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

e em torno do eixo y,

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sen\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix}.$$

Observação 4.2 *As matrizes de rotação são ortogonais, ou seja, a magnitude dos vetores é preservada nas transformações de rotação.*

Exercício 4.5 *Quais são as coordenadas de um quadrado ($[2\ 6]^t$, $[4\ 6]^t$, $[4\ 8]^t$ e $[2\ 8]^t$) após uma rotação de 30^o em torno do ponto $[5\ 7]^t$?*

Observação 4.3 *Uma rotação de θ em torno de um eixo qualquer pode ser descrita como uma sequência constituída por três rotações básicas e representada por um vetor (roll,pitch,yaw): em torno do eixo x,* **ângulo de rotação longitudinal** *(roll); em torno do eixo y,* **ângulo de declividade** *(pitch); e em torno do eixo z,* **ângulo de guinada** *(yaw). Ou então, na sequência z–y–x.*

Em Mecânica, os ângulos roll, pitch e yaw são conhecidos como **ângulos de Euler**.

4.1.5 Espelhamento

O **espelhamento** de um ponto P em relação a um hiperplano R^{n-1} no espaço R^n equivale a uma rotação de 180^0 de P em torno deste hiperplano passando pelo espaço R^{n+1} no qual R^n está imerso.

Num espaço de 2 dimensões define-se o espelhamento em relação a uma reta, enquanto num espaço de 3 dimensões fala-se em espelhamento em relação a um plano.

Exemplo 4.1 *A matriz de espelhamento em relação ao plano xy é:*

$$M_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

em relação ao plano yz:

$$M_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e em relação ao plano xz:

$$M_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 4.6 *Mostre que um espelhamento em relação a uma reta $y = x$ equivale a trocar as coordenadas, isto é, $M[x\ y]^t = [y\ x]^t$.*

4.1.6 Notação Matricial Única

Usando a notação matricial, translação, mudança de escala, deslocamento linear relativo, rotação e o espelhamento são dadas, respectivamente, por:

$$P_r = P_v + T \ , \tag{4.3}$$

$$P_r = SP_v \ , \tag{4.4}$$

$$P_r = ShP_v \ . \tag{4.5}$$

$$P_r = RP_v \ , \tag{4.6}$$

$$P_r = MP_v \ . \tag{4.7}$$

O fato da translação ser tratada de forma diferenciada (adição) em relação às outras (que são lineares) dificulta um pouco a composicão das transformações. Isso pode ser, entretanto, contornado com a adição de uma coordenada e com a extensão da matriz de transformação por mais uma coluna e uma linha, como destacamos em Observação 4.1. Com isso, a representação de um ponto assume o mesmo aspecto da sua representação em coordenadas homogêneas com a restrição de que o valor da coordenada adicional seja 1 (O espaço 3D (x, y, z) seria a projeção de um espaço 4D (x, y, z, w) no "hiperplano" $w = 1$).

Observação 4.4 *Uma transformação que satisfaz a seguinte relação*

$$\begin{aligned} x_r &= a_{0,0}x_v + a_{0,1}y_v + a_{0,2}z_v + a_{0,3} \\ y_r &= a_{1,0}x_v + a_{1,1}y_v + a_{1,2}z_v + a_{1,3} \\ z_r &= a_{2,0}x_v + a_{2,1}y_v + a_{2,2}z_v + a_{2,3} \end{aligned} \tag{4.8}$$

é uma transformação que preserva o paralelismo e a proporção entre os múltiplos dos vetores-base. Ela é conhecida como transformação **afim**.

Exemplo 4.2 *A translação de um ponto num espaço bidimensional pode ser expressa como o produto:*

$$\begin{bmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

e num espaço tridimensional,

$$\begin{bmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ z + d_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz estendida $M_{m+1,m+1}$ (em relação à matriz $m \times m$)

$$\begin{bmatrix} U_{m,m} & \vdots & U_{m,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{1,m} & \vdots & U_{1,1} \end{bmatrix}, \tag{4.9}$$

onde o bloco $U_{m,m}$ engloba as transformações lineares (espelhamento, mudança de escala, rotação e deslocamento relativo linear) e o bloco $U_{m,1}$ os deslocamentos, permite que a translação e as transformações lineares sejam tratadas de forma uniforme. Assim, a composição destas transformações básicas pode ser reduzida em multiplicações (**concatenações**) das matrizes correspondentes.

Observe ainda que a ação do bloco $U_{1,1}$ é equivalente à **mudança de escala uniforme** (Seção 4.1.2), que está relacionado com os múltiplos dos "pontos homogeneizados":

$$\begin{bmatrix} x_{1,r} \\ x_{2,r} \\ \cdots \\ x_{m,r} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,v} \\ x_{2,v} \\ \cdots \\ x_{m,v} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,v} \\ x_{2,v} \\ \cdots \\ x_{m,v} \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s}x_{1,v} \\ \frac{1}{s}x_{2,v} \\ \cdots \\ \frac{1}{s}x_{m,v} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 4.7 *Dada uma curva de Bézier $P(t) = \sum P_i B_i^n(t)$, $t \in [0, 1]$. Mostre que $TP(t) = \sum (TP_i) B_i^n(t)$, onde T é uma transformação afim qualquer. Esboce a rotação de uma curva de Bézier definida pelos pontos de controle* $P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *e* $P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Observação 4.5 *O Jacobiano de uma transformação afim dada pelas Eqs. 4.8 é*

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_r}{\partial x_v} & \frac{\partial x_r}{\partial y_v} & \frac{\partial x_r}{\partial z_v} \\ \frac{\partial y_r}{\partial x_v} & \frac{\partial y_r}{\partial y_v} & \frac{\partial y_r}{\partial z_v} \\ \frac{\partial z_r}{\partial x_v} & \frac{\partial z_r}{\partial y_v} & \frac{\partial z_r}{\partial z_v} \end{vmatrix}.$$

Se $J = 0$, a transformação não é inversível. Quando $J = 1$, a área é invariante sob a transformação.

Exercício 4.8 *Mostre que uma translação, uma rotação, uma mudança de escala ou um deslocamento linear relativo são inversíveis e que o deslocamento relativo não preserva a área.*

Exercício 4.9 *Obter a matriz de transformação de reflexão de um ponto em relação a um plano arbitrário definido por um ponto* $P = [x\ y\ z]^t$ *e um vetor normal* $\vec{n} = [n_x\ n_y\ n_z]^t$. *Aplique esta transformação sobre as coordenadas do seguinte objeto definido pelos vértices:*

$$\begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) & (8) & (9) & (10) \\ 1 & 3 & 3 & 2.5 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1.5 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e pelas seguintes faces

1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	*6*	*7*	*2*	
8	*10*	*3*	*2*	*7*
9	*5*	*4*	*10*	*8*
5	*9*	*6*	*1*	
9	*8*	*7*	*6*	

4.2 Transformações entre Sistemas de Coordenadas

As transformações que vimos até agora se restringem a situações em que o sistema de referência permanece inalterado. Uma forma alternativa, porém equivalente, a esta visão, é pensar que houve a mudança de sistemas de referência em relação aos quais os objetos, antes e após a transformação, permanecem inalterados. Esta segunda visão é bastante útil em Computação Gráfica para compor, por exemplo, num espaço de cena um conjunto de objetos, cada um definido num sistema de referência próprio.

(Ver Fig. 5.26 do livro-texto de Foley.)

Um dos principais objetivos de Computação Gráfica é viabilizar a síntese de imagens bidimensionais a partir de modelos geométricos 3D (cenas 3D). Como veremos mais adiante, para passar de 3D a 2D, os objetos sofrem uma sequência de transformações. Por eficiência, definem-se então diversos sistemas de coordenadas para distinguir os diferentes espaços em que os diferentes estágios intermediários de um objeto "em transformação" se encontram. A cada espaço associa-se um sistema de coordenadas.

(Ver Fig. 5.23 do livro-texto de Foley.)

Intuitivamente é fácil identificar dois espaços:

Espaço de Objeto O sistema de coordenadas é relativo a um objecto específico. Geralmente, o modelo do objeto está centrado na origem do sistema e tem dimensões normalizadas. O sistema de coordenadas associado a este espaço é denominado de **sistema de coordenadas do objeto**, **de modelagem** ou **local**.

(Ver Fig. 5.21 do livro-texto de Foley.)

Espaço de Imagem As coordenadas dos pontos dos objetos são relativas a um sistema de referência fixado no dispositivo de saída. Este sistema de referência é chamado de **sistema de coordenadas da imagem**, **do dispositivo**, ou **de rasterização** (*screen-coordinate system*).

