4.1 Transformações Geométricas Básicas

Embora o foco seja transformações geométricas bi e tridimensionais, apresentaremos, quando possível, formulações gerais para pontos de n -dimensões.

4.1.1 Translação

A **translação** de um ponto num espaço é o **deslocamento** $\vec{d} = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n]^t$ deste ponto de $P_0 = [x_{1,0} \ x_{2,0} \ \dots \ x_{n,0}]^t$ para $P_r = [x_{1,r} \ x_{2,r} \ \dots \ x_{n,r}]^t$. Este deslocamento corresponde à adição de uma parcela d_i a cada coordenada $x_{i,0}$

$$\begin{aligned} x_{1,r} &= x_{1,0} + d_1 \\ x_{2,r} &= x_{2,0} + d_2 \\ x_{3,r} &= x_{3,0} + d_3 \\ &\dots \\ x_{n,r} &= x_{n,0} + d_n \end{aligned} \tag{4.2}$$

Usando notação matricial tem-se

$$\begin{bmatrix} x_{1,r} \\ x_{2,r} \\ \dots \\ x_{n,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ \dots \\ x_{n,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{bmatrix}.$$

(Ver Fig. 5.1 do livro-texto de Foley.)

Exercício 4.1 Dado um segmento $P(t) = (1-t)P_0 + tP_1$, $t \in [0, 1]$. Mostre que $P(t) + \vec{d} = (1-t)(P_0 + \vec{d}) + t(P_1 + \vec{d})$. Por que a igualdade é um resultado computacionalmente importante?

4.1.2 Mudança de Escala

A **mudança de escala** de um objeto implica essencialmente em mudança do seu tamanho. Em termos de vetores, isso equivale a dizer mudar a magnitude dos pares de vetores definidos pelos pontos do objeto. Dados dois pontos a e b em $\mathbb{R}^3$ de um objeto. Um vetor associado a eles é

$$\vec{ab} = a - b$$

cujá magnitude é

$$|\vec{ab}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

Capítulo 4

Transformações Geométricas

Entende-se como **transformação** uma aplicação f que faz corresponder um ponto P do domínio $\mathcal{R}^n$ a um ponto do contra-domínio S^n .

$$f : P \in \mathcal{R}^n \mapsto S^n \tag{4.1}$$

Em sistemas de informações gráficas, as transformações são muito utilizadas para mudar sistemas de referência ($\mathcal{R}^n \neq S^n$) ou mudar a posição dos pontos num mesmo sistema de referência ($\mathcal{R}^n = S^n$). A primeira classe de transformações é recomendada para tratar, por exemplo, um grupo de objetos, em que cada um é descrito em relação a um sistema de coordenadas próprio, enquanto a segunda é apropriada para manipular a posição relativa entre os objetos para compor uma cena mais complexa ou um objeto mais complexo.

Serão apresentadas as cinco transformações básicas – translação (*translation*), rotação (*rotation*), mudança de escala (*scaling*), espelhamento (*reflection*) e deslocamento relativo linear (*shearing*). Veremos que, exceto as translações, estas transformações são lineares; portanto, representáveis por matrizes. No entanto, as translações em P^n equivalem aos deslocamentos relativos lineares em P^{n+1} quando os pontos em P^{n+1} são considerados como homogêneos aos pontos no sub-espaço (hiperplano) $w = 1$ do espaço P^{n+1} . Assim, as cinco transformações sobre pontos em P^n podem ser representadas uniformemente por matrizes de dimensão $(n+1) \times (n+1)$. Na seção 4.2 serão apresentados alguns sistemas de referência mais complicados em Computação Gráfica e algumas transformações entre eles.

Mudar a escala do vetor por um fator γ corresponde a multiplicar $|ab|$ por γ , isto é,

$$\gamma|ab| = \gamma\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

Se $a = [0 \ 0 \ 0]^t$, teremos

$$\gamma|ab| = \gamma\sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2} = \sqrt{(\gamma b_1)^2 + (\gamma b_2)^2 + (\gamma b_3)^2}.$$

(Ver Fig. 5.2 do livro-texto de Foley.)

