

## Capítulo 3

# Modelagem Geométrica

Modelos geométricos são fundamentais em síntese de imagens. Em algoritmos de síntese (ou determinação sintética da luminância/brilhância), duas informações geométricas são essenciais: posição de cada ponto (também conhecido por **vértice**) e o vetor normal de superfície associado a cada posição. Um dos focos de pesquisa na área de Modelagem Geométrica é prover mecanismos simples para descrever de forma precisa estas informações.

### 3.1 Vértices e Vetores Normais

Uma forma mais simples, porém trabalhosa, para descrever a geometria de uma superfície é aproximá-la por poliedros de faces poligonais orientáveis. As aproximações mais utilizadas são as quadrilaterias e triangulares, tendo estas últimas a vantagem de possuírem a propriedade de planaridade. Esta descrição pode ser trivialmente implementada com uso de duas listas: uma lista de vértices e a outra de faces. Na lista de vértices cada entrada contém as coordenadas de um vértice e na lista de faces as referências a estas entradas.

(Ver Fig. 11.3 do livro-texto de Foley.)

**Exercício 3.1** *Descreva um paralelepípedo “orientável”, isto é de faces orientáveis, com uso de 8 vértices:  $[0\ 0\ 1]^t$ ,  $[3\ 0\ 1]^t$ ,  $[3\ 2\ 1]^t$ ,  $[0\ 2\ 1]^t$ ,  $[0\ 0\ 0]^t$ ,  $[3\ 0\ 0]^t$ ,  $[3\ 2\ 0]^t$  e  $[0\ 2\ 0]^t$ .*

A orientabilidade das faces permite determinar o vetor normal  $\vec{n}$  de cada face por meio dos seus três vértices  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  e  $\vec{v}_3$  tomados sequencialmente num sentido de orientação fixo

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \vec{v}_2 \times \vec{v}_3.$$

Se o poliedro for uma aproximação de uma superfície suave, é comum determinar o vetor normal no vértice  $P$  como a média dos vetores normais de todas as faces adjacentes a  $P$ .

**Exercício 3.2** *Aproxime uma esfera de raio unitário por um icosaedro. Determine os vértices do icosaedro e os vetores normais em*

1. 20 faces triangulares.
2. 12 vértices.

A codificação da superfície aproximada por duas listas não explicita a relação das arestas, o que dificulta a visualização destes elementos geométricos. Se quisermos visualizá-las, teremos que “desenhá-las” duas vezes, percorrendo todas as faces. Estruturas de dados mais complexas, com base em grafos, foram propostas para representar explicitamente as relações de adjacência como vértice–aresta, aresta–aresta, vértice–face e aresta–face.

(Ver Fig. 11.4 do livro-texto de Foley.)

A estrutura pioneira é a estrutura denominada *winged-edge data structure* com a qual foi introduzida o modelo de representação por bordo (*boundary representation*), ou simplesmente *Brep*.

(Ver Fig. 12.16 do livro-texto de Foley.)

**Exercício 3.3** *Represente o paralelepípedo do Exercício 3.1 e a esfera do Exercício 3.2 usando o modelo Brep.*

### 3.2 Representações Analíticas de Curvas e Superfícies

As representações analíticas, além de prover uma descrição mais precisa e compacta, nos permitem obter facilmente os pontos intermediários entre os vértices. Isso facilita a manipulação dos objetos geométricos.

Distinguem-se três formas para representar um objeto geométrico:

**paramétricas** : as coordenadas dos pontos são funções de parâmetros.

**implícitas** : a relação entre as  $n$  coordenadas dos pontos do objeto é expressa por uma função de  $n$  variáveis. Tal função estabelece, de fato, o **lugar geométrico** dos pontos em relação ao objeto ( $= 0$ , sobre o objeto;  $< 0$ , dentro do objeto;  $> 0$ , fora do objeto).

**explícitas** : uma coordenada é dada explicitamente em função de todas as outras.

**Exemplo 3.1** A representação do lugar geométrico dos pontos de uma esfera de raio  $r$  na forma

- paramétrica:  $x = r \cos \theta \sin \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$  e  $z = r \cos \phi$ .
- implícita:  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ .
- explícita:  $z = \pm \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ .

**Exercício 3.4** Escreva as três formas de representação de um:

1. cone;
2. parabolóide elíptico; e
3. toro.

Em geral, uma função não é suficiente para representar uma curva ou superfície de interesse. Como solução, várias funções são usadas. Neste caso, em muitas aplicações é importante saber a **continuidade** ou a diferenciabilidade nos pontos de “emenda”. Uma função, que apresenta continuidade em suas derivadas até ordem  $n$  para qualquer ponto do domínio, é dita de classe  $C^n$ .

Em Modelagem Geométrica é introduzido o conceito de **continuidade geométrica** para melhor caracterizar estes pontos de “emenda” quando se trata das funções paramétricas. Uma curva representada por duas funções paramétricas conectadas num ponto  $P$  pode ter as derivadas à esquerda e à direita diferentes. Porém, se existir uma reparametrização através da qual as derivadas passam a ser iguais, dizemos que a curva é **geometricamente contínua** no ponto  $P$ .

**Exemplo 3.2** Uma curva  $f(t)$  definida por

$$f(t) = \begin{cases} (t, t^2) & \text{para } t < 0 \\ (2t, 4t^2) & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

tem como a derivada à esquerda  $[1, 0]^t$  e como derivada à direita  $[2, 0]^t$  no ponto  $[0, 0]^t$ . Portanto, a curva não é diferenciável no ponto  $[0, 0]^t$ . Se substituirmos  $2t$  por  $w$  (uma reparametrização), a derivada à direita passa a ser  $[1, 0]^t$ . Conclui-se, então, que a curva é geometricamente contínua em  $[0, 0]^t$ .