(Ver Fig. 5.10 do livro-texto de Foley.)

Para facilitar o entendimento do processo de mapeamento do espaço do objeto para o espaço da imagem, muitos padrões gráficos tridimensionais, como PHIGS, distinguem ainda os seguintes espaços:

Espaço de Cena Corresponde ao espaço que compreende todos os elementos que compõem uma cena. Entre os elementos citam-se os componentes representados no espaço do objeto, as fontes de luz, a câmera virtual e o fundo. Neste espaço é possível estabelecer as posições e as orientações relativas entre os elementos de uma cena, pois as coordenadas dos pontos dos elementos integrantes da cena são dadas em função de um **sistema de coordenadas global WC** (ou **do mundo**, em inglês *world-coordinate system*). Tal sistema é também chamado de **sistema de coordenadas da aplicação**, em vista de que as medidas dos elementos estão comumente em escala natural da aplicação.

Espaço de Câmera É conhecido também como o **volume de visão** (*view volume*). Neste espaço destaca-se a posição do observador (ou câmera) na cena, denominada **ponto de referência de projeção** (*projection reference point* – PRP). Os eixos ($v\ u\ n$) do sistema de referência deste espaço, conhecido como **sistema de coordenadas de câmera** ou **do observador** (*viewing-reference coordinate system* – VRC), são definidos normalmente em função de WC. O eixo n coincide com a normal VPN do **plano de projeção**. A projeção do vetor *view up vector* – VUP) na direção do eixo n define o eixo v. E o eixo u deve ser perpendicular a v e n. A origem deste sistema, especificado em

WC, é chamado **ponto de referência de visão** (*view reference point* – VRP). Usualmente, VRP é um ponto sobre o **plano de projeção**. Observe que o vetor VUP indica, de fato, a direção superior da linha de visão.

(Ver Fig. 6.14 do livro-texto de Foley.)

O volume de visão corresponde a uma região da cena de interesse que deve ser visualizada, isto é, que deve ser projetada sobre a área de exibição. Este volume depende, portanto, do plano de projeção (o plano uv), da janela de visão (*window*) (dada por $(u_{min}, u_{max}, v_{min}, v_{max})$), do tipo de projeção (paralela ou perspectiva) e do ponto de referência de projeção (PRP). Para limitar os lados deste volume, são introduzidos ainda os planos de corte dianteiro (*front clipping plane*) e traseiro (*back clipping plane*).

Espaço de Visão Normalizado Este espaço corresponde ao volume de visão normalizado. Normalmente, projeta-se os elementos contidos neste espaço num plano, passando assim para o espaço de imagem.

Outros termos, como espaço de textura e espaço de cor, são comumente utilizados na literatura sobre Computação Gráfica, como veremos durante esta disciplina.

Uma transformação que leva um sistema Σ coincidir com um outro sistem Σ', de mesmas dimensões, pode ser obtida através da concatenacão de um conjunto de transformações básicas, como ilustram os seguintes exemplos.

Exemplo 4.3 *A transformação T de uma base $\{b_1, b_2, b_3\}$ para a base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ deve ser tal que*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$T = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}^{-1}$$

Sendo a matriz $[b_1\ b_2\ b_3]$ ortonormal, $T = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}^t$.

Exemplo 4.4 *Em Computação Gráfica, objetos definidos no espaço de objeto normalmente seguem a regra da mão-direita e os no espaço de imagem, a da mão-esquerda. Neste caso, é muito frequente a aplicação de transformações entre estes dois sistemas durante o processo de visualização. Por*

inspeção, é fácil concluir que a transformação entre os dois sistemas é simplesmente um espelhamento em torno do plano xy:

$$C_{R \leftarrow L} = C_{L \leftarrow R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 4.5 *Muitos pacotes gráficos oferecem facilidades para definir as entidades gráficas planares em qualquer unidade métrica apropriada para as aplicações, como milímetro, centímetro, metro e kilômetro, embora que a área de visão (normalmente, uma tela) seja "limitada". Estes pacotes dispõem, então, de um conjunto de funções que transformam as entidades definidas pelos usuários (em sistema de coordenadas do mundo - world coordinate system) para entidades visualizáveis (em sistema de coordenadas do dispositivo - screen coordinate system).*

(Ver Fig. 5.11 do livro-texto de Foley.)