Em outras palavras, obteremos o efeito de mudança de escala através da multiplicação de cada coordenada x_i por um fator γ . Quando o fator de escala é igual em todas as direções principais, dizemos que a mudança é **uniforme**.

Generalizando, podemos substituir o escalar γ pelo vetor $[\gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3 \ \dots \ \gamma_n]^t$ para produzir efeitos de mudança de escala diferenciada nas n direções canônicas em $\mathbb{R}^n$, ou seja, **mudança de escala não-uniforme**

$$\begin{aligned}x_{1,x} &= \gamma_1 x_{1,x} \\x_{2,x} &= \gamma_2 x_{2,x} \\x_{3,x} &= \gamma_3 x_{3,x} \\&\dots \\x_{n,x} &= \gamma_n x_{n,x}\end{aligned}$$

Em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} x_{1,x} \\ x_{2,x} \\ \dots \\ x_{n,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,x} \\ x_{2,x} \\ \dots \\ x_{n,x} \end{bmatrix}.$$

(Ver Fig. 5.6 do livro-texto de Foley.)

Exercício 4.2 Da forma como a transformação de mudança de escala é definida, é conveniente fixar um ponto do objeto de interesse na origem. Justifique.

Exercício 4.3 Dadas as três vértices de um triângulo $[0 \ 0]^t$, $[1 \ 1]^t$ e $[5 \ 2]^t$. Qual transformação a ser aplicada sobre as vértices do triângulo de forma que a área do triângulo seja dobrada e o ponto $[5 \ 2]^t$ se mantenha fixo.

4.1.3 Deslocamento Relativo Linear

Esta transformação, conhecida em inglês como *shearing* ou em português como **csalhamento**, se caracteriza pela variação linear de uma coordenada em relação às outras, ou seja a nova coordenada transformada $x_{i,x}$ em $\mathbb{R}^n$ pode ser expressa como:

$$x_{i,x} = x_{i,y} + \sum_{j=1, j \neq i}^n (sh_{ij} x_{j,y}).$$

Usando notação matricial, isso equivale a:

$$\begin{bmatrix} x_{1,x} \\ x_{2,x} \\ \dots \\ x_{n,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & sh_{12} & \dots & sh_{1n} \\ sh_{21} & 1 & \dots & sh_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ sh_{n1} & sh_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,y} \\ x_{2,y} \\ \dots \\ x_{n,y} \end{bmatrix}.$$

(Ver Fig. 5.7 do livro-texto de Foley.)

Exercício 4.4 Esboce o efeito de deslocamento relativo de um quadrado unitário $([0 \ 0]^t, [1 \ 0]^t, [1 \ 1]^t$ e $[0 \ 1]^t)$: (a) na direção de x com $sh_{12} = 2$; (b) na direção de y com $sh_{21} = 4$; e (c) o mesmo montante $sh_{12} = sh_{21} = 3$ em ambas as direções.

Observação 4.1 Uma translação em $\mathbb{R}^n$ é um deslocamento relativo em $\mathbb{R}^{n+1}$ se observarmos que

$$\begin{bmatrix} x_{1,x} \\ x_{2,x} \\ \dots \\ x_{n,x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,y} + d_1 \\ x_{2,y} + d_2 \\ \dots \\ x_{n,y} + d_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & d_1 \\ 0 & 1 & \dots & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,y} \\ x_{2,y} \\ \dots \\ x_{n,y} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4.1.4 Rotação

Rotações são transformações em que os pontos giram de um ângulo θ em torno de um dado ponto O . Por convenção, atribuímos valores positivos a θ quando o sentido de giro for anti-horário e negativos quando for horário.

(Ver Fig. 5.3 do livro-texto de Foley.)