**Exercício 3.5** Mostre que as duas curvas

$$f_1(t) = [t^2 - 2t + 2, t^3 - 2t^2 + t]^t, \quad f_2(t) = [t^2 + 1, t^3]^t, \quad t \in [0, 1]$$

são  $C^1$  (diferenciável de primeira ordem) contínuas e não  $C^1$  (geometricamente contínuas de primeira ordem) no ponto  $f_1(1) = f_2(0)$ .

Os vetores normais em cada ponto de uma superfície paramétrica  $P(u, v)$  podem ser obtidos com a expressão

$$\vec{n}\{P(u, v)\} = \frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v}$$

enquanto para representações implícitas  $f(x, y, z)$

$$\vec{n}\{(x, y, z)\} = \nabla f(x, y, z) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

**Exercício 3.6** Determine o vetor normal para os pontos das seguintes superfícies:

1.  $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ ;
2.  $S = [a\theta^2, 2a\theta, \phi]^t$ ,  $0 \leq \theta \leq \theta_{max}$ ,  $\phi_{min} \leq \phi \leq \phi_{max}$ ;
3.  $e^x \cos y = 10$ .

Propriedades como robustez no processamento, simplicidade na síntese e facilidade na interpretação foram decisivas na evolução dos modelos geométricos. Os modelos analíticos commmente providos pelos pacotes gráficos pertencem à classe de representações paramétricas e as funções utilizadas são polinômiais cujos coeficientes tem uma semântica geométrica bem intuitiva — usualmente, são denominados os **pontos de controle**.

**Observação 3.1** Na última década os *funções implícitas ganharam popularidade na modelagem de objetos “amorfo” ou “macias”, denominados blobby objects*.

Nesta disciplina detalharemos somente a representação por base polinomial de Bernstein — as curvas e superfícies de Bézier e B-splines. Pode-se mostrar que as funções de Bernstein  $\{B_{n,0}(t), B_{n,1}(t), \dots, B_{n,n}(t)\}$  definidas como

$$B_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$$

formam uma base para o espaço de polinômios de grau  $n$ , com a propriedade

$$\sum B_{n,i}(t) = 1 \quad \forall t.$$

**Exemplo 3.3** Quando  $n = 2$ , as funções

$$\begin{aligned} B_{2,0}(t) &= (1-t)^2 = 1 - 2t + t^2 \\ B_{2,1}(t) &= 2t(1-t) = 2t - 2t^2 \\ B_{2,2}(t) &= t^2 \end{aligned}$$

constituem uma base do espaço de polinômios de grau 2. Utilizando a notação matricial,

$$\begin{bmatrix} B_{2,0}(t) \\ B_{2,1}(t) \\ B_{2,2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz quadrada  $3 \times 3$  é também conhecida como **matriz-base de Bézier** (quadrática).

**Exemplo 3.4** Quando  $n = 3$ , as funções

$$\begin{aligned} B_{3,0}(t) &= (1-t)^3 = 1 - 3t + 3t^2 - t^3 \\ B_{3,1}(t) &= 3t(1-t)^2 = 3t - 6t^2 + 3t^3 \\ B_{3,2}(t) &= 3t^2(1-t) = 3t^2 - 3t^3 \\ B_{3,3}(t) &= t^3 \end{aligned}$$

constituem uma base do espaço de polinômios de grau 3. Utilizando a notação matricial,

$$\begin{bmatrix} B_{3,0}(t) \\ B_{3,1}(t) \\ B_{3,2}(t) \\ B_{3,3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz quadrada  $4 \times 4$  é a **matriz-base de Bézier** (cúbica).

(Ver Fig. 11.20 do livro-texto de Foley.)

**Exercício 3.7** Esboce o gráfico das 3 funções de Bernstein de grau 2 e das 4 funções de Bernstein de grau 3. Verifique que a soma das funções para qualquer valor  $t \in [0, 1]$  é igual a 1!

### 3.2.1 Curvas e Superfícies de Bézier

Geometricamente, os pontos sobre as curvas de Bézier de grau  $n$   $P(t)$ ,  $t \in [0, 1]$  são obtidos através da combinação convexa de um conjunto fixo de pontos  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ , chamados **pontos de controle**, com uso de funções de Bernstein

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_{n,i}(t)P_i.$$

É comum denominar a sequência dos pontos de controle de **polígono de controle**.

(Ver Fig. 11.19 do livro-texto de Foley.)

**Exercício 3.8** Por que dizemos que a curva de Bézier é uma combinação convexa dos seus pontos de controle?

**Exemplo 3.5** Uma definição paramétrica de parábolas é

$$x(t) = (1-t)^2 \quad y(t) = t^2$$

que pode ser expressa na base de Bernstein como combinação convexa dos pontos  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$P(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} B_{2,0}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} B_{2,1}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} B_{2,2}(t)$$

Entre as propriedades das curvas de Bézier temos:

- interpolação dos pontos extremos
- os vetores tangentes dos pontos extremos tem a mesma direção dos segmentos do polígono de controle.
- está sempre localizado no fecho convexo do polígono de controle.
- é invariante (em relação ao polígono de controle) sob transformações afins (lineares e deslocamentos).
- é invariante em relação às transformações afins dos parâmetros.
- apresenta um número de oscilações menor que o do seu polígono de controle (*variation diminishing*).

- apresenta precisão linear.
- bastante apropriadas para projetos interativos.

**Exercício 3.9** Dados quatro pontos de controle  $[1,0,1,0]^t$ ,  $[2,0,3,0]^t$ ,  $[4,0,3,0]^t$  e  $[3,0,1,0]^t$  de uma curva de Bézier. Determine  $P(0)$ ,  $P(0,15)$ ,  $P(0,35)$ ,  $P(0,5)$ ,  $P(0,65)$ ,  $P(0,85)$  e  $P(1,0)$ .

Para visualizar curvas, é comum subdividi-las em  $n$  segmentos pequenos. Sendo em representação paramétrica, uma forma seria fixar as variações dos parâmetros em intervalos constantes,  $\Delta u$ , e calcular os pontos  $P_i(\Delta u)$  com  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

(Ver Figs. 11.35 e 11.44 do livro-texto de Foley.)

Há, porém, técnicas computacionalmente muito mais eficientes como **algoritmo de deCasteljau** para subdivisão. Pelo algoritmo de deCasteljau, um ponto  $P(t)$  sobre uma curva de grau  $n$  pode ser obtido com  $n$  níveis de recursão de interpolações lineares a partir de todos os pontos de controle  $P_0, \dots, P_n$ , isto é, os pontos de nível  $j$  é determinado em função dos pontos do nível  $j-1$  a partir da expressão:

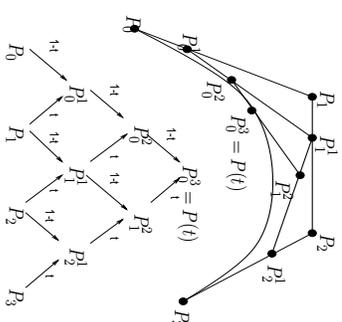
$$P_i^j(t) = (1-t)P_i^{j-1} + tP_{i+1}^{j-1}; \text{ para } i = 0, \dots, n-j, j = 0, \dots, n.$$

As derivadas de primeira ordem podem também ser obtidas do esquema de deCasteljau através da relação:

$$P'(t) = n(P_{i+1}^{n-1} - P_i^{n-1})$$

O esquema de deCasteljau é ainda muito utilizado para subdividir as curvas de Bézier em  $P(t)$  sem alterar a continuidade entre elas em  $P(t)$ . Os pontos de controle das duas novas curvas são  $P_0^1 P_1^2 \dots P_n^n$  e  $P_0^n \dots P_{n-2}^{n-1} P_{n-1}^{n-1} P_n$ .

**Exemplo 3.6** Dados os quatro pontos de controle  $P_0, P_1, P_2$  e  $P_3$  de uma curva de Bézier quadrática, o esquema de deCasteljau para obter qualquer ponto  $P(t)$  é



As curvas de Bézier definidas pelos dois conjuntos de pontos de controle,  $P_0^1 P_1^2 P_2^3$  e  $P_0^2 P_1^3 P_2^3$ , correspondem, respectivamente, à subcurva direita e à subcurva esquerda da curva  $P(t)$ .

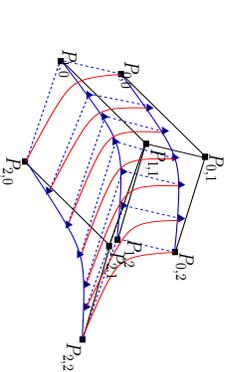
**Exercício 3.10** Determine os pontos do Exercício 3.9 pelo esquema de deCasteljau.

**Exercício 3.11** Mostre que as derivadas nos extremos de uma curva de Bézier podem ser dadas por:  $P'(0) = n(P_1 - P_0)$  e  $P'(1) = n(P_n - P_{n-1})$ .

Por processo generativo (deslocando uma curva de Bézier ao longo da outra) podemos ainda obter superfícies de Bézier  $P(u, v)$  com uso de funções de Bernstein através da combinação convexa entre os pontos resultantes da combinação convexa dos pontos de controle

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n P_{ij} B_{ni}(u) B_{nj}(v), \tag{3.1}$$

O reticulado de pontos de controle  $P_{ij}$  define a **malha de controle** da superfície.



(Ver Figs. 11.39 e 11.42 do livro-texto de Foley.)

**Exercício 3.12** Dados os 16 pontos de controle de uma superfície de Bézier

$$\begin{bmatrix} (-15, 0, 15) & (-15, 5, 5) & (-15, 5, -5) & (-15, 0, -15) \\ (-5, 5, 15) & (-5, 5, 5) & (-5, 5, -5) & (-5, 5, -15) \\ (5, 5, 15) & (5, 5, 5) & (5, 5, -5) & (5, 5, -15) \\ (15, 0, 15) & (15, 5, 5) & (15, 5, -5) & (15, 0, -15) \end{bmatrix}^s,$$

Determine os pontos  $P(0, 0)$ ,  $P(0.25, 0.25)$ ,  $P(0.5, 0.25)$ ,  $P(0.75, 0.75)$ ,  $P(1.0, 1.0)$  com uso (a) da Eq. 3.1; e (b) do esquema de deCasteljau.

### 3.2.2 Curvas e Superfícies de B-Splines

As curvas de Bézier são definidas sobre um intervalo de suporte, usualmente  $[0, 1]$ . As curvas de B-splines de grau  $n$  podem, por sua vez, descrever uma sequência de curvas de Bézier de grau  $n$  conectadas suavemente entre si (continuidade  $C^{n-1}$ ). Como os intervalos de definição das curvas de Bézier que compõem a curva B-spline podem ser variáveis, é possível obter, para uma mesma ordem, curvas de configuração mais complexas

(Ver Fig. 11.22 do livro-texto de Foley.)

Analicamente, é possível representar uma curva de B-spline de ordem  $k$  (grau  $(k-1)$ ) definida sobre o intervalo  $[t_1, t_{n+k+1}]$  com os nós  $t_1 < t_2 < \dots < t_{n+k+1}$  como uma combinação convexa de  $n+1$  pontos de controle  $P_i$  utilizando funções  $N_{i,k}(t)$  de suporte limitado

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} P_i N_{i,k}(t). \quad (3.2)$$

**Observação 3.2** O vetor  $[t_1 \ t_2 \ t_3 \ \dots \ t_{n+k+1}]$  é conhecido como **vetor de nós**.

A função  $N_{i,k}(t)$ , também conhecida como **função de base**, pode ser definida recursivamente a partir de

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t-t_i)N_{i,k-1}(t)}{t_{i+k-1}-t_i} + \frac{(t_{i+k}-t)N_{i+1,k-1}(t)}{t_{i+k}-t_{i+1}}.$$

É adotada ainda a convenção  $\frac{0}{0} = 0$ . Observe que  $N_{i,k}(t)$  depende da ordem  $k$ , do intervalo de nós sobre o qual ela é definida e do espaçamento entre os nós.