A região retangular de interesse, que pretendemos visualizar, é denominada a **janela** *(window) e a região no dispositivo de saída, onde as entidades são "desenhadas", é chamada* **quadro de visão** *(viewport). Se associarmos a cada um deles um sistema de referência, denominamos o procedimento que mapeia os pontos de uma janela para um quadro como transformação de window para viewport. Esta transformação pode ser obtida por meio de aplicações sucessivas das seguintes transformações básicas:*

- *deslocamento da janela para a origem,*
- *transferir a janela para o sistema de coordenadas do quadro,*
- *aplicar a transformação de mudança de escala sobre as coordenadas da janela, para que ela fique de mesmo tamanho do quadro de saída, e*
- *desclocar a janela para o quadro.*

(Ver Figs. 5.12 e 5.13 do livro-texto de Foley.)

Exemplo 4.6 *Somente os pontos contidos no volume de visão normalizados são "imageados". Como os pontos numa cena são dados normalmente em coordenadas de WC e o volume de visão (definido por planos de corte, PRP e a janela de visão) é definido em coordenadas de VRC, precisa-se transformar os pontos da cena de interesse do sistema de WC para o sistema VRC. Esta transformação depende do tipo de projeção, como veremos no Capítulo 5.*

Para projeções paralelas, em que o volume de visão é um paralelepípedo, a matriz de transformação pode ser obtida com as seguintes operações:

- *deslocar o ponto VRP à origem de WC,*
- *girar o sistema VRC de tal forma que o eixo n coincida com o eixo z de WC, v com o eixo y e u com o eixo x (considerando que o sistema VRC obedeça à regra da mão direita) e*
- *deslocar as coordenadas x e y dos raios de projeção em relação à coordenada z, de forma que estes raios fiquem paralelos ao eixo z.*

Exercício 4.10 *Obter a matriz de transformação entre as referências:*

1. *base canônica; e*
2. *em relação à base canônica, a origem fique no ponto $P = [P_x\ P_y\ P_z\ 1]^t$, o eixo z coincida com a direção $\vec{d} = [d_x\ d_y\ d_z\ 0]^t$ e o plano yz contenha $\vec{d}$ e o vetor $VUP = [v_x\ v_y\ v_z\ 0]^t$. Considere $P = [4\ 3\ -3\ 1]^t$, $\vec{d} = [-5\ -1\ 2\ 0]^t$ e $VUP = [0\ 1\ 0\ 0]^t$.*

Exercício 4.11 *Qual é a transformação a ser aplicado no vetor normal de um plano se for aplicado nele uma transformação M? Verifique a direção normal do plano $3x + 1.5y + 0.2z - 4.0 = 0$ após uma rotação de 45º em torno da origem do sistema.*

4.3 Quatérnios e Rotações

Os quatérnios $q = a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3$ são uma extenão dos números complexos. Ao invés de um valor imaginário (i), temos um "vetor imaginário" (i+j+z), tal que

	$\vec{1}$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{1}$	$\vec{1}$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{i}$	$-\vec{1}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$-\vec{1}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$-\vec{1}$

Dizemos que a_0 é a **parte real** ou **escalar** e $\vec{a} = ia_1 + ja_2 + ka_3$, a **parte pura** ou **vetorial**. Um quatérnio que tem a parte real nula é denominado **quatérnio puro**. Similar aos números complexos, o **conjugado** do quatérnio $a_0 + \vec{a}$ é $\overline{q} = a_0 - \vec{a}$ e o quadrado da sua norma

$|q| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. O **inverso** multiplicativo é definido por $q^{-1} = \frac{\overline{q}}{(q\overline{q})}$. Particularmente, para um quatérnio unitário, $|q| = 1$, $q^{-1} = \overline{q}$.

São definidas entre dois quatérnios $q_1 = a_0 + \vec{a}$ e $q_2 = b_0 + \vec{b}$ as operações

adição : $q_1 + q_2 = (a_0 + b_0) + (\vec{a} + \vec{b})$, que pode ser expressa com uso de notação matricial é

$$\begin{bmatrix} a_0 + b_0 \\ a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

multiplicação : $q_r = q_1 q_2 = (a_0 b_0 - (\vec{a} \cdot \vec{b})) + (a_0 \vec{b} + b_0 \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b})$. Em notação matricial, temos

$$\begin{bmatrix} q_{0,r} \\ q_{1,r} \\ q_{2,r} \\ q_{3,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -b_1 & b_0 & -b_3 & b_2 \\ -b_2 & b_3 & b_0 & -b_1 \\ -b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix}.$$

A primeira multiplicação é conhecida como **multiplicação esquerda** que equivale a uma transformação linear $L_a(b)$ associando q_2 a $q_1 q_2$ e a segunda, uma **multiplicação direita** $R_b(a)$, mapeia q_1 a $q_1 q_2$.

Os quatérnios são **associativos** e **não são comutativos**.

De forma análoga aos números complexos, podemos representar geometricamente os quatérnios unitários sobre um plano ao definirmos $\vec{I} = iu_1 + ju_2 + ku_3$ com $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$. Podemos escrever q na forma $a_0 + \mu\vec{I}$. Se adicionalmente $|q| = r$, então existe θ tal que $a_0 = r cos\theta$ e $\mu = r sen\theta$. Isso significa que podemos escrever q na forma polar $r(cos\theta + \vec{I} sen\theta) = re^{\vec{I}\theta}$.

É possível demonstrar que se representarmos cada ponto no espaço $\Re^3$ como um quatérnio puro $P = ix + jy + kz$, uma rotação $T(P)$ deste ponto de um ângulo igual a 2θ em torno de um vetor $\vec{I}$ que passa pela origem pode ser dada por

$$T(P) = aPa^{-1}, onde\ \ a = re^{\vec{I}\theta},\ r > 0 \text{ e } \vec{I}^2 = -1.$$

Este resultado nos provê uma ferramenta eficiente e numericamente estável para concatenar as rotações. Supomos que q_1 e q_2 sejam dois quatérnios unitários representando duas rotações. A concaternação da aplicação das duas rotações sobre um ponto P equivale a

$$q_2(q_1 P q_1^{-1})q_2^{-1}$$

Por associatividade,

$$(q_2 q_1)P(q_1^{-1} q_2^{-1}) = (q_2 q_1)P(q_2 q_1)^{-1}.$$

Como o produto de duas matrizes requer um número de operações elementares maior que o produto de dois quatérnios, recomenda-se obter o resultado da concaternação das rotações com uso de quatérnios. Quando se precisa aplicá-lo sobre um conjunto de pontos, faz-se então a sua conversão para a notação matricial.

Exemplo 4.7 *Derive, com uso de quatérnios, a rotação em torno do eixo z por um ângulo θ.*

Neste caso, $\vec{I} = k$ e $a = e^{\vec{I}\frac{\theta}{2}} = cos\frac{\theta}{2} + ksen\frac{\theta}{2}$, cuja inversa é $a = cos\frac{\theta}{2} - ksen\frac{\theta}{2}$. Portanto,

$$T(P) = (cos\frac{\theta}{2} + ksen\frac{\theta}{2})((ix + jy + kz)(cos\frac{\theta}{2} - ksen\frac{\theta}{2})).$$

Utilizando a notação matricial, temos

$$\begin{aligned} T(P) &= \begin{bmatrix} cos\frac{\theta}{2} & 0 & 0 & -sen\frac{\theta}{2} \\ 0 & cos\frac{\theta}{2} & -sen\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & sen\frac{\theta}{2} & cos\frac{\theta}{2} & 0 \\ sen\frac{\theta}{2} & 0 & 0 & cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} . \\ & \cdot(\begin{bmatrix} cos\frac{\theta}{2} & 0 & 0 & sen\frac{\theta}{2} \\ 0 & cos\frac{\theta}{2} & -sen\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & sen\frac{\theta}{2} & cos\frac{\theta}{2} & 0 \\ -sen\frac{\theta}{2} & 0 & 0 & cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sen\theta & 0 \\ 0 & sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exercício 4.12 *Com uso de quatérnios, obtém o efeito da sequência de duas rotações: (1) rotação em torno do eixo y por 30^o e (2) rotação em torno do eixo x por 45^o. Qual é a matriz correspondente?*

Exercício 4.13 *Com uso do quatérnio, derive a matriz de rotação em torno da direção $[u_x\ u_y\ u_z]^t$ por um ângulo θ.*