Capítulo 5

Transformações Projetivas

Vimos que o processo de formação de imagens emula o processo de formação de imagens na retina e que o cristalino do olho humano funciona como uma lente biconvexa. Neste capítulo, estudaremos a construção geométrica de uma imagem usando as noções de semelhança de triângulos e a geometria projetiva. Em processamento de informações gráficas, é comum denominar a correspondência entre os pontos em $\Re^3$ e os pontos em $\Re^2$ de **transformação projetiva**.

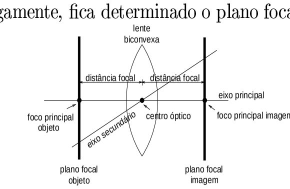
A noção de geometria projetiva foi introduzida no Capítulo 3 quando apresentamos uma representação de seções cônicas como projeções de parábolas em $\Re^3$ sobre um plano. Esta noção é também essencial para síntese e análise de imagens, porque ela permite relacionar as informações geométricas de um espaço tridimensional (o mundo em que estamos imersos) com a geometria bidimensional contida numa imagem. A definição de um **espaço projetivo** é dependente de dois parâmetros: o centro de projeção e o plano de projeção. Em sistemas gráficos, é usual denominar o sistema constituído por um espaço projetivo $\Re^2$ e um plano de projeção "orientado" de **sistema de câmera**.

5.1 Lentes Biconvexas

As lentes biconvexas são sólidos executados em material transparente possuindo duas faces que são calotas esféricas convexas. O **eixo principal** ou **eixo óptico** de uma lente é a reta que passa pelos centros das duas calotas esféricas. Há um ponto na lente, ao longo do eixo principal, por onde os raios luminosos passam sem sofre desvio angular. Este ponto é chamado **centro óptico**. Todas as retas que passam por este centro e não coincidentes com

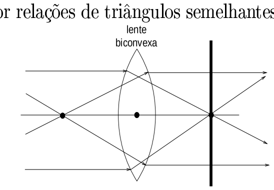
o **eixo principal** são chamadas **eixos secundários**.

É definido ainda para uma lente os **focos principais**. Um **foco objeto principal** de uma lente é o ponto do seu eixo principal cuja imagem se forma no infinito. A distância da lente ao foco objeto é denominada **distância focal objeto**. O ponto do eixo principal onde se forma a imagem de um objeto do infinito é chamado **foco imagem principal** e a distância entre a lente e este foco é **distância focal imagem**. De forma análoga podemos definir os **focos secundários** para os eixos secundários. O conjunto dos focos imagem secundários e principal determina uma **superfície focal imagem** que pode ser aproximada por um plano perpendicular ao eixo principal. Analogamente, fica determinado o plano focal objeto.



Observação 5.1 *Os elementos que definem uma lente biconvexa são os mesmos de uma câmera: um espaço projetivo (origem no centro de centro óptico, eixo z coincidente com o eixo óptico) e um plano de projeção (plano focal imagem).*

Uma lente biconvexa é convergente, porque a sua distância focal imagem é positiva, ou seja, os raios luminosos paralelos que atravessam a lente passam pelo foco imagem. Os raios luminosos que passam pelo foco objeto emergem da lente paralelamente ao eixo óptico. Estas propriedades nos permitem derivar a transformação da geometria de um objeto na geometria de uma imagem por relações de triângulos semelhantes.



Dado um sistema de referência no qual o eixo óptico é coincidente com o eixo z e a origem com o centro óptico. Pode-se verificar que a imagem de um ponto $P = [x\ y\ z]^t$, $z > 0$ é $P_p = [x_p\ y_p\ d]^t$ sobre o plano $z = d > 0$

cujas coordenadas são dadas por

$$x_p = \frac{xd}{z} \quad y_p = \frac{yd}{z} \quad z_p = \frac{zd}{z} \tag{5.1}$$

que corresponde à seguinte notação matricial

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ \frac{z}{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

(Ver Fig. 6.42 do livro-texto de Foley.)

