

## Capítulo 2

# Matemática em Computação Gráfica

Este capítulo tem como objetivo principal revisar alguns conceitos matemáticos que serão utilizados ao longo desta disciplina.

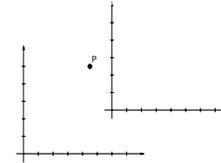
### 2.1 Pontos

A Geometria Analítica nos provê um importante recurso para processar computacionalmente os objetos geométricos de interesse: a representação de um ponto no espaço de  $n$  dimensões por uma lista de  $n$  valores denominados **coordenadas**. A forma mais usual é associar estes valores às distâncias do ponto em relação a um conjunto de planos definido pelos  $n$  eixos ortogonais entre si. Tal sistema de eixos é conhecido como **sistema de coordenadas retangulares** ou **cartesianas**.

No espaço 3D, o sistema de referência cartesiano é constituído por 3 eixos que são designados, respectivamente, por  $x$ ,  $y$  e  $z$  e as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  correspondem, respectivamente, às distâncias aos planos  $yz$ ,  $xz$  e  $xy$ . Dependendo da designação, distinguem-se ainda duas orientações:

- orientação mão-direita: ao rotacionarmos os dedos da mão-direita partindo-se do eixo  $x$  para o eixo  $y$ , o polegar aponta para a direção positiva do eixo  $z$ .
- orientação mão-esquerda: ao rotacionarmos os dedos da mão-esquerda partindo-se do eixo  $x$  para o eixo  $y$ , o polegar aponta para a direção positiva do eixo  $z$ .

**Exercício 2.1** Dados um ponto sobre um plano e dois sistemas de referência cartesianos associados a este plano, como ilustra a figura. Quais são as coordenadas do ponto  $P$  em cada sistema?



A **distância** entre dois pontos  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  dados no sistema cartesiano pode ser obtida pela expressão:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (2.1)$$

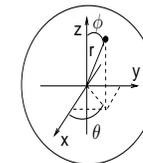
Para problemas que envolvem direções variadas em relação a uma origem  $O$  fixa (**pólo**), é conveniente especificar a posição de um ponto  $P$  em  $\mathbb{R}^3$  com uso de **coordenadas polares**  $(r, \theta, \phi)$ , onde  $r$  é a distância entre os pontos  $O$  e  $P$ , e  $\theta$  e  $\phi$ , os ângulos entre a direção  $\overline{OP}$  e dois eixos (de referência) que passam por  $O$ .

Considerando que os eixos de referência sejam, respectivamente,  $x$  e  $z$ . A conversão das coordenadas polares para as cartesianas é dada por seguintes expressões:

$$x = r \cos\theta \sin\phi \quad y = r \sin\theta \sin\phi \quad z = r \cos\phi \quad (2.2)$$

E das cartesianas para as polares,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \phi = \arccos \frac{z}{r} \quad \theta = \arctg \frac{y}{x} \quad (2.3)$$



Em processamento computacional os pontos são usualmente representados por vetores-linha ou vetores-coluna:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

**Exercício 2.2** Dados dois pontos  $P_1 = [1.0 \ 2.0 \ -3.0]^t$  e  $P_2 = [4.0 \ 1.0 \ -1.0]^t$  representados em coordenadas cartesianas.

1. Represente-os em coordenadas esféricas e cilíndricas.
2. Determine a distância entre os dois pontos: (a) num sistema cartesiano; (b) num sistema esférico; e (c) num sistema cilíndrico. Comente o grau de complexidade em cada sistema.

## 2.2 Vetores

Em Computação Gráfica há muitas situações para as quais é mais conveniente trabalhar com grandezas que não requerem a definição explícita de um sistema de referência. Uma entidade geométrica que favorece a obtenção destas grandezas é o **vetor**.

Vetor é uma grandeza física provida de direção e magnitude (norma). Dois pontos distintos de um sistema cartesiano  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  definem um vetor (de deslocamento de  $P_1$  a  $P_2$ )  $\vec{P_1P_2}$  em  $\mathfrak{R}^3$  conforme a seguinte expressão:

$$\vec{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Análogos aos pontos, os vetores são usualmente representados por vetores-coluna ou vetores-linha. Embora as duas entidades tenham a mesma notação, vale ressaltar aqui que a semântica das duas entidades é bem distinta. Os pontos são descritos através das distâncias “absolutas” aos eixos de um sistema de referência, enquanto os vetores especificam os deslocamentos relativos entre dois pontos. Gráficamente, os pontos são usualmente representados por um “disco” e os vetores por uma seta orientada de  $P_1$  (ponto inicial) para  $P_2$  (ponto final). Segmentos com orientação e magnitude iguais representam um mesmo vetor, independentemente da posição dos seus pontos-extremo no espaço. Uma decorrência imediata deste fato, e de extrema utilidade em termos de processamento computacional, é a possibilidade de representar os modelos geométricos focando somente nas suas características geométricas que sejam invariantes em relação aos sistemas de referência escolhidos.

**Exercício 2.3** Desenhe o vetor definido por dois pontos  $P_1 = [2.0 \ 1.0]^t$  e  $P_2 = [6.5 \ 6.0]^t$  no sistema 2 do Exercício 2.1. Quais são as coordenadas dos pontos  $P_1$  e  $P_2$  em relação ao sistema 1 do Exercício 2.1? Represente graficamente o vetor definido pelos pontos  $P_1$  e  $P_2$  no sistema 1 e compare-o com o vetor no sistema 2 do Exercício 2.1.

A magnitude ou **norma**  $|\vec{a}|$  de um vetor  $\vec{a}$  é, por definição, a distância entre os pontos inicial  $P_1$  e final  $P_2$ , ou seja,

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

onde  $a_1 = x_2 - x_1$ ,  $a_2 = y_2 - y_1$ , e  $a_3 = z_2 - z_1$ .

Um vetor normalizado é um vetor cuja magnitude (ou norma) é igual a 1. A normalização de um vetor pode ser obtida com a divisão de cada componente do vetor pela sua norma.

**Exercício 2.4** Normalize os seguintes vetores: (a)  $(2.0, 7.0)$ ; e (b)  $(1.0, 1.0, 1.0)$ .

Dados os vetores  $\vec{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^t$ ,  $\vec{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3]^t$  e  $\vec{c} = [c_1 \ c_2 \ c_3]^t$ . As seguintes operações algébricas são definidas:

**Adição** :  $\vec{a} + \vec{b} = [a_1 + b_1 \ a_2 + b_2 \ a_3 + b_3]^t$ ;

**Multipliação por um escalar**  $\alpha$  :  $\alpha\vec{a} = [\alpha a_1 \ \alpha a_2 \ \alpha a_3]^t$ ;

**Produto interno ou escalar** :  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$  ou  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \gamma$ , onde  $\gamma$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .

**Produto externo ou vetorial** :  $\vec{a} \times \vec{b} = [a_2 b_3 - a_3 b_2 \ a_3 b_1 - a_1 b_3 \ a_1 b_2 - a_2 b_1]^t$  ou  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \gamma$ , onde  $\gamma$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . A direção do vetor resultante é perpendicular aos vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  e obedece a regra da mão-direita ou mão-esquerda.

**Produto misto** :  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  é igual ao determinante dos vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$ . Uma interpretação geométrica deste produto é o volume do paralelepípedo definido por  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

**Exercício 2.5** Dados dois vetores  $a = [1.0 \ 2.0 \ -3.0]^t$  e  $b = [4.0 \ 1.0 \ -1.0]^t$ .

1. Determine o produto escalar de  $a$  e  $b$ . Esboce o resultado.
2. Determine o produto vetorial de  $a$  e  $b$ . Esboce o resultado.
3. Determine o produto vetorial de  $a$  e  $b$  normalizados e o produto vetorial normalizado de  $a$  e  $b$ . Compare os resultados.

**Exercício 2.6** Dados três vetores:  $a = [2.0 \ 0.0 \ 3.0]^t$ ,  $a = [0.0 \ 6.0 \ 2.0]^t$  e  $a = [3.0 \ 3.0 \ 0.0]^t$ . Qual é o volume do tetraedro definido por eles, sabendo que este volume é  $\frac{1}{6}$  do volume do paralelepípedo pelos mesmos vetores?

O conjunto de vetores em  $\mathbb{R}^n$  e o conjunto de números reais junto com as operações de adição e de multiplicação por escalar definem um **espaço vetorial** sobre os números reais, porque são satisfatórios os seguintes axiomas:

- comutatividade na adição.
- existência de um elemento nulo para adição, o vetor nulo  $\vec{0}$ .
- existência de elementos inversos para adição, o vetor de mesma magnitude e direção mas com sentido oposto.
- associatividade na adição.
- existência do elemento unitário para multiplicação, o escalar 1.0.
- a multiplicação por um produto de escalares é igual à multiplicação do primeiro escalar por um vetor multiplicado pelo segundo.
- a multiplicação de uma soma de vetores por um escalar é igual a soma de vetores multiplicados pelo escalar.
- a multiplicação de um vetor  $\vec{v}$  por uma soma de escalares  $\alpha$  e  $\beta$  é igual a soma dos vetores  $\alpha\vec{v}$  e  $\beta\vec{v}$ .