(Ver Fig. 11.26 do livro-texto de Foley.)

**Exemplo 3.7** Dado o vetor de nós  $\tilde{t} = [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]$  sobre o eixo de parâmetro  $t$ . Determine as funções de base  $N_{13}(t)$ ,  $N_{33}(t)$ ,  $N_{53}(t)$  e  $N_{63}(t)$ . Sabemos que

$$\begin{aligned} N_{1,1}(t) &= 1, t \in [0, 1] \\ N_{2,1}(t) &= 1, t \in [1, 2] \\ N_{3,1}(t) &= 1, t \in [2, 3] \\ N_{4,1}(t) &= 1, t \in [3, 4] \\ N_{5,1}(t) &= 1, t \in [4, 5] \\ N_{6,1}(t) &= 1, t \in [5, 6] \end{aligned}$$

e  $N_{i,1}(t) = 0$  para o resto dos intervalos.

Ainda pela definição, temos

$$N_{i,2}(t) = \frac{(t-t_i)N_{i,1}(t)}{t_{i+1}-t_i} + \frac{(t_{i+2}-t)N_{i+1,1}(t)}{t_{i+2}-t_{i+1}}.$$

Substituindo corretamente os valores de  $N_{i,1}(t)$  para cada intervalo, obtemos

$$\begin{aligned} N_{1,2}(t) &= \frac{(t-t_1)N_{1,1}(t)}{t_2-t_1} + \frac{(t_3-t)N_{2,1}(t)}{t_3-t_2} = \begin{cases} t, & t \in [0, 1] \\ (2-t), & t \in [1, 2] \end{cases} \\ N_{2,2}(t) &= \frac{(t-t_2)N_{2,1}(t)}{t_3-t_2} + \frac{(t_4-t)N_{3,1}(t)}{t_4-t_3} = \begin{cases} (t-1), & t \in [1, 2] \\ (3-t), & t \in [2, 3] \end{cases} \\ N_{3,2}(t) &= \frac{(t-t_3)N_{3,1}(t)}{t_4-t_3} + \frac{(t_5-t)N_{4,1}(t)}{t_5-t_4} = \begin{cases} (t-2), & t \in [2, 3] \\ (4-t), & t \in [3, 4] \end{cases} \\ N_{4,2}(t) &= \frac{(t-t_4)N_{4,1}(t)}{t_5-t_4} + \frac{(t_6-t)N_{5,1}(t)}{t_6-t_5} = \begin{cases} (t-3), & t \in [3, 4] \\ (5-t), & t \in [4, 5] \end{cases} \\ N_{5,2}(t) &= \frac{(t-t_5)N_{5,1}(t)}{t_6-t_5} + \frac{(t_7-t)N_{6,1}(t)}{t_7-t_6} = \begin{cases} (t-4), & t \in [3, 4] \\ (6-t), & t \in [5, 6] \end{cases} \end{aligned}$$

Como

$$N_{i,3}(t) = \frac{(t-t_i)N_{i,2}(t)}{t_{i+2}-t_i} + \frac{(t_{i+3}-t)N_{i+1,2}(t)}{t_{i+3}-t_{i+1}},$$

temos para cada intervalo as seguintes funções:

$$N_{1,3}(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & t \in [0, 1] \\ \frac{t(3-t)}{2} + \frac{(3-t)(t-1)}{2}, & t \in [1, 2] \\ \frac{(3-t)(3-t)}{2}, & t \in [2, 3] \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 N_{2,3}(t) &= \begin{cases} \frac{(t-1)^2}{2}, & t \in [1, 2) \\ \frac{(t-1)(3-t)}{2} + \frac{(t-4)(t-2)}{2}, & t \in [2, 3) \\ \frac{(t-4)^2}{2}, & t \in [3, 4) \end{cases} \\
 N_{3,3}(t) &= \begin{cases} \frac{(t-2)^2}{2}, & t \in [2, 3) \\ \frac{(t-2)(4-t)}{2} + \frac{(5-t)(t-3)}{2}, & t \in [3, 4) \\ \frac{(5-t)^2}{2}, & t \in [4, 5) \end{cases} \\
 N_{4,3}(t) &= \begin{cases} \frac{(t-3)^2}{2}, & t \in [3, 4) \\ \frac{(t-3)(6-t)}{2} + \frac{(6-t)(t-4)}{2}, & t \in [4, 5) \\ \frac{(6-t)^2}{2}, & t \in [5, 6) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Observe que o número de intervalos de suporte de uma função  $N_{i,k}(t)$  é igual a  $k$  e o grau da função é igual a  $(k-1)$ .

**Exercício 3.13** Mostre que as funções  $N_{1,4}(t)$ ,  $N_{2,4}(t)$ ,  $N_{3,4}(t)$  e  $N_{4,4}(t)$  definidas sobre o vetor de nós  $[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$  são equivalentes às funções  $B_{3,0}(t)$ ,  $B_{3,1}(t)$ ,  $B_{3,2}(t)$  e  $B_{3,3}(t)$ .

Há mais opções para manipular as curvas B-splines que as curvas de Bézier. Nas curvas de Bézier, as formas geométricas podem ser alteradas pelos pontos de controle e pelo grau da curva. Nas curvas B-splines, além destes dois conjuntos de variáveis, as formas podem ser alteradas através

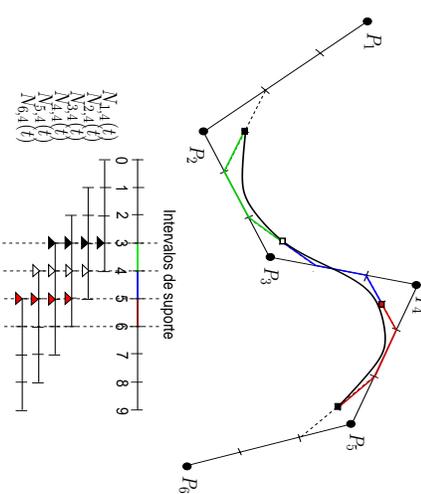
1. do espaçamento dos intervalos entre  $t_i$  e  $t_{i+1}$ . Quando os espaçamentos forem iguais, dizemos que são **curvas B-splines uniformes**; caso contrário, **curvas B-splines não-uniformes**;
2. do uso de múltiplos pontos de controle (multiplicidade  $k-1$  gera uma cuspide  $C^{k-2}$  diferenciável);
3. do uso de múltiplos nós no vetor de nós (multiplicidade  $m \leq k-1$  reduz a diferenciabilidade do ponto para  $C^{k-m-1}$ );
4. do uso de pontos de controle de multiplicidade  $k$  para obter um intervalo da curva coincidente com um segmento do polígono de controle.

(Ver Fig. 11.27 do livro-texto de Foley.)

Uma curva B-spline  $\mathcal{C}$  de ordem  $k$  é equivalente a uma sequência de curvas de Bézier de grau  $(k-1)$ , pois foi demonstrado que a partir do polígono de controle de  $\mathcal{C}$  pode-se obter, por subdivisões sucessivas, os polígonos de controle das curvas de Bézier. Portanto, a propriedade de **fecho convexo**

vale para  $k$  pontos de controle vizinhos de uma curva de B-Spline de ordem  $k$  e se a curva for plana, a propriedade de **redução em oscilações** também vale para  $k$  pontos de controle vizinhos,

**Exemplo 3.8** A seguinte figura ilustra uma curva B-spline de ordem 4 (cúbica) constituída por 3 curvas de Bézier cúbica suavemente conectadas. Os pontos extremos de cada polígono de controle (marcas em preto, branco e vermelho) podem ser obtidos por um esquema similar ao do algoritmo de deCasteljau, conhecido como **algoritmo de deBoor**.

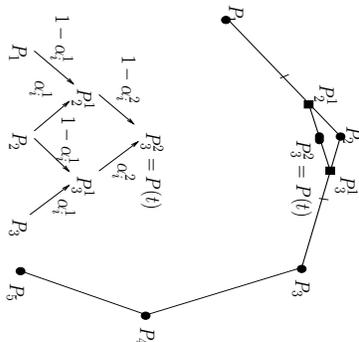


O **algoritmo de Boor** nos permite computar os pontos sobre uma curva de B-Spline sem conhecer as funções de base B-Spline e usando somente combinações lineares sucessivas a partir dos pontos de controle  $P_{r-k+1} = P_{r-k+1}^0, \dots, P_r = P_r^0$ , isto é, os pontos de nível  $j$  é determinado em função dos pontos do nível  $j-1$  a partir da expressão:

$$P_i^j(t) = (1 - \alpha_i^j) P_{i-1}^{j-1} + \alpha_i^j P_i^{j-1}, \text{ para } i = 0, \dots, n \quad j = 0, \dots, i,$$

$$\text{onde } \alpha_i^j = \frac{t-t_i}{t_{i+k-j}-t_i}$$

**Exemplo 3.9** Dados os cinco pontos de controle  $P_1, P_2, P_3, P_4$  e  $P_5$  de uma curva de B-spline quadrática (ordem  $k=3$ ), o esquema de deBoor para obter qualquer ponto  $P(t)$  é



Analisadamente, temos

$$\begin{aligned}
 P(t) &= P_1 N_{3,3}(t) + P_2 N_{2,3}(t) + P_3 N_{3,3}(t) + P_4 N_{4,3}(t) + P_5 N_{5,3}(t) + P_6 N_{6,3}(t) \\
 &= P_1 \left( \frac{t-t_1}{t_3-t_1} N_{1,2}(t) + \frac{t_4-t}{t_4-t_2} N_{2,2}(t) + P_2 \left( \frac{t-t_2}{t_4-t_2} N_{2,2}(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_3} N_{3,2}(t) \right) + \right. \\
 &\quad P_3 \left( \frac{t-t_3}{t_5-t_3} N_{3,2}(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_4} N_{4,2}(t) \right) + P_4 \left( \frac{t-t_4}{t_6-t_4} N_{4,2}(t) + \frac{t_7-t}{t_7-t_5} N_{5,2}(t) \right) + \\
 &\quad P_5 \left( \frac{t-t_5}{t_7-t_5} N_{5,2}(t) + \frac{t_8-t}{t_8-t_6} N_{6,2}(t) \right) + P_6 \left( \frac{t-t_6}{t_8-t_6} N_{6,2}(t) + \frac{t_9-t}{t_9-t_7} N_{7,2}(t) \right) + \\
 &= P_1 \left( \frac{t-t_1}{t_3-t_1} N_{1,2}(t) \right) + \\
 &\quad \left( \frac{t_4-t}{t_4-t_2} P_1 + \frac{t-t_2}{t_4-t_2} P_2 \right) N_{2,2}(t) + \\
 &\quad \left( \frac{t_5-t}{t_5-t_3} P_2 + \frac{t-t_3}{t_5-t_3} P_3 \right) N_{3,2}(t) + \\
 &\quad \left( \frac{t_6-t}{t_6-t_4} P_3 + \frac{t-t_4}{t_6-t_4} P_4 \right) N_{4,2}(t) + \\
 &\quad \left( \frac{t_7-t}{t_7-t_5} P_4 + \frac{t-t_5}{t_7-t_5} P_5 \right) N_{5,2}(t) + \\
 &\quad \left( \frac{t_8-t}{t_8-t_6} P_5 + \frac{t-t_6}{t_8-t_6} P_6 \right) N_{6,2}(t) + \\
 &\quad P_6 \left( \frac{t_9-t}{t_9-t_7} N_{7,2}(t) \right) \\
 &= P_1 \left( \frac{t-t_1}{t_3-t_1} N_{1,1}(t) + \frac{t_3-t}{t_3-t_2} N_{2,1}(t) \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &P_2^1(t) \left( \frac{t-t_2}{t_3-t_2} N_{2,1}(t) + \frac{t_4-t}{t_4-t_3} N_{3,1}(t) + \right. \\
 &\quad P_3^1(t) \left( \frac{t-t_3}{t_4-t_3} N_{3,1}(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_4} N_{4,1}(t) \right) + \\
 &\quad P_4^1(t) \left( \frac{t-t_4}{t_5-t_4} N_{4,1}(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_5} N_{5,1}(t) \right) + \\
 &\quad P_5^1(t) \left( \frac{t-t_5}{t_6-t_5} N_{5,1}(t) + \frac{t_7-t}{t_7-t_6} N_{6,1}(t) \right) + \\
 &\quad P_6^1(t) \left( \frac{t-t_6}{t_7-t_6} N_{6,1}(t) + \frac{t_8-t}{t_8-t_7} N_{7,1}(t) \right) + \\
 &\quad P_6 \left( \frac{t_9-t}{t_9-t_7} N_{7,1}(t) + \frac{t_9-t}{t_8-t_9} N_{8,1}(t) \right) \\
 &= P_1 \left( \frac{t-t_1}{t_3-t_1} N_{1,1}(t) + \frac{t_3-t}{t_3-t_2} N_{2,1}(t) \right) + \\
 &\quad P_2^1(t) \left( \frac{t-t_2}{t_3-t_2} N_{2,1}(t) \right) + \\
 &\quad \left( \frac{t_4-t}{t_4-t_3} P_2^1(t) + \frac{t-t_3}{t_4-t_3} P_3^1(t) \right) N_{3,1}(t) + \\
 &\quad \left( \frac{t_5-t}{t_5-t_4} P_3^1(t) + \frac{t-t_4}{t_5-t_4} P_4^1(t) \right) N_{4,1}(t) + \\
 &\quad \left( \frac{t_6-t}{t_6-t_5} P_4^1(t) + \frac{t-t_5}{t_6-t_5} P_5^1(t) \right) N_{5,1}(t) + \\
 &\quad \left( \frac{t_7-t}{t_7-t_6} P_5^1(t) + \frac{t-t_6}{t_7-t_6} P_6^1(t) \right) N_{6,1}(t) + \\
 &\quad P_6^1(t) \left( \frac{t_8-t}{t_8-t_7} N_{7,1}(t) \right) + \\
 &\quad P_6 \left( \frac{t_9-t}{t_9-t_7} N_{7,1}(t) + \frac{t_9-t}{t_8-t_9} N_{8,1}(t) \right) \\
 &= P_1 \left( \frac{t-t_1}{t_3-t_1} N_{1,1}(t) + \frac{t_3-t}{t_3-t_2} N_{2,1}(t) \right) + \\
 &\quad P_2^1(t) \left( \frac{t-t_2}{t_3-t_2} N_{2,1}(t) \right) + \\
 &\quad P_3^2(t) N_{3,1}(t) + P_4^2(t) N_{4,1}(t) + P_5^2(t) N_{5,1}(t) + P_6^2(t) N_{6,1}(t) + \\
 &\quad P_6^1(t) \frac{t_8-t}{t_8-t_7} N_{7,1}(t) + \\
 &\quad P_6 \left( \frac{t_9-t}{t_9-t_7} N_{7,1}(t) + \frac{t_9-t}{t_8-t_9} N_{8,1}(t) \right).
 \end{aligned}$$

Lembrando que só os pontos  $P(t)$  no intervalo  $t \in [t_3, t_7]$  são combinações lineares dos pontos de controle e

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

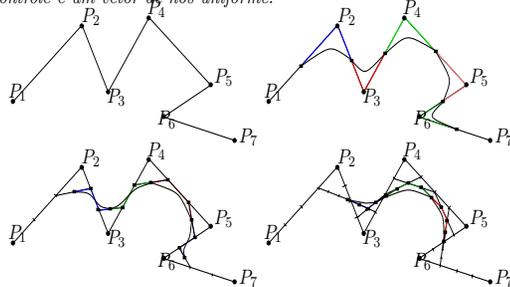
a curva de B-Spline é

$$P(t) = \begin{cases} P_3^2(t), & t_3 \leq t < t_4 \\ P_4^2(t), & t_4 \leq t < t_5 \\ P_5^2(t), & t_5 \leq t < t_6 \\ P_6^2(t), & t_6 \leq t < t_7 \end{cases}$$

**Exercício 3.14** Na figura do Exemplo 3.8, o vetor de nós é igualmente espaçado, mais precisamente [0 1 2 3 4 5 6 7 8 9]. Como seriam os polígonos de controle das curvas de Bézier cúbicas que compõem a curva B-spline apresentado acima, se o vetor de nós for diferentemente espaçado [0 0 0 1 3 4 8 10 10 10]?

**Exercício 3.15** Dados quatro pontos de controle  $[1 \ 1]^t$ ,  $[2 \ 3]^t$ ,  $[4 \ 3]^t$  e  $[3 \ 1]^t$  e o vetor de nós [0 1 3 5 5]. Determine  $P(1.5)$ ,  $P(2.5)$  e  $P(4.5)$  com uso (a) da Eq. 3.2; e (b) do esquema de deBoor.

**Exemplo 3.10** Neste exemplo ilustramos como se obtém os polígonos de controle de curvas de Bézier, de grau 1 a 4, a partir de um mesmo polígono de controle e um vetor de nós uniforme.



De forma análoga às superfícies de Bézier, as superfícies B-splines podem ser obtidas de forma generativa através do deslocamento das curvas de B-splines no espaço, por uma malha de pontos de controle  $P_{ij}$ :

$$P(u, v) = \sum_{i=1}^{m+1} \left( \sum_{j=1}^{n+1} P_{ij} N_{j,k_1}(u) \right) N_{i,k_2}(v).$$

### 3.3 Blossoming

Uma outra alternativa para descrever as curvas de Bézier e B-Spline, mostrando explicitamente a construção recorrente destas curvas por interpolações lineares, se baseia no **princípio de blossoming**, que nos garante que para qualquer função polinomial  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  de grau  $n$  existe uma única correspondência simétrica multiafim  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  com

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = F(t), \text{ quando } t_1 = t_2 = \dots = t_n = t.$$

$f$  é denominada a forma blossom de  $F$ . Esta notação tem se mostrado muito prático para desenvolvimento de métodos e algoritmos para computação dos pontos sobre as curvas e para subdivisão das curvas.

**Exemplo 3.11** A função simétrica tri-afim de

$$F(t) = a_0t + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$$

é

$$f(t_1, t_2, t_3) = a_0 + \frac{a_1}{3}(t_1 + t_2 + t_3) + \frac{a_2}{3}(t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1) + a_3t_1t_2t_3$$

**Exercício 3.16** Determine a função simétrica tri-afim de  $f(t) = t^2 + t^3$ .

**Exemplo 3.12** Uma curva de Bézier quádrlica,  $P(t)$ , pode ser reescrita como um polinômio de 2 variáveis através de algumas manipulações algébricas

$$\begin{aligned} P(t) &= (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2 \\ &= (1-t)(1-t)P_0 + (t(1-t) + t(1-t))P_1 + ttP_2 \end{aligned}$$

Com uso de duas variáveis,  $t$  e  $s$  a função é equivalente a

$$\begin{aligned} P(t, s) &= (1-t)(1-s)P_0 + (t(1-s) + s(1-t))P_1 + tsP_2 \\ &= (1-t)\{(1-s)P_0 + sP_1\} + t\{(1-s)P_1 + sP_2\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

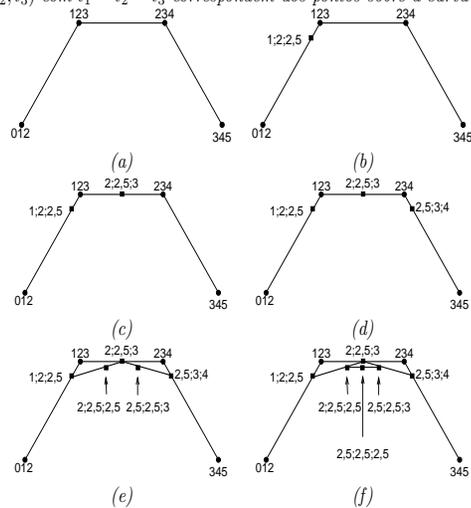
com a restrição de  $t=s$ .

Fazendo  $P_0 = P[0, 0]$ ,  $P_1 = P[1, 0] = P[0, 1]$  e  $P_2 = P[1, 1]$ , Eq. 3.3 assume o seguinte aspecto

$$\begin{aligned} P(t, s) &= (1-t)\{(1-s)P[0, 0] + sP[0, 1]\} + t\{(1-s)P[1, 0] + sP[1, 1]\} \\ &= (1-t)P[0, s] + tP[1, s] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Eq. 3.4 nos apresenta uma outra alternativa para obter os valores da curva  $P(t)$  por simples interpolações lineares entre os três pontos de controle  $P_0 = P[0, 0]$ ,  $P_1 = P[1, 0] = P[0, 1]$  e  $P_2 = P[1, 1]$ .

**Exemplo 3.13** Utilizando o princípio de blossoming, podemos também obter um ponto sobre a curva de B-Spline uniforme de grau  $(k-1)$ . Denotamos os pontos de controle por códigos  $012..(k-1)$ ,  $12..(k)$ ,  $23..(k+1)$ , etc, como ilustra (a) para uma curva de B-Spline de ordem 4. Para obter um ponto  $P(2,5) = p(2,5;2,5;2,5)$ , iniciamos com a determinação de pontos que resultam do primeiro nível de interpolação linear -  $P_i^1$ , na razão de  $(t_1 - t_i)$  para 3 (em (b), de 0 para 3; em (c), de 1 para 4; em (d), de 2 para 5). Em seguida, computamos os pontos do segundo nível de interpolação linear -  $P_i^2$ , na razão de  $(t_2 - t_i)$  para 2 (em (e), de 1 para 3 e de 2 para 4). E, finalmente, calculamos os pontos do terceiro nível de interpolação linear -  $P_i^3$ , na razão de  $(t_3 - t_i)$  para 1 (em (f), de 2 para 3). Os pontos  $p(t_1, t_2, t_3)$  com  $t_1 = t_2 = t_3$  correspondem aos pontos sobre a curva  $P(t)$ .



### 3.4 Geometria Construtiva

Uma técnica apropriada para construção de formas complexas por usuários não-especialistas é a técnica construtiva. Esta técnica caracteriza-se por obter um novo objeto a partir da combinação entre os blocos geométricos básicos, chamados **primitivas geométricas**. Usualmente, os detalhes das representações geométricas das primitivas geométricas e as implementações

das operações booleanas (união, interseção e diferença) ficam transparentes aos usuários.

CSG (*Constructive Solid Geometry*) é o modelo que segue o princípio de geometria construtiva mais conhecido. Ele compreende um conjunto de blocos sólidos elementres (como esfera, paralelepípedo, cilindro e cone) e um conjunto de **operadores booleanos regulares** - operadores booleanos (união, interseção e diferença) modificados para garantir o fechamento destas operações sobre os sólidos.

(Ver Figs. 12.2 e 12.28 do livro-texto de Foley.)

A construção de um modelo CSG é naturalmente hierárquica, que pode ser representada por uma árvore binária. Nesta árvore, os nós-folha representam as primitivas geométricas e os nós intermediários, os resultados intermediários de operações booleanas.

(Ver Fig. 12.27 do livro-texto de Foley.)

**Exercício 3.17** Descreva o logotipo da Unicamp com uso de paralelepípedos e cilindros de tamanhos variáveis. Represente a sua descrição através de uma árvore binária.

### 3.5 Classificação do Espaço Particionado

Uma outra técnica apropriada para descrever um objeto é particionar o espaço onde ele está imerso em células e classificar a ocupação dessas células pelo objeto. O objeto é então representado pelo aglomerado das células classificadas como ocupadas. O tamanho da célula varia com o interesse de cada aplicação. Quando se trata de um espaço bidimensional, a célula é denominada **pixel** (*picture element*) e as células 3D de um espaço tridimensional são chamadas **voxel** (*volume element*).

(Ver Figs. 12.20 e 12.21 do livro-texto de Foley.)

Se o espaço é particionado em células de mesmo tamanho, é comum utilizar matrizes para armazenar os atributos de cada célula. Uma alternativa eficiente para representar o espaço ocupado seria, porém, subdividir as células em tamanhos iguais somente quando elas são parcialmente ocupadas.

(Ver Fig. 12.25 do livro-texto de Foley.)

Essa subdivisão adaptativa induz uma hierarquia na representação das células que pode ser descrita com uso de uma árvore, cujos nós-folha são células ocupadas.

(Ver Figs. 12.22 e 12.23 do livro-texto de Foley.)

Para visualizar os objetos modelados como um aglomerado de células, é feito um pré-processamento de extração das faces das células que correspon-

dem ao bordo do objeto. O método mais antigo, ainda muito utilizado, é o método *marching cube*.

(Ver Fig. 12.20 do livro-texto de Foley.)

**Exercício 3.18** Represente o logotipo da Unicamp como um subespaço de um espaço de células de tamanhos iguais.

### 3.6 Representação Polinomial de Seções Cônicas

As seções cônicas ou superfícies quádricas são as formas analíticas mais utilizadas nas aplicações de Engenharia. Das parábolas, elipses e hipérbolas, somente as parábolas são possíveis de serem representadas por funções polinomiais. Entretanto, podemos utilizar o fato de que qualquer seção cônica em  $\mathbb{R}^2$  pode ser obtida como a projeção de uma parábola em  $\mathbb{R}^3$  e descrevê-la como uma projeção de uma **curva de Bézier** em  $\mathbb{R}^3$  usando as noções de Geometria Projetiva.

Uma forma típica para obter a projeção de uma figura em  $\mathbb{R}^3$  num plano é escolher a origem do sistema de coordenadas cartesianas do  $\mathbb{R}^3$  como o **centro de projeção** e o plano  $z = 1$  como o plano de projeção. Neste caso, todos os pontos  $(wx, wy, w)^t$  ao longo de uma linha que passa pela origem são projetados no ponto  $(x, y, 1)$  do plano  $z = 1$  e todos os planos que passam pela origem são projetados numa linha no plano  $z = 1$ . As linhas paralelas a uma linha  $l$  sobre o plano  $z = 1$ , como linhas definidas pelos pontos  $(x, y, 0)^t$ , interceptam  $l$  em um mesmo ponto no infinito, e as outras linhas interceptam  $z = 1$  em diferentes pontos no finito. O plano  $z$  assim definido permite representar uniformemente os pontos no finito e no infinito. Ele é denominado o **plano projetivo**.

(Ver Fig. 5.5 do livro-texto de Foley.)

Os pontos de um plano projetivo são representados por três coordenadas ao invés de duas coordenadas. As três coordenadas utilizadas para representar um ponto do plano projetivo é conhecido como **coordenadas homogêneas**. Para a projeção que definimos, exceto para os pontos no infinito, as coordenadas do espaço usual podem ser facilmente obtidas através da divisão das coordenadas dos pontos no plano projetivo pela terceira coordenada adicional. Esta terceira coordenada é conhecida como **peso** no contexto de Modelagem Geométrica.

Com isso, podemos representar os pontos de uma seção cônica como a projeção de uma curva de Bézier quádrica  $P(t) = [wx(t) \ wy(t) \ w]^t$  definida pelos pontos de controle  $[w_0x_0 \ w_0y_0 \ w_0]^t$ ,  $[w_1x_1 \ w_1y_1 \ w_1]^t$  e  $[w_2x_2 \ w_2y_2 \ w_2]^t$

em  $\mathbb{R}^3$  sobre plano  $z = 1$ , ou seja,

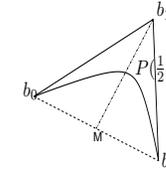
$$P(t) = \frac{w_0b_0B_{2,0}(t) + w_1b_1B_{2,1}(t) + w_2b_2B_{2,2}(t)}{w_0B_{2,0}(t) + w_1B_{2,1}(t) + w_2B_{2,2}(t)},$$

onde  $b_i = [x_i \ y_i]^t$ .

A este tipo de representação, na qual as coordenadas de cada ponto são obtidas como divisão de polinômios, denomina-se **representação racional**.

Foi demonstrado que quando a razão  $s$  entre o segmento  $|MP(\frac{1}{2})|$ , definido pelo ponto médio  $M = \frac{b_0+b_2}{2}$  e o ponto  $P(\frac{1}{2})$ , e o segmento  $|Mb_1|$ , definido por  $M$  e  $b_1$ , for

- igual a  $\frac{1}{2}$ , então temos uma parábola.
- menor que  $\frac{1}{2}$ , então temos uma elipse.
- maior que  $\frac{1}{2}$ , então temos hipérbole.



**Exemplo 3.14** A forma paramétrica conhecida de uma circunferência

$$x = r \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad y = r \frac{2t}{1+t^2}$$

é equivalente a uma curva de Bézier racional com os pontos de controle  $b_0 = [r \ 0]^t$ ,  $b_1 = [r \ r]^t$  e  $b_2 = [0 \ r]^t$  e os pesos  $w_0 = w_1 = 1$  e  $w_2 = 2$ .

**Exercício 3.19** Observe que os parâmetros do Exemplo 3.14 satisfazem as condições de uma elipse.