Se considerarmos que O seja a origem de um sistema de coordenadas de 2 dimensões; r , a distância entre O e o ponto (x,y) a ser girado; e que ϕ seja o ângulo entre a direção de (x,y) e o eixo x , então:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \phi \\ y &= r \operatorname{sen} \phi\end{aligned}$$

Após a rotação de um ângulo θ , o ângulo entre a direção do “novo” ponto (x_r, y_r) e o eixo x passará para $\theta + \phi$. Assim

$$\begin{aligned}x_r &= r \cos(\theta + \phi) \\ &= r \cos \phi \cos \theta - r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ &= x_r \cos \theta - y_r \operatorname{sen} \theta \\ y_r &= r \operatorname{sen}(\theta + \phi) \\ &= r \operatorname{sen} \phi \cos \theta + r \cos \phi \operatorname{sen} \theta \\ &= y_r \cos \theta + x_r \operatorname{sen} \theta.\end{aligned}$$

Em forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} x_r \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \end{bmatrix}.$$

(Ver Fig. 5.4 do livro-texto de Foley.)

Esta transformação equivale a girar um ponto em torno de um eixo z em $3\pi^3$:

$$\begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{bmatrix}.$$

Analogamente, pode-se derivar a matriz de rotação em torno do eixo x (segundo a regra da mão-direita em relação ao eixo de rotação):

$$R_{x_r}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

e em torno do eixo y ,

$$R_{y_r}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \operatorname{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Observação 4.2 As matrizes de rotação são ortogonais, ou seja, a magnitude dos vetores é preservada nas transformações de rotação.

Exercício 4.5 Quais são as coordenadas de um quadrado $[2, 6]^t$, $[4, 6]^t$, $[4, 8]^t$ e $[2, 8]^t$ após uma rotação de 30° em torno do ponto $[5, 7]^t$?

Observação 4.3 Uma rotação de θ em torno de um eixo qualquer pode ser descrita como uma sequência constituída por três rotações básicas e representada por um vetor $(\operatorname{roll}, \operatorname{pitch}, \operatorname{yaw})$: em torno do eixo x , ângulo de rotação longitudinal (roll); em torno do eixo y , ângulo de declividade (pitch); e em torno do eixo z , ângulo de guinada (yaw). Ou então, na sequência z - y - x .

Em Mecânica, os ângulos roll , pitch e yaw são conhecidos como ângulos de Euler.

4.1.5 Espelhamento

O espelhamento de um ponto P em relação a um hiperplano R^{n-1} no espaço R^n equivale a uma rotação de 180° de P em torno deste hiperplano passando pelo espaço R^{n-1} no qual R^n está imerso.

Num espaço de 2 dimensões define-se o espelhamento em relação a uma reta, enquanto num espaço de 3 dimensões fala-se em espelhamento em relação a um plano.

Exemplo 4.1 A matriz de espelhamento em relação ao plano xy é:

$$M_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

em relação ao plano yz :

$$M_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e em relação ao plano xz :

$$M_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 4.6 Mostre que um espelhamento em relação a uma reta $y = x$ equivale a trocar as coordenadas, isto é, $M[x, y]^t = [y, x]^t$.

4.1.6 Notação Matricial Única

Usando a notação matricial, translação, mudança de escala, deslocamento linear relativo, rotação e o espelhamento são dadas, respectivamente, por:

$$P_r = P_r + T, \quad (4.3)$$

$$P_r = SP_v, \quad (4.4)$$

$$P_r = ShP_v, \quad (4.5)$$

$$P_r = RP_v, \quad (4.6)$$

$$P_r = MP_v. \quad (4.7)$$

O fato da translação ser tratada de forma diferenciada (adição) em relação às outras (que são lineares) dificulta um pouco a composição das transformações. Isso pode ser, entretanto, contornado com a adição de uma coordenada e com a extensão da matriz de transformação por mais uma coluna e uma linha, como observamos em Observação 4.1. Com isso, a representação de um ponto assume o mesmo aspecto da sua representação em coordenadas homogêneas com a restrição de que o valor da coordenada adicional seja 1 (O espaço 3D (x, y, z) seria a projeção de um espaço 4D (x, y, z, w) no “hiperplano” $w = 1$).

Observação 4.4 Uma transformação que satisfaz a seguinte relação

$$\begin{aligned} x_r &= a_{0,0}x_v + a_{0,1}y_v + a_{0,2}z_v + a_{0,3} \\ y_r &= a_{1,0}x_v + a_{1,1}y_v + a_{1,2}z_v + a_{1,3} \\ z_r &= a_{2,0}x_v + a_{2,1}y_v + a_{2,2}z_v + a_{2,3} \end{aligned} \quad (4.8)$$

é uma transformação que preserva o paralelismo. Ela é conhecida como transformação **ahm**.

Exemplo 4.2 A translação de um ponto num espaço bidimensional pode ser expressa como o produto:

$$\begin{bmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

e num espaço tridimensional,

$$\begin{bmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ z + d_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz estendida $M_{m+1,m+1}$ (em relação à matriz $m \times m$)

$$\begin{bmatrix} U_{m,m} & \vdots & U_{m,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{1,m} & \vdots & U_{1,1} \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

onde o bloco $U_{m,m}$ engloba as transformações lineares (espelhamento, mudança de escala, rotação e deslocamento relativo linear) e o bloco $U_{m,1}$ os deslocamentos, permite que a translação e as transformações lineares sejam tratadas de forma uniforme. Assim, a composição destas transformações básicas pode ser reduzida em multiplicações (**concatenações**) das matrizes correspondentes.

Exemplo 4.3 Dado um segmento em $\mathbb{R}^2$ definido pelos dois vértices em coordenadas homogêneas, $(2, -5, 1, 1)$ e $(3, 0, 1, 1)$. Qual seria a forma do segmento transformado pela seguinte transformação?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe ainda que a ação do bloco $U_{1,1}$ é equivalente à **mudança de escala uniforme** (Seção 4.1.2), que está relacionado com os múltiplos dos “pontos homogêneos”:

$$\begin{bmatrix} x_{1,x} \\ x_{2,x} \\ \dots \\ x_{m,x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,x} \\ x_{2,x} \\ \dots \\ x_{m,x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,x} \\ x_{2,x} \\ \dots \\ x_{m,x} \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s}x_{1,x} \\ \frac{1}{s}x_{2,x} \\ \dots \\ \frac{1}{s}x_{m,x} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 4.7 Dada uma curva de Bézier $P(t) = \sum P_i B_i^k(t)$, $t \in [0, 1]$. Mostre que $TP(t) = \sum (TP_i) B_i^k(t)$, onde T é uma transformação afim qualquer. Esboce a rotação de uma curva de Bézier definida pelos pontos de

$$\text{controle } P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O Jacobiano de uma transformação afim dada pelas Eqs. 4.8 é

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial x_w} & \frac{\partial x_c}{\partial y_w} & \frac{\partial x_c}{\partial z_w} \\ \frac{\partial y_c}{\partial x_w} & \frac{\partial y_c}{\partial y_w} & \frac{\partial y_c}{\partial z_w} \\ \frac{\partial z_c}{\partial x_w} & \frac{\partial z_c}{\partial y_w} & \frac{\partial z_c}{\partial z_w} \end{vmatrix}.$$

Se $J = 0$, a transformação não é invertível. Quando $J = 1$, a área é invariante sob a transformação.

Exercício 4.8 Mostre que uma translação, uma rotação, uma mudança de escala ou um deslocamento linear relativo são inversíveis e que o deslocamento relativo não preserva a área.

Exercício 4.9 Obter a matriz de transformação de reflexão de um ponto em relação a um plano arbitrário definido por um ponto $P = [x \ y \ z]^t$ e um vetor normal $\vec{n} = [n_x \ n_y \ n_z]^t$. Aplique esta transformação sobre as coordenadas do seguinte objeto definido pelos vértices:

$$\begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) & (8) & (9) & (10) \\ 1 & 3 & 3 & 2.5 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1.5 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e pelas seguintes faces

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 7 & 2 \\ 8 & 10 & 3 & 2 & 7 \\ 9 & 5 & 4 & 10 & 8 \\ 5 & 9 & 6 & 1 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \end{array}$$

4.2 Transformações entre Sistemas de Coordenadas

As transformações que vimos até agora se restringem a situações em que o sistema de referência permanece inalterado. Uma forma alternativa, porém equivalente, a esta visão, é pensar que houve a mudança de sistemas de referência em relação aos quais os objetos, antes e após a transformação, permaneceram inalterados. Esta segunda visão é bastante útil em Computação

Gráfica para compor, por exemplo, um espaço de cena um conjunto de objetos, cada um definido num sistema de referência próprio.

(Ver Fig. 5.26 do livro-texto de Foley.)

Um dos principais objetivos de Computação Gráfica é viabilizar a síntese de imagens bidimensionais a partir de modelos geométricos 3D (cenas 3D). Como veremos mais adiante, para passar de 3D a 2D, os objetos sofrem uma sequência de transformações. Por eficiência, definem-se então diversos sistemas de coordenadas para distinguir os diferentes espaços em que os diferentes estágios intermediários de um objeto “em transformação” se encontram. A cada espaço associa-se um sistema de coordenadas.

(Ver Fig. 5.23 do livro-texto de Foley.)

Intuitivamente é fácil identificar dois espaços:

Espaço de Objeto O sistema de coordenadas é relativo a um objeto específico. Geralmente, o modelo do objeto está centrado na origem do sistema e tem dimensões normalizadas. O sistema de coordenadas associado a este espaço é denominado de **sistema de coordenadas do objeto, de modelamento ou local**.

(Ver Fig. 5.21 do livro-texto de Foley.)

Espaço de Imagem As coordenadas dos pontos dos objetos são relativas a um sistema de referência fixado no dispositivo de saída. Este sistema de referência é chamado de **sistema de coordenadas da imagem, do dispositivo, ou de rasterização** (*screen-coordinate system*).

(Ver Fig. 5.10 do livro-texto de Foley.)

Para facilitar o entendimento do processo de mapeamento do espaço do objeto para o espaço da imagem, muitos padrões gráficos tridimensionais, como PHIGS, distinguem ainda os seguintes espaços:

Espaço de Cena Corresponde ao espaço que compreende todos os elementos que compõem uma cena. Entre os elementos citam-se os componentes representados no espaço do objeto, as fontes de luz, a câmera virtual e o fundo. Neste espaço é possível estabelecer as posições e as orientações relativas entre os elementos de uma cena, pois as coordenadas dos pontos dos elementos intergrantes da cena são dadas em função de um **sistema de coordenadas global WC** (ou do mundo, em inglês *world-coordinate system*). Tal sistema é também chamado de **sistema de coordenadas da aplicação**, em vista de que as medidas dos elementos estão comumente em escala natural da aplicação.

Espaço de Câmera É conhecido também como o **volume de visão** (*view volume*). Neste espaço destaca-se a posição do observador (ou câmera) na cena, denominada **ponto de referência de projeção** (*projection reference point* – PRP). Os eixos (v, u, n) do sistema de referência deste espaço, conhecido como **sistema de coordenadas de câmera ou do observador** (*view/reference coordinate system* – VRG), são definidos normalmente em função de WC. O eixo n coincide com a normal VPV do **plano de projeção**. A projeção do vetor *view up vector* – VUP) na direção do eixo n define o eixo v . E o eixo u deve ser perpendicular a v e n . A origem deste sistema, especificado em WC, é chamado **ponto de referência de visão** (*view reference point* – VRP). Usualmente, VRP é um ponto sobre o **plano de projeção**. Observe que o vetor VUP indica, de fato, a direção superior da linha de visão.

(Ver Fig. 6.14 do livro-texto de Foley.)

O volume de visão corresponde a uma região da cena de interesse que deve ser visualizada, isto é, que deve ser projetada sobre a área de exibição. Este volume depende, portanto, do plano de projeção (o plano $w=1$), da janela de visão (*window*) (tada por $(w_{min}, w_{max}, v_{min}, v_{max})$), do tipo de projeção (paralela ou perspectiva) e do ponto de referência de projeção (PRP). Para limitar os lados deste volume, são introduzidos ainda os planos de corte diatremo (*front clipping plane*) e traseiro (*back clipping plane*).

Espaço de Visão Normalizado Este espaço corresponde ao volume de visão normalizado. Normalmente, projeta-se os elementos contidos neste espaço num plano, passando assim para o espaço de imagem.

Outros termos, como espaço de textura e espaço de cor, são comumente utilizados na literatura sobre Computação Gráfica, como veremos durante esta disciplina.

Uma transformação que leva um sistema Σ a coincidir com um outro sistema Σ' , de mesmas dimensões, pode ser obtida como concatenação de um conjunto de transformações básicas, como ilustram os seguintes exemplos.

Exemplo 4.4 A transformação T de uma base $\{b_1, b_2, b_3\}$ para a base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ deve ser tal que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$T = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}^{-1}$$

Sendo a matriz $[b_1 \ b_2 \ b_3]$ ortonormal, $T = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}^t$.

Exemplo 4.5 Em Computação Gráfica, objetos definidos no espaço de objeto normalmente seguem a regra da mão-direita e os no espaço de imagem, a da mão-esquerda. Neste caso, é muito frequente a aplicação de transformações entre estes dois sistemas durante o processo de visualização. Portanto, é fácil concluir que a transformação entre os dois sistemas é simplesmente um espelhamento em torno do plano xy :

$$C_{R \leftarrow L} = C_{L \leftarrow R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 4.6 Muitos pacotes gráficos oferecem facilidades para definir as entidades gráficas planares em qualquer unidade métrica apropriada para as aplicações, como milímetro, centímetro, metro e quilômetro, embora que a área de visão (normalmente, uma tela) seja “unificada”. Estes pacotes dispõem, então, de um conjunto de funções que transformam as entidades definidas pelos usuários (em sistema de coordenadas do mundo - *world coordinate system*) para entidades visualizáveis (em sistema de coordenadas do dispositivo - *screen coordinate system*).

(Ver Fig. 5.11 do livro-texto de Foley.)

A região retangular de interesse, que pretendemos visualizar, é denominada a **janela** (*window*) e a região no dispositivo de saída, onde as entidades são “desenhadas”, é chamada **quadro de visão** (*viewport*). Se associarmos a cada um deles um sistema de referência, denominamos o procedimento que mapeia os pontos de uma janela para um quadro como transformação de *window* para *viewport*.

Esta transformação pode ser obtida por meio de aplicações sucessivas das seguintes transformações básicas:

- deslocamento da janela para a origem,
- transferir a janela para o sistema de coordenadas do quadro,
- aplicar a transformação de mudança de escala sobre as coordenadas da janela, para que ela fique de mesmo tamanho do quadro de saída, e

- deslocar a janela para o quadro.

(Ver Figs. 5.12 e 5.13 do livro-texto de Foley.)

Exemplo 4.7 *Somente os pontos contidos no volume de visão normalizados são "imagados". Como os pontos numa cena são dados normalmente em coordenadas de WC e o volume de visão (definido por planos de corte, PRP e a janela de visão) é definido em coordenadas de VRC, precisa-se transformar os pontos da cena de interesse do sistema de WC para o sistema VRC. Esta transformação depende do tipo de projeção, como veremos no Capítulo 5. Para projeções paralelas, em que o volume de visão é um paralelepípedo, a matriz de transformação pode ser obtida com as seguintes operações:*

- deslocar o ponto VRP à origem de WC;
- girar o sistema VRC de tal forma que o eixo n coincida com o eixo z de WC; v com o eixo y e u com o eixo x (considerando que o sistema VRC obedeça à regra da mão direita) e
- deslocar as coordenadas x e y dos raios de projeção em relação à coordenada z , de forma que estes raios fiquem paralelos ao eixo z .

Exercício 4.10 *Obter a matriz de transformação entre as referências:*

1. base canônica; e
2. em relação à base canônica, a origem fique no ponto $P = [P_x \ P_y \ P_z \ 1]^t$, o eixo z coincida com a direção $\vec{d} = [d_x \ d_y \ d_z \ 0]^t$ e o plano yz contenha $\vec{d}$ e o vetor $VUP = [v_x \ v_y \ v_z \ 0]^t$. Considere $P = [4 \ 3 \ -3 \ 1]^t$, $\vec{d} = [-5 \ -1 \ 2 \ 0]^t$ e $VUP = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^t$.

Exercício 4.11 *Qual é a transformação a ser aplicado no vetor normal de um plano se for aplicado nele uma transformação M ? Verifique a direção normal do plano $3x + 1.5y + 0.2z - 4.0 = 0$ após uma rotação de 4° em torno da origem do sistema.*