Chamamos de **combinação linear** de  $m$  vetores  $\vec{a}_{(1)}, \vec{a}_{(2)}, \dots, \vec{a}_{(m)}$  a expressão

$$\alpha_1\vec{a}_{(1)} + \alpha_2\vec{a}_{(2)} + \dots + \alpha_m\vec{a}_{(m)},$$

onde  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ .

Quando a expressão

$$\alpha_1\vec{a}_{(1)} + \alpha_2\vec{a}_{(2)} + \dots + \alpha_m\vec{a}_{(m)} = \vec{0}$$

é somente satisfeita para  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ , dizemos que os vetores  $\vec{a}_{(1)}, \vec{a}_{(2)}, \dots, \vec{a}_{(m)}$  são **linearmente independentes**.

Diz-se que um espaço vetorial  $V$  é de **dimensão** finita  $n$  ou é  $n$ -**dimensional**, se existem  $n$  vetores linearmente independentes  $e_1, e_2, \dots, e_n$  que geram  $V$ . A lista  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  é então chamada uma **base** de  $V$ . Ainda mais, todas as outras bases tem o mesmo número de elementos. Particularmente, a base

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0, 0) \\ &\dots \\ e_n &= (0, 0, 0, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$

é denominada a **base canônica** de  $V$ , a partir da qual geram-se todos os vetores em  $V$  por combinação linear.

**Observação 2.1** Qual é a base canônica de um espaço vetorial de 2 dimensões? E de 3 dimensões?

Os  $n$  vetores linearmente independentes,  $\vec{a}_{(1)} = \overrightarrow{OP_1}$ ,  $\vec{a}_{(2)} = \overrightarrow{OP_2}$ ,  $\dots$ ,  $\vec{a}_{(n)} = \overrightarrow{OP_n}$ , provêm, de fato, uma base para um **sistema de coordenadas afins**, permitindo-nos especificar o **vetor-posição**  $\overrightarrow{OP}$  de um ponto  $P \subset \mathbb{R}^n$  em relação à origem  $O$  com uso dos coeficientes da expressão

$$\overrightarrow{OP} = \alpha_1\vec{a}_{(1)} + \alpha_2\vec{a}_{(2)} + \dots + \alpha_n\vec{a}_{(n)}.$$

Os coeficientes  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , ou múltiplos dos vetores que se combinam linearmente para especificar um vetor-posição  $\overrightarrow{OP}$ , são conhecidos como **coordenadas afins**.

Se  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ , então

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^n \alpha_i(P - O) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(P - O) = \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i.$$

é dita uma **combinação baricêntrica**. Observe que neste caso podemos expressar a posição de um ponto  $P$  em termos da soma algébrica das posições dos pontos  $P_i$ , **independentemente** do ponto de referência  $O$ ,

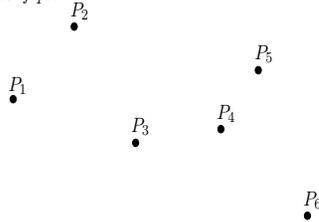
$$P = \sum_{i=1}^m \alpha_i P_i.$$

Com isso, podemos processar os modelos sem nos preocupar com a escolha do sistema de referência. As coordenadas  $\alpha_i$  que satisfazem a condição  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$  são denominadas **coordenadas baricêntricas** e o ponto  $P$  definido com uso destas coordenadas são conhecidas como **ponto baricêntrico**.

Quando os escalares  $\alpha_i$  forem não negativos dizemos que é uma **combinação convexa**. Pode-se mostrar que neste caso  $P$  está no fecho convexo definido pelos pontos  $P_i$ . Um **fecho convexo** é a menor região caracterizada por qualquer segmento que liga dois pontos pertencentes a esta região está também contido na região.

**Exercício 2.7** Mostre que o baricentro de um triângulo é uma combinação convexa dos vértices do triângulo. O baricentro está sempre localizado no interior do triângulo? Justifique.

**Exercício 2.8** Dada uma sequência de pontos  $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$  como ilustra a figura abaixo, esboce o lugar geométrico da combinação convexa destes pontos. Justifique.



### 2.3 Funções

Dados dois conjuntos  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ . Uma **função**, definida em  $\mathcal{A}$ , é uma correspondência que associa a cada elemento em  $\mathcal{A}$  um elemento em  $\mathcal{B}$ .  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são chamados, respectivamente, de **domínio** e **contra-domínio**.

Se temos duas funções  $f$  e  $g$  tais que  $f$  seja definida para todos os elementos que são os resultados que  $g$  pode assumir, então podemos construir uma nova função, representada por  $f \circ g$ , conhecida como **função composta**:

$$f \circ g(\vec{x}) = f[g(\vec{x})]$$

**Exercício 2.9** Dadas as duas funções  $f(x) = 2.0 \operatorname{sen} x$  e  $g(x) = x^2 + x$ .

1. Obter  $h_1(x) = f \circ g(x)$ .
2. Obter  $h_2(x) = g \circ f(x)$ .
3. Quais são as derivadas de  $h_1(x)$  e  $h_2(x)$ ?

Uma função é **diferenciável** se ela admite em todos os pontos derivadas de todas as ordens. Se ela admite derivadas até ordem  $n$ , dizemos que ela é diferenciável ou **contínua até ordem  $n$**  ( $C^n$ ).

**Exercício 2.10** Verificar a diferenciabilidade das seguintes funções:

1.  $f(t) = (a \operatorname{cost}, a \operatorname{sent}, bt)$ .
2.  $y = \sqrt{x^3}$ .

**Observação 2.2** É muito comum processar informações geométricas com uso de funções trigonométricas. Utilizaremos algumas das suas igualdades nesta disciplina:

- $\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \operatorname{cos} y \pm \operatorname{cos} x \operatorname{sen} y$ .
- $\operatorname{cos}(x \pm y) = \operatorname{cos} x \operatorname{cos} y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ .
- $\operatorname{sen} x = \operatorname{cos}(x - \frac{\pi}{2}) = \operatorname{cos}(\frac{\pi}{2} - x)$ .
- $\operatorname{cos} x = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)$ .

Funções **lineares**, definidas sobre os números reais  $\mathfrak{R}$ , é uma expressão com o seguinte aspecto:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b,$$

onde  $a_i$ ,  $b \in \mathfrak{R}$  e os  $x_i$  são **variáveis** (ou incógnitas). Os escalares  $a_i$  são denominados **coeficientes** de  $x_i$ .

**Exemplo 2.1** A combinação linear de vetores é uma função linear.

Dados dois espaços vetoriais  $X$  e  $Y$ . A correspondência que associa a cada vetor  $\vec{x} \in X$  um vetor  $\vec{y} \in Y$  é conhecida como **transformação (mapeamento ou operador)** de  $X$  em  $Y$ . Uma transformação  $F$  é conhecida como **linear** se para todos os vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{x}$  em  $X$  e escalares  $c$  são satisfeitas as duas relações:

$$\begin{aligned} F(\vec{v} + \vec{x}) &= F(\vec{v}) + F(\vec{x}) \\ F(c\vec{x}) &= cF(\vec{x}) \end{aligned}$$

Uma transformação é denominada **isométrica** quando o produto interno dos vetores é preservado, ou seja a norma (ou a magnitude) do vetor permanece inalterada.

**Exemplo 2.2** A transformação  $F(x, y, z) = (-x, y, z)$  é uma transformação linear ( $F((x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)) = F(x_1, y_1, z_1) + F(x_2, y_2, z_2) = (-(x_1 + x_2), (y_1 + y_2), (z_1 + z_2))$ ) e  $F(c(x_1, y_1, z_1)) = cF(x_1, y_1, z_1) = (-cx_1, cy_1, cz_1)$  e **isométrica** (as distâncias entre os pontos são preservadas na transformação).

**Exemplo 2.3** A transformação  $F(x, y, z) = (x + dx, y + dy, z + dz)$  não é linear, pois  $F(cx, cy, cz) = (cx + dx, cy + dy, cz + dz) \neq cF(x, y, z) = (c(x + dx), c(y + dy), c(z + dz))$ .

**Exercício 2.11** Dê duas transformações isométricas e uma transformação não-isométrica.

## 2.4 Matrizes e Transformações

Muitas vezes, transformações lineares são consideradas como sinônimo de “representáveis por matrizes”. Este fato pode simplificar a manipulação de transformações lineares entre os vetores, como veremos nesta disciplina.

Matrizes são disposições “tabulares” de escalares. Uma transformação linear de  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  em  $(b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$  pode ser expressa em um sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

que é equivalente à equação matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ou simplesmente  $A\vec{x} = \vec{b}$ . Chamamos  $A$  de **matriz de transformação**.

**Exercício 2.12** Utilize a notação matricial para descrever o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} x &= 2.0t + 1.0(t - 1) \\ y &= -1.0t + 4.0(t - 1) \\ z &= -1.5t - 2.0(t - 1) \end{aligned}$$

Qual é o lugar geométrico das soluções do sistema para o intervalo  $t \in [0, 1.0]$ ?

Operações algébricas definidas sobre duas matrizes  $A$  e  $B$  são:

**Adição** : de matrizes de mesma dimensão  $m \times n$ .

**Multiplicação por escalar** : cada elemento da matriz é multiplicado pelo escalar.

**Multiplicação** : cada elemento  $ij$  da nova matriz  $AB$  é obtido multiplicando a  $i$ -ésima linha de  $A$  e  $j$ -ésima coluna de  $B$ . Portanto, o número de linhas de  $A$  deve ser igual ao número de colunas de  $B$ .

**Transposição** : cada linha é transposta ordenadamente para coluna da nova matriz.

**Inversão** : a multiplicação de uma matriz (quadrada e inversível) pela sua inversa é uma matriz-identidade. O **método da eliminação** é muito utilizado para inversão de uma matriz. Ele consiste em aplicar a sequência de operações elementares (utilizada para converter a matriz original numa matriz-identidade) na matriz-identidade para chegar à matriz inversa (Seção 2.6.1).

**Observação 2.3** Determine a matriz inversa de:

1.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

2.

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 4.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

É fácil mostrar que a composição de duas transformações lineares  $A(B(\vec{x}))$  pode ser representada como a multiplicação das matrizes de coeficientes, ou seja,  $A(B(\vec{x})) = AB\vec{x}$ .

Algumas propriedades satisfeitas pelas operações de matrizes são:

- Associativa para adição:  $A + (B + C) = (A + B) + C$ .
- $A + 0 = A$ .
- $A + (-A) = 0$ .
- $A + B = B + A$ .
- $k(A + B) = kA + kB$ , onde  $k$  é um escalar.
- $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$ , onde  $k_1$  e  $k_2$  são escalares.
- $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$ .

- $1 \cdot A = A$  e  $0 \cdot A = 0$ .
- $(AB)C = A(BC)$ .
- $A(B + C) = AB + AC$ .
- $(B + C)A = BA + CA$ .
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ , onde  $k$  é um escalar.
- $(A + B)^T = A^T + B^T$ .
- $(A^T)^T = A$ .
- $(kA)^T = kA^T$ , onde  $k$  é um escalar.
- $(AB)^T = B^T A^T$ .
- $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ .

Uma matriz  $A$  quadrada é **ortogonal**, se e somente se, seus vetores-coluna (e também seus vetores-linha) formam um sistema ortonormal (são unitários e ortogonais entre si). Uma transformação **isométrica** pode ser representada por uma matriz ortogonal (portanto, é conhecida também como **transformação ortogonal**). Uma propriedade útil para matrizes ortogonais é  $(A)^{-1} = A^T$ .

Uma matriz  $A$  é **simétrica**, se  $A^T = A$  e é **anti-simétrica**, se  $A^T = -A$ . Além de representar transformações lineares, a notação matricial pode ser utilizada para descrever figuras geométricas quádricas.

**Exemplo 2.4** As seções cônicas e superfícies quádricas são as formas geométricas que aparecem frequentemente. A equação geral de uma seção cônica é

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

que pode ser escrita em forma matricial

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou seja,  $\vec{x}^T A \vec{x}$ . Esta forma de notação matricial é conhecida como **forma quadrática**. Observe que a matriz de coeficientes  $A$  é simétrica.

As superfícies quádricas, por sua vez, são dadas por

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

que, em notação matricial, assume o seguinte aspecto

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & D/2 & F/2 & G/2 \\ D/2 & B & E/2 & H/2 \\ F/2 & E/2 & C & J/2 \\ G/2 & H/2 & J/2 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para determinar os **autovalores** e **autovetores** de uma matriz  $A$ , determinamos primeiro os autovalores  $\lambda$  com uso da expressão

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

onde  $I$  é uma matriz de identidade. Em seguida, calculamos o autovetor correspondente a cada autovetor através da igualdade

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

**Exercício 2.13** Determine os autovalores e os autovetores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -5.0 & 2.0 \\ 2.0 & -2.0 \end{bmatrix}$$

Uma das aplicações de autovetores é a diagonalização da matriz  $A$ . A ideia básica de diagonalização é “desacoplar” as  $n$  variáveis de um sistema linear de  $n$  equações de forma que cada equação possa ser resolvido independentemente das outras. A matriz diagonal  $D$  correspondente à matriz  $A$  é  $D = X^{-1}AX$  sendo  $X$  formada pelos autovetores de  $A$ . Vale ressaltar aqui que uma matriz é diagonalizável, se tiver  $n$  autovetores distintos.

**Exemplo 2.5** As seções cônicas e superfícies quádricas,  $Q$ , podem ser sempre representadas por  $Q = \vec{x}^T D \vec{x}$ , onde  $D$  é uma matriz diagonal. Isso decorre do fato de que  $Q$  pode ser representada por uma forma quadrática  $\vec{y}^T A \vec{y}$ , onde  $A$  é uma matriz real simétrica, como vimos no Exemplo 2.4. Sendo  $A$  uma matriz real simétrica, os seus autovetores formam uma base ortonormal e a matriz  $X$  constituída por estes autovetores satisfaz a propriedade  $X^{-1} = X^T$ . Portanto, a matriz diagonal de  $A$  é  $D = X^{-1}AX = X^T A X$ , ou seja,  $XDX^T = A$  e  $\vec{y}^T XDX^T \vec{y} = \vec{y}^T A \vec{y}$ . Fazendo  $X^T \vec{y} = X^{-1} \vec{x} = \vec{x}$  obtemos a igualdade desejada.

**Exercício 2.14** A qual seção cônica corresponde a seguinte expressão:

$$17x^2 - 30xy + 17y^2 = 128 \quad ?$$

Quais são as direções dos eixos principais?

## 2.5 Números Complexos

Um **número complexo**  $z$  é um par ordenado  $(x, y)$  com  $x, y \in \mathbb{R}$ .  $x$  é chamado a parte real e  $y$  a parte imaginária de  $z$ , ou seja,

$$x = \operatorname{Re} z \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Por definição, dois números complexos são iguais, se a suas partes reais e partes imaginárias forem iguais.

Chamamos de **unidade imaginária** o par  $(0, 1)$ .

Operações definidas para números complexos são

**adição** :  $z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ .

**multiplicação** :  $z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$ .

**divisão** :  $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$ .

**conjugado** :  $\bar{z} = x - iy$ .

Observe que se as partes imaginárias forem nulas, as operações se reduzem às operações definidas para os números reais. Ainda mais, podemos escrever  $z$  na forma

$$z = x + iy,$$

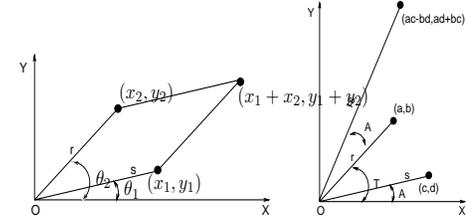
ao definirmos  $i^2 = -1$ .

**Exercício 2.15** Dados dois números complexos  $z_1 = 8 + 3i$  e  $z_2 = 9 - 2i$ . Calcule

1.  $z_1 + z_2$
2.  $z_2 - z_1$
3.  $z_1 z_2$
4.  $\frac{z_1}{z_2}$
5. seus conjugados.

Wessel inventou em 1797 o **diagrama de Argand** (ou o **plano complexo**) para ilustrar graficamente os números complexos e os resultados das operações de adição e multiplicação. O diagrama consiste de dois eixos ortogonais, correspondendo, respectivamente, ao **eixo real** e ao **eixo imaginário**. Cada número é então um ponto neste plano onde a parte real

corresponde a uma coordenada do eixo real e a parte imaginária a uma coordenada do eixo imaginário. Geometricamente a adição do número complexo  $(x_1 + y_1 i)$ , que corresponde ao ponto  $(x_1, y_1)$  no diagrama de Argand, com o outro número  $(x_2 + y_2 i)$  equivale a deslocar o ponto  $(x_1, y_1)$  pelos montantes  $x_2$  e  $y_2$  na direção do eixo real e do eixo imaginário, respectivamente. A multiplicação corresponderia a uma rotação de ângulo  $\alpha = \arctg \frac{y_2}{x_2}$  e a um fator de escala  $s = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ . Este último resultado pode ser demonstrado utilizando a **forma polar** dos números complexos.



Fazendo

$$x = r \cos \theta \quad y = r \operatorname{sen} \theta,$$

onde  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $-\pi < \theta = \arg z = \arctg \frac{y}{x} \leq \pi$ , temos

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \quad \text{ou} \quad z = r e^{i\theta}.$$

Com isso, obtemos

**Multiplicação** :  $z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ .

**Divisão** :  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$ .

Se  $|r_2| = 1$ , a multiplicação e a divisão corresponderiam à rotação do vetor  $(x_1, y_1)$  no sentido anti-horário e no sentido horário, respectivamente.

**Exercício 2.16** Repetir a multiplicação e a divisão dos números complexos dados no Exercício 2.15 usando suas formas polares e compare os resultados.

Representando cada ponto  $[x \ y]^t$  num plano como um número complexo  $(x + iy)$ , podemos então descrever transformações lineares do tipo  $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$  sobre  $[x \ y]^t$  como o produto de dois números complexos

$$(a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay).$$

**Exercício 2.17** É possível escrever em forma de números complexos o seguinte sistema de equações lineares?

$$\begin{aligned}x_n &= x_v \cos \theta - y_v \sin \theta \\ y_n &= x_v \sin \theta + y_v \cos \theta\end{aligned}$$

Esboce a posição relativa entre os dois pontos  $P_v = [x_v \ y_v]$  e  $P_n = [x_n \ y_n]^t$  num plano. Verifique que o vetor  $\overrightarrow{OP_v} = (x_v, y_v)$  foi rotacionado de  $\theta$  no sentido anti-horário em torno da origem  $O$ .

## 2.6 Métodos Numéricos

Para manipular imagens digitais trabalhamos com um grande volume de valores processáveis por métodos aproximados. É comum dispormos de mais de uma técnica ou **método numérico** para solucionar um problema específico. A escolha por uma mais apropriada, de menor complexidade temporal e com menores erros de propagação oriundos de arredondamento, é de fundamental importância para o desempenho de um algoritmo de informações gráficas.

Nesta seção revisamos alguns métodos numéricos que podem ser úteis na implementação dos algoritmos a serem apresentados nesta disciplina. Vale ressaltar aqui que os métodos dados não são sempre os mais apropriados para solução dos problemas que apresentaremos. A discussão detalhada foge do escopo desta disciplina.

### 2.6.1 Método de Eliminação de Gauss: Uma Solução de Sistemas Lineares

É um método “exato”, no sentido de que o método conduz a uma solução exata, após um número finito de passos, a menos dos erros computacionais inerentes à natureza de representação adotada pelos computadores digitais.

O método permite solucionar problemas redutíveis em formas matriciais. Ele consiste essencialmente em converter uma matriz (bem condicionada) dada em matriz identidade, executando uma sequência de operações elementares (multiplicação e soma) sobre as linhas da matriz. É utilizada para inversão das matrizes e na solução de equações não-homogêneas.

**Observação 2.4** Uma matriz bem condicionada é uma matriz quadrada cujas linhas (e colunas) são linearmente independentes.

No caso da inversão de matriz, a mesma sequência de operações elementares, que transforma a matriz  $A$  dada numa identidade, é aplicada sobre uma matriz identidade para obter  $A^{-1}$ .

**Exercício 2.18** Utilize o método de eliminação de Gauss para determinar a matriz inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Para solução de um sistema de equações lineares o princípio de computação é o mesmo, lembrando que

$$AX = B \leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Em outras palavras, o vetor-solução  $X$  é o produto da inversa  $A^{-1}$  da matriz  $A$  pelo vetor-coluna  $B$ .

**Exercício 2.19** Aplique o método de eliminação para solucionar o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{aligned}-x + 3y - 2z &= 7 \\ 3x + 3z &= -3 \\ 2x + y + 2z &= -1\end{aligned}$$

### 2.6.2 Método de Newton-Raphson: Uma Forma de Determinação de Raízes

Em sistema de informações gráficas é comum trabalhar com polinômios de ordem muito elevada, cujas raízes não se consegue obter algebricamente. Vários métodos numéricos foram propostos para tal finalidade. Um método comum é o método de Newton-Raphson, que se aplica às equações polinomiais e transcendentais.

O método de Newton-Raphson inicia com uma raiz aproximada  $x_i$  (o **chute inicial**) da equação  $f(x) = 0$  e faz uso da expansão em série de Taylor para formular um algoritmo recursivo

$$f(x) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \text{Erro}. \quad (2.4)$$

Desprezando o termo *Erro*, estaremos considerando apenas os termos que vão até a primeira derivada e a aproximação corresponde a uma tangente ao gráfico da função  $f(x)$  no ponto  $x_i$ .

(Ver Fig. A.7 do livro-texto de Foley.)

A fórmula de recursão pode ser derivada a partir da Eq. 2.4 e do fato de que  $f(x) = 0$ :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

e o critério de parada da recursão é quando a sequência de  $x_i$  converge, ou seja,  $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$ . Na prática, o teste  $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$  é feita em cada iteração.

**Exercício 2.20** Utilize o método de Newton-Raphson para melhorar o valor  $x = 3,23240$  como raíz da equação

$$x^5 + x^4 - 7x^3 - 22x^2 + x + 1 = 0$$

### 2.6.3 Método de Euler: Uma Técnica de Integração de Equações Diferenciais Ordinárias

As equações que contêm uma ou mais derivadas ordinárias, do tipo

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0,$$

são chamadas **equações diferenciais ordinárias** de ordem  $n$ .

Soluções destas equações são obtidas quando certas restrições são impostas à função  $y(x)$  e suas derivadas, para um particular valor de  $x$  ou para alguns particulares valores de  $x$ .

O procedimento mais simples que se pode adotar para resolver uma equação ordinária de primeira ordem, da forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

é o **método de Euler**, que se baseia na expansão em série de Taylor da função  $y(x)$  em uma vizinhança do ponto de interesse  $x_0$  e truncada após o termo que contém a primeira derivada, ou seja

$$y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + \Delta x \frac{dy}{dx} = y(x_0) + \Delta x f(x_0, y_0).$$

Assim, conhecidas as condições iniciais  $y(x_0)$  e  $f(x_0, y_0)$  podemos obter de forma recorrente o valor da função na iteração  $n$

$$y(x_n) = y(x_{n-1} + \Delta x) = y(x_{n-1}) + \Delta x f(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

### 2.6.4 Diferenças Finitas: Uma Solução de Equações Diferenciais Parciais

As equações que contêm uma ou mais derivadas parciais, do tipo

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2}) = 0,$$

são denominadas **equações diferenciais parciais**.

Embora equações diferenciais parciais descrevem fenômenos que ocorrem de forma contínua, uma técnica para solucioná-las é a **técnica de diferenças finitas** que pressupõe que não se procure uma solução contínua, mas que seja suficiente conhecer o valor da função em algumas amostras do espaço de interesse. O espaço contínuo é, portanto, substituído por uma malha discreta de pontos e as derivadas nestes pontos são expressas por meio dos valores das variáveis calculados nesse ponto e em pontos vizinhos. Ou seja, a derivada parcial  $\frac{\partial y}{\partial x}$  é substituída pela fração  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , ou seja, pela razão da variação de  $y(\vec{x})$  em termos da variação de  $x$

$$\frac{\partial y}{\partial x} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

A aproximação  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  é conhecida por **diferenças finitas**. Esta substituição nos permite reduzir uma equação diferencial parcial num sistema de equações algébricas lineares, para as quais existem várias técnicas robustas de solução, como a técnica da eliminação de Gauss apresentada na Seção 2.6.1.

Há uma notação padrão para os vários tipos de diferenças. Os tipos de diferenças e os símbolos correspondentes são dados na seguinte tabela:

Tipo	Definição	Símbolo
Diferença ascendente	$\Delta f = f(x_{i+1}) - f(x_i)$	$\Delta$
Diferença descendente	$\Delta f = f(x_i) - f(x_{i-1})$	$\nabla$
Diferença centrada	$\Delta f = \frac{1}{2}(f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))$	$\delta$

### 2.6.5 Combinação Convexa: Uma Técnica de Interpolação

É muito comum em algoritmos de informações gráficas fazer interpolação dos valores da amostra para obter um valor que não faz parte da amostra. As interpolações mais comuns são, de fato, as combinações convexas entre os valores conhecidos,  $x_a$  e  $x_b$ :

$$x = u_a x_a + u_b x_b, \text{ com } u_a + u_b = 1 \text{ e } u_a, u_b > 0.$$

**Exercício 2.21** Dada a sequência de quatro pontos:  $[0.5, 4.0]^t$ ,  $[2.5, 0.5]^t$ ,  $[4.0, 4.5]^t$  e  $[2.0, 6.0]^t$ . Determine a interpolação linear dos “quatro pontos”, considerando que todos tenham o mesmo peso.

## 2.6.6 Técnica de Mínimos Quadrados: Uma Técnica de Aproximação

O método dos mínimos quadrados é usualmente utilizado para fazer estimativa de um conjunto dos “coeficientes” de uma função polinomial

$$f(x) = k_0 + k_1x + k_2x^2 + \dots + k_jx^j + \dots + k_mx^m$$

que “melhor se ajusta” a um conjunto de pontos conhecidos  $y_i$ , tendo como critério de avaliação a soma dos quadrados dos resíduos  $(f(x_i) - y_i)^2$ , isto é

$$H = \sum_{i=0}^m [f(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=0}^m [(k_0 + k_1x_i + k_2x_i^2 + \dots + k_jx_i^j + \dots + k_mx_i^m) - y_i]^2.$$

Para isolar os  $k_i$  e reduzir a equação acima num sistema de equações lineares, determina-se as  $m$  derivadas parciais  $\frac{\partial H}{\partial k_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$  e iguala-as a zero

$$\frac{\partial H}{\partial k_1} = \sum_{i=0}^m 2[(k_0 + k_1x_i + k_2x_i^2 + \dots + k_jx_i^j + \dots + k_mx_i^m) - y_i] = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial k_j} = \sum_{i=0}^m 2x_i^j [(k_0 + k_1x_i + k_2x_i^2 + \dots + k_jx_i^j + \dots + k_mx_i^m) - y_i] = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial k_m} = \sum_{i=0}^m 2x_i^m [(k_0 + k_1x_i + k_2x_i^2 + \dots + k_jx_i^j + \dots + k_mx_i^m) - y_i] = 0$$

Com isso, pode-se utilizar a técnica de eliminação para obter os valores  $k_i$  da função, se o sistema (matriz) estiver bem condicionado.

**Exercício 2.22** Utilize o método de mínimos quadrados para obter uma função cúbica que aproxime os seguintes pontos:

$\theta$	0.2	0.6	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6	3.0
$f(\theta)$	0.1987	0.5646	0.8415	0.9854	0.9738	0.8085	0.5154	0.1411

Uma outra alternativa seria estimar um “chute inicial” para os  $k_i$  e melhorá-los com o método de Newton-Raphson.