

# Universidade Estadual de Campinas

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

IA725 (Computação Gráfica I) – 1º semestre de 2005

## Comentários da Primeira Prova Refeita

**Esquema de DeBoor** : Vimos que uma curva de Bézier de grau  $(k-1)$  é definida com uso de funções de base  $N_{i,k}(t)$ , onde  $k$  é a ordem da curva, e um vetor de nós  $[t_1 \ t_2 \ t_3 \ \dots \ t_{n+k}]$ , isto é,

$$P(t) = \sum_{i=1}^n P_i N_{i,k}(t).$$

No problema, foram dados os pontos  $P_1, P_2, P_3, P_4$  e  $P_5$ , o vetor de nós  $\{0, 0, 1, 1, 2, 5, 6, 6\}$  e pediu-se que sejam determinados os pontos  $P(1.5)$  e  $P(4.0)$  da curva de ordem  $k = 3$ . Como  $1.5 \in [t_4, t_5)$  e  $4.0 \in [t_5, t_6)$ , todos chegaram às expressões:

$$\begin{aligned} P(1.5) &= P_4^2(1.5) = P_4^2(1.5)N_{4,1}(1.5) \\ &= (P_3^1(1.5)\frac{t_5-1.5}{t_5-t_4} + P_4^1(1.5)\frac{1.5-t_4}{t_5-t_4}) \\ &= ((P_2^0(1.5)\frac{t_5-1.5}{t_5-t_3} + P_3^0(1.5)\frac{1.5-t_3}{t_5-t_3})\frac{t_5-1.5}{t_5-t_4} + (P_3^0(1.5)\frac{t_6-1.5}{t_6-t_4} + P_4^0(1.5)\frac{1.5-t_4}{t_6-t_4})\frac{1.5-t_4}{t_5-t_4}) \\ &= ((P_2\frac{t_5-1.5}{t_5-t_3} + P_3\frac{1.5-t_3}{t_5-t_3})\frac{t_5-1.5}{t_5-t_4} + (P_3\frac{t_6-1.5}{t_6-t_4} + P_4\frac{1.5-t_4}{t_6-t_4})\frac{1.5-t_4}{t_5-t_4}) \\ P(4.0) &= P_5^2(4.0) = P_5^2(4.0)N_{5,1}(4.0) \\ &= (P_4^1(4.0)\frac{t_6-4.0}{t_6-t_5} + P_5^1(4.0)\frac{4.0-t_5}{t_6-t_5}) \\ &= ((P_3^0(4.0)\frac{t_6-4.0}{t_6-t_4} + P_4^0(4.0)\frac{4.0-t_4}{t_6-t_4})\frac{t_6-4.0}{t_6-t_5} + (P_4^0(4.0)\frac{t_7-4.0}{t_7-t_5} + P_5^0(4.0)\frac{4.0-t_5}{t_7-t_5})\frac{4.0-t_5}{t_7-t_5}) \\ &= ((P_3\frac{t_6-4.0}{t_6-t_4} + P_4\frac{4.0-t_4}{t_6-t_4})\frac{t_6-4.0}{t_6-t_5} + (P_4\frac{t_7-4.0}{t_7-t_5} + P_5\frac{4.0-t_5}{t_7-t_5})\frac{4.0-t_5}{t_7-t_5}) \end{aligned}$$

Se analisarmos bem as expressões, podemos derivar o seguinte esquema de construção, que é conhecido por esquema de DeBoor para obter um ponto  $P(t)$  sobre uma curva de B-Spline de grau  $(k-1)$  dada por  $n$  pontos de controle  $\{P_1, P_2, P_3, P_n\}$  e um vetor de nós  $[t_1 \ t_2 \ t_3 \ \dots \ t_{n+k}]$ :

1. Determinar  $i$ , tal que  $t \in [t_i, t_{i+1})$ ;
2. Como  $P(t) = P_i^{k-1}(t)$ , determinar  $P_i^{k-1}(t)$  recursivamente a partir da seguinte **interpolação linear**:

$$P_i^{k-1}(t) = (P_i^{k-2}(t)\frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} + P_{i-1}^{k-2}(t)\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i})$$

até chegar em  $P_i^0(t) = P_i, P_{i-1}^0(t) = P_{i-1}, \dots, P_{i-k-1}^0(t) = P_{i-k-1}$ .

Analisando no sentido inverso, o processo de construção pode ser iniciado a partir dos  $k$  pontos,  $P_i, P_{i-1}, \dots, P_{i-k-1}$ , e por **interpolações lineares sucessivas**:

$$P_i^{j+1}(t) = (P_{i-1}^j(t)\frac{t_{i+k-j-1}-t}{t_{i+k-j-1}-t_i} + P_i^j(t)\frac{t-t_i}{t_{i+k-j-1}-t_i})$$

com  $j$  variando de 0 até  $(k-2)$ , até chegar em  $P_i^{k-1}(t) = P(t)$ .

**Transformações Geométricas de Coordenadas Homogêneas** : A solução que vocês apresentaram foi baseada na representação (implícita) de um segmento que envolve duas variáveis  $(x, y)$ . Uma forma alternativa seria utilizar a representação paramétrica do segmento:

$$P(t) = (1-t)P_1 + tP_2$$

Isso permite reduzir o número de 2 variáveis em uma variável, o que facilita mais a solução do problema que consiste em aplicar a transformação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

no segmento definido para o intervalo  $t \in [0., 1.]$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = (1-t) \begin{bmatrix} 0. \\ 1. \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4. \\ -2. \\ 1 \end{bmatrix},$$

resultando no segmento

$$\begin{bmatrix} 4t \\ 1-3t \\ 2-3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4t}{2-3t} \\ \frac{1-3t}{2-3t} \\ 1 \end{bmatrix},$$

para o qual  $t = \frac{2}{3}$  não é definido no “finito”, ou seja, o resultado é composto por dois segmentos definidos, respectivamente, nos intervalos  $t \in [0., \frac{2}{3})$  e  $t \in (\frac{2}{3}, 1.]$ . Se plotarmos os dois segmentos, obteremos exatamente os mesmos que a maioria de vocês obtiveram.

É importante frisar que para um objeto geométrico definido através de um conjunto de pontos  $\{P_i\}$ , isto é, dado por uma função  $f(\{P_i\})$ , uma transformação  $T$  aplicada sobre ele,  $Tf(\{P_i\})$ , nem sempre resulta num objeto dado por  $f(T\{P_i\})$ .

Vale ressaltar ainda que o uso da representação paramétrica no processamento de curvas e superfícies é uma prática muito comum em Modelagem Geométrica, porque o número de variáveis requeridas não depende do espaço de imersão do objeto. Ele depende somente da dimensão do objeto, isto é, uma curva é descrita por uma variável, uma superfície por 2 variáveis, e assim por diante.