Esta representação nos permite interpretar uma transformação projetiva de um ponto $P = [x\ y\ z]^t$ em $\Re^3$ num plano z como uma "transformação linear" do seu correspondente $[x\ y\ z\ 1]^t$ em $\Re^4$ seguida de uma transformação projetiva ao longo da direção $[x_p\ y_p\ z_p\ \frac{z}{d}]^t$ sobre o hiperplano $w = 1$.

Observação 5.2 *Duas outras diferentes relações algébricas de projeção podem ser derivadas: plano de projeção na origem e plano de projeção no semi-eixo negativo.*

(Ver Fig. 6.43 do livro-texto de Foley.)

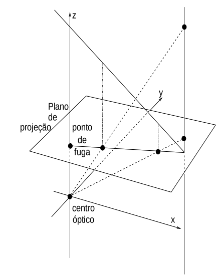
Observação 5.3 *A distância focal d aparece no bloco $U_{1,m}$ da matriz estendida $M_{m+1,m+1}$ da Eq. 4.9.*

Exemplo 5.1 *A projeção de um ponto infinito na direção $[0\ 0\ 1\ 0]^t$ é um ponto no finito $[0\ 0\ d\ 1]^t$ como mostra a seguinte expressão*

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

lembrando ainda que a projeção sobre o plano $w = 1$ ao longo da direção $[0\ 0\ 1\ \frac{1}{d}]^t$

Observação 5.4 *Chamamos de* **pontos de fuga** *(vanishing points) os pontos onde são projetados os pontos no "infinito" ao longo das direções dos eixos da base canônica de um sistema de referência.*



No espaço projetivo bidimensional existem três pontos de fuga.
(Ver Figs. 6.3 e 6.5 do livro-texto de Foley.)

5.2 Tipos de Projeção

A transformação de projeção apresentada na seção 5.1 pode ser generalizada para casos em que os centros ópticos ou centros de projeção não sejam coincidentes com a origem do sistema de referência.

Seja $P_p = [x_p\ y_p\ z_p]^t$ a projeção de um ponto qualquer $P = [x\ y\ z]^t$ por uma linha que sai do centro de projeção (CP) sobre o plano de projeção $z = z_p$. CP pode ser definido pela sua distância Q e a sua direção normalizada $[d_x\ d_y\ d_z]^t$ em relação ao ponto $[0\ 0\ z_p]^t$.

(Ver Fig. 6.44 do livro-texto de Foley.)

O ponto P_p está localizado no segmento entre P e CP:

$$CP + t(P - CP), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Como

$$CP = (0\ 0\ z_p) + Q(d_x\ d_y\ d_z),$$

qualquer ponto pertencente ao segmento é dado por:

$$\begin{aligned} x_{P,CP} &= Qd_x + (x - Qd_x)t, \\ y_{P,CP} &= Qd_y + (y - Qd_y)t, \\ z_{P,CP} &= (z_p + Qd_z) + (z - (z_p + Qd_z))t. \end{aligned} .$$

Particularmente, para o ponto P_p $z_{P,CP} = z_p$

$$t = \frac{z_p - (z_p + Qd_z)}{z - (z_p + Qd_z)}.$$

Substituindo em $x_{P,CP}$ e $y_{P,CP}$, obtemos as coordenadas x_p e y_p no plano de projeção

$$x_p = \frac{x - z\frac{d_x}{d_z} + z_p\frac{d_x}{d_z}}{\frac{z_p - z}{Qd_z} + 1}$$
$$y_p = \frac{y - z\frac{d_y}{d_z} + z_p\frac{d_y}{d_z}}{\frac{z_p - z}{Qd_z} + 1}.$$

Multiplicando o lado direito da equação $z_p = z_p$ por

$$1 = \frac{\frac{z_p - z}{Qd_z} + 1}{\frac{z_p - z}{Qd_z} + 1},$$

obtém-se:

$$z_p = \frac{-z\frac{z_p}{Qd_z} + \frac{z_p^2 + z_pQd_z}{Qd_z}}{\frac{z_p - z}{Qd_z} + 1}.$$

Temos, então, para as três coordenadas o mesmo denominador comum.

Usando notação matricial, P_p pode ser representado por:

$$\left[\ x - z\frac{d_x}{d_z} + z_p\frac{d_x}{d_z} \quad y - z\frac{d_y}{d_z} + z_p\frac{d_y}{d_z} \quad -z\frac{z_p}{Qd_z} + \frac{z_p^2 + z_pQd_z}{Qd_z} \quad \frac{z_p - z}{Qd_z} + 1\ \right]^t,$$

o que equivale a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{d_x}{d_z} & z_p\frac{d_x}{d_z} \\ 0 & 1 & -\frac{d_y}{d_z} & z_p\frac{d_y}{d_z} \\ 0 & 0 & \frac{z_p}{Qd_z} & \frac{z_p^2 + z_pQd_z}{Qd_z} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{Qd_z} & \frac{z_p}{Qd_z} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

Dependendo do valor Q distinguem-se duas classes de projeção:

(Ver Figs. 6.2 e 6.13 do livro-texto de Foley.)

Projeção Paralela: quando o centro de projeção fica no infinito, isto é $Q = \infty$, Eq. 5.3 fica reduzida a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{d_x}{d_z} & z_p\frac{d_x}{d_z} \\ 0 & 1 & -\frac{d_y}{d_z} & z_p\frac{d_y}{d_z} \\ 0 & 0 & 0 & z_p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Ver Figs. 6.6 do livro-texto de Foley.)

Projeção Perspectiva: quando o centro de projeção fica num ponto "finito" do espaço, isto é $Q \in \mathcal{R}$.

(Ver Fig. 6.4 do livro-texto de Foley.)

Podemos ainda distinguir as projeções quanto à direção $\vec{d}$ dos raios projetores em

- projeções ortográficas: $\vec{d}$ é perpendicular ao plano de projeção.
- projeções oblíquas: $\vec{d}$ não é perpendicular ao plano de projeção.

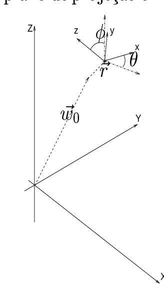
(Ver Figs. 6.7–6.12 do livro-texto de Foley.)

5.3 Modelos de Câmera

Há várias alternativas para modelar ou especificar uma câmera. Como já vimos no Capítulo 4, para simplificar manipulações algébricas é conveniente definir um **sistema (de referência) de câmera** $\{u, v, n\}$ que tem a origem no centro óptico, o eixo n coincidente com o eixo óptico e o eixo v coincidente com o sentido "direto" da imagem.

Em Visão Robótica, uma câmera é modelada através de 5 parâmetros:

1. a distância focal da lente d,
2. a posição da câmera $\vec{w}_0$,
3. o ângulo θ (*pan*) do eixo u em relação à direção $[1\ 0\ 0]^t$ do sistema de referência do mundo,
4. o ângulo ϕ (*tilt*) do eixo n em relação à direção $[0\ 0\ 1]^t$ do sistema de referência do mundo e
5. o deslocamento $\vec{r}$ do plano de projeção em relação à posição da câmera.



Em Computação Gráfica, uma câmera é especificada com uso de 6 parâmetros:

1. o centro de projeção ou posição de câmera,
2. o centro de interesse ou um ponto ao longo do eixo óptico,
3. o sentido da imagem,
4. a distância entre o centro de projeção e o plano de projeção,
5. a largura da imagem e
6. a altura da imagem.

(Ver Fig. 6.35 do livro-texto de Foley.)

Um modelo mais genérico que permite especificar tanto as projeções paralelas como as perspectivas envolve 7 parâmetros:

1. a origem do sistema de referência (VRP),
2. o vetor normal do plano de projeção (VPN),
3. o sentido da imagem (VUP),
4. ponto de referência para projeção (PRP) ou a posição da câmera,
5. o intervalo de coordenadas (u_{min}, u_{max}) no eixo horizontal da imagem,
6. o intervalo de coordenadas (v_{min}, v_{max}) no eixo vertical da imagem,
7. tipo de projeção e

   (Ver Figs. 6.14–6.16 e 6.26 do livro-texto do Foley.)

8. (opcional) o intervalo de coordenadas (n_{min}, n_{max}) no eixo n do sistema VRC.

   (Ver Fig. 6.21 do livro-texto de Foley.)

Observação 5.5 *No terceiro modelo, a direção de PRP para o centro da imagem CW é denominada* **direção de projeção** *DOP.*
(Ver Figs. 6.17–6.20 do livro-texto de Foley.)

5.4 Transformações Perspectivas

O procedimento que utilizamos para derivar Eqs. 5.1 e 5.3 é puramente analítico, fazendo uso das propriedades de triângulos semelhantes. Há, porém, um outro algoritmo de determinação de transformação de projeção mais eficiente que permite eliminar os objetos fora do volume de visão antes da operação de projeção. O princípio básico deste segundo algoritmo é deformar o volume de visão num paralelepípedo com as arestas paralelas ao eixo óptico (eixo n) antes de aplicar uma projeção paralela ortogonal (zerar a coordenada n de cada ponto) com uso da transformação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

À sequência de transformações (lineares) do volume de visão no espaço projetivo chamamos **transformações perspectivas**.

Nesta seção mostramos, passo a passo, a derivação destas transformações perspectivas para raios projetores paralelos e perspectivos a partir do (terceiro) modelo de câmera genérico dado na seção 5.3.

5.4.1 Especificação de Volumes de Visão Normalizados

Aqui vamos apresentar uma forma (entre várias outras!) para especificar o volume de visão normalizado ou o **volume canônico**. É usual considerar que o volume de visão tem um sistema de coordenadas próprio associado. Para projeções paralelas, os planos que delimitam o volume de visão são:

$$x_m = -1 \; ; \; x_M = 1 \; ; \; y_m = -1 \; ; \; y_M = 1 \; ; \; z_M = 0 \; ; \; z_m = -1 \quad (5.4)$$

e para projeções perspectivas,

$$x_M = z \; ; \; x_m = -z \; ; \; y_M = z \; ; \; y_m = -z \; ; \; z_M = -z_{min} \; ; \; z_m = -1 \quad (5.5)$$

com o **eixo ótico** coincidente com o eixo z e perpendicular ao plano de projeção.

5.4.2 Transformação em Volume Canônico

Procuraremos primeiro transformar o sistema de referência do mundo (WC) em sistema de referência de câmera (VRC), de tal forma que as coordenadas dos objetos possam ser dados em relação a VRC. Para isso, precisaremos deslocar a origem do sistema de coordenadas do WC para a origem do sistema de coordenadas VRC que está localizado no VRP, ou seja fazer uma translação:

$$T(-VRP_x,-VRP_y,-VRP_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -VRP_x \\ 0 & 1 & 0 & -VRP_y \\ 0 & 0 & 1 & -VRP_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

seguida de rotações em torno da origem de tal forma que os eixos dos dois sistemas sejam colineares:

$$R = \begin{bmatrix} R1_x & R1_y & R1_z & 0 \\ R2_x & R2_y & R2_z & 0 \\ R3_x & R3_y & R3_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{onde}$$

$$R3 = \frac{VPN}{\|VPN\|};\ R1 = \frac{VUP \times R3}{\|VUP \times R3\|} \text{ e } R2 = R3 \times R1.$$

Aplicando essas transformações sobre os pontos P dos objetos obteremos as coordenadas dos pontos P' em VRC:

$$P' = R \cdot T(-VRP) \cdot P.$$

No sistema VRC o eixo n é coincidente com o vetor normal VPN do plano de projeção.

Agora, dependendo do tipo de projeção, aplicaremos distintas transformações para obter as coordenadas dos objetos normalizadas em relação ao volume canônico definido pela Eq. 5.4 ou pela Eq. 5.5.

Paralela: Se o eixo óptico não for paralelo ao VPN, as coordenadas dos objetos deverão ser "deslocados" em relação ao eixo n. O deslocamento relativo segue a seguinte proporção:

$$\frac{\Delta x}{z} = \frac{dop_x}{-dop_z} \text{ e}$$
$$\frac{\Delta y}{z} = \frac{dop_y}{-dop_z},$$

onde $dop = CW - R \cdot T(-VRP) \cdot PRP$.

Em representação matricial teremos:

$$SH = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{dop_x}{dop_z} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{dop_y}{dop_z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Após esta transformação garantimos que os raios de projeção sobre os objetos são paralelos em relação ao eixo n. Precisaremos somente deslocar a origem do sistema VRC para o centro da janela (T_{par} = T($-\frac{u_{max}+u_{min}}{2}$,$-\frac{v_{max}+v_{min}}{2}$,-F)) e normalizar os pontos dos objetos geométricos em função do volume canônico. A normalização corresponde à mudança de escala do volume de visão em relação ao volume canônico:

$$S_{par} = S\left(\frac{2}{u_{max}-u_{min}}, \frac{2}{v_{max}-v_{min}}, \frac{1}{F-B}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{u_{max}-u_{min}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{v_{max}-v_{min}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{F-B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Concatenando as matrizes de transformação teremos uma única matriz 4×4

$$N_{par} = S_{par} \cdot T_{par} \cdot SH \cdot R \cdot T(-VRP_x, -VRP_y, -VRP_z)$$

para normalizar as coordenadas dos objetos em relação ao volume canônico.

(Ver Fig. 6.47 do livro-texto de Foley.)

Perspectiva: Como consideramos na especificação que a origem do VRC está sobre VRP e que o volume de visão canônico piramidal tem o seu ápice posicionado sobre a origem do VRC, deveremos aplicar então um deslocamento:

$$T(-PRP'_x, -PRP'_y, -PRP'_z), \text{ onde}$$

$PRP' = R \cdot T(-VRP) \cdot PRP$, no sistema de referência.

Se o eixo óptico não coincidir com o VPN, será necessário aplicar um deslocamento relativo, como em projeções paralelas, para que os raios que incidem sobre os objetos fiquem paralelos ao eixo n.

Depois precisaremos mudar a escala das coordenadas u e v, de tal forma que os módulos delas sejam iguais ao módulo da coordenada n (Eq. 5.5). As escalas f_u e f_v serão tais que

$$f_u \frac{u_{max}-u_{min}}{2} \;=\; -VRP'_z \text{ e } f_v \frac{v_{max}-v_{min}}{2} \;=\; -VRP'_z$$

com $n = VRP'$ ($VRP' < 0$). Note que VRP' em VRC corresponde a VRP em WC ($VRP' = VRP \cdot T(-VRP) \cdot R \cdot T(-PRP') \cdot SH$) e que após a transformação de deslocamento relativo, o eixo óptico passa ortogonalmente pelo centro da imagem (CW) em VRC.

Precisaremos ainda mudar a escala das coordenadas para que elas sejam normalizadas em relação ao volume definido pela Eq. 5.5, ou seja $n = (VRP_z{}' + B)$ deve ser reduzido a $n = -1$. Como, após a transformação anterior, os módulos das coordenadas u e v passam a ser iguais ao módulo da coordenada n para cada ponto, as três coordenadas estarão sujeitas ao mesmo fator de escala $(\frac{-1}{(VRP'+B)})$, isto é

$$S \;=\; S\left(-\frac{1}{(VRP_z{}'+B)}, -\frac{1}{(VRP_z{}'+B)}, -\frac{1}{(VRP_z{}'+B)}\right)$$

Concatenando com a transformação anterior teremos uma matriz:

$$S_{per} \;=\; \begin{bmatrix} \frac{2VRP_z{}'}{(u_{max}-u_{min})(VRP_z{}'+B)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2VRP_z{}'}{(v_{max}-v_{min})(VRP_z{}'+B)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{(VRP_z{}'+B)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Ver Fig. 6.54 do livro-texto de Foley.)

Uma vez obtido o volume canônico precisaremos ainda aplicar uma transformação perspectiva para transformar o volume piramidal num paralelepípedo dado pela Eq. 5.4 para reduzir o problema de projeção perspectiva num problema de projeção paralela. Neste caso, será necessário "deformar" os objetos de acordo com a sua distância em relação à posição da câmera (origem do sistema VRC transformado). O fator de deformação é $\frac{1}{-n}$ (observe que $z < 0$):

$$u' \;=\; -\frac{u}{n} \text{ e } v' \;=\; -\frac{v}{n}.$$

Em representação matricial,

$$P \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Depois, para finalizar a transformação de normalização, precisaremos "reajustar" o volume para que ele tenha a profundidade igual a 1, ao invés de $1 + n_{min}$, através da transformação:

$$S(1, 1, \frac{1}{(1+n_{min})})$$

e deslocar o plano frontal transformado $n'_{min} = \frac{n_{min}}{(1+n_{min})}$ para $z = 0$ com o deslocamento:

$$T(0, 0, -\frac{n_{min}}{(1+n_{min})})$$

Concatenando as três últimas matrizes de transformação, chegamos a

$$P_{per} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1+n_{min})} & -\frac{n_{min}}{(1+n_{min})} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Ver Fig. 6.56 do livro-texto de Foley.)

Resumindo, para projeções perspectivas poderemos utilizar a matriz

$$N_{per} \;=\; P_{per} \cdot S_{per} \cdot SH \cdot T(-PRP') \cdot R \cdot T(-VRP)$$

para o processo de projeção e normalização das coordenadas dos objetos de interesse.

(Ver Fig. 6.51 do livro-texto de Foley.)

Vamos apresentar dois exemplos numéricos para mostrar os efeitos de cada passo da transformação de normalização sobre o objeto geométrico:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 5.2 *Dada a seguinte especificação:*

VRP (WC) = (-2 0 -2 1)
VUP (WC) = (0 1 0 0)
VPN (WC) = (1 0 1 0)
PRP (WC) = (2 0 2 1)
Imagem (VRC) = (-2,2,-4,2)
B (VRC) = -10
F (VRC) = 0
tipo de projeção: PARALELA.

Ao invés de utilizar a matriz N_{par} para obter um objeto normalizado, aplicaremos sucessivamente as matrizes $T(-PRP)$, R, SH, T_{par} e S_{par} para mostrar como o objeto "se transforma" para chegar à forma apropriada para aplicação direta de projeção paralela ortogonal.

Passo 1 $T(-VRP)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Passo 2 R:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1.41 & 0 & 1.41 & -1.41 & 0 & -1.41 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1.41 & 2.84 & 1.41 & 2.84 & 2.84 & 4.24 & 2.84 & 4.24 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Passo 3 SH: *A direção dop pode ser obtida através de*

$$dop = [\tfrac{u_{max}-u_{min}}{2}\ \tfrac{v_{max}-v_{min}}{2}\ 0\ 1]^t - R \cdot T(-VRP) \cdot PRP = [0\ -1\ -5.66\ 1]^t.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{0}{-5.66} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{-3}{-5.66} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1.41 & 0 & 1.41 & -1.41 & 0 & -1.41 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1.41 & 2.84 & 1.41 & 2.84 & 2.84 & 4.24 & 2.84 & 4.24 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1.41 & 0 & 1.41 & -1.41 & 0 & -1.41 & 0 \\ 1.25 & 0.49 & -0.75 & -1.51 & 0.49 & -0.25 & -1.51 & -2.25 \\ 1.41 & 2.84 & 1.41 & 2.84 & 2.84 & 4.24 & 2.84 & 4.24 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Passo 4 T_{par}: *O plano frontal é $n = 0$ e o centro de janela é dado por*

$$CW = [\tfrac{u_{max}+u_{min}}{2}\ \tfrac{v_{max}+v_{min}}{2}\ 0\ 1]^t = [\tfrac{2+(-2)}{2}\ \tfrac{2+(-4)}{2}\ 0\ 1]^t = [0\ -1\ 0\ 1]^t.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1.41 & 0 & 1.41 & -1.41 & 0 & -1.41 & 0 \\ 1.25 & 0.49 & -0.75 & -1.51 & 0.49 & -0.25 & -1.51 & -2.25 \\ 1.41 & 2.84 & 1.41 & 2.84 & 2.84 & 4.24 & 2.84 & 4.24 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1.41 & 0 & 1.41 & -1.41 & 0 & -1.41 & 0 \\ 2.25 & 1.49 & 0.25 & -0.51 & 1.49 & 0.75 & -0.51 & -1.25 \\ 1.41 & 2.84 & 1.41 & 2.84 & 2.84 & 4.24 & 2.84 & 4.24 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Passo 5 S_{par}:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{2-(-2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{2-(-4)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{0-(-10)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1.41 & 0 & 1.41 & -1.41 & 0 & -1.41 & 0 \\ 2.25 & 1.49 & 0.25 & -0.51 & 1.49 & 0.75 & -0.51 & -1.25 \\ 1.41 & 2.84 & 1.41 & 2.84 & 2.84 & 4.24 & 2.84 & 4.24 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.71 & 0 & 0.71 & -0.71 & 0 & -0.71 & 0 \\ 0.75 & 0.50 & 0.08 & -0.17 & 0.50 & 0.25 & -0.17 & -0.42 \\ 0.14 & 0.28 & 0.14 & 0.28 & 0.42 & 0.42 & 0.28 & 0.42 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 5.1 *Compare as coordenadas dos vértices do objeto do Exemplo 5.2 em diferentes estágios de transformação.*

Exercício 5.2 *Dados os vértices de uma pirâmide:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e os parâmetros da câmera:

VRP (WC) = ($\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ -4 1)
VUP (WC) = (0 1 0 0)
VPN (WC) = (1 0 1 0)
PRP (WC) = (2 0 2 1)
Imagem (VRC) = (-2,2,-4,2)
B (VRC) = -10
F (VRC) = 0
tipo de projeção: PARALELA.

Desenvolva, passo a passo, a transformação de projeção. Qual é a matriz de transformação?

Exemplo 5.3 *Neste exemplo usaremos a mesma especificação do Exemplo 5.2, mudando apenas o tipo de projeção de paralelo para perspectivo. Assim, as transformações no passo 1 e passo 2 são as mesmas. Mostramos, portanto, os cálculos a partir do passo 3.*

Passo 3 $T(-PRP')$: *Como vimos no Exemplo 5.2*

$$PRP' = R \cdot T(-VRP) PRP = [0\ 0\ 5.66\ 1]^t.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5.66 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1.41 & 0 & 1.41 & -1.41 & 0 & -1.41 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1.41 & 2.84 & 1.41 & 2.84 & 2.84 & 4.24 & 2.84 & 4.24 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1.41 & 0 & 1.41 & -1.41 & 0 & -1.41 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ -4.25 & -2.82 & -4.25 & -2.82 & -2.82 & -1.42 & -2.82 & -1.42 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Passo 4 SH: *A direção dop pode ser obtida através de*

$$dop = [T(-PRP')] \cdot [\tfrac{u_{max}-u_{min}}{2}\ \tfrac{v_{max}-v_{min}}{2}\ 0\ 1]^t - [T(-PRP') \cdot R \cdot T(-VRP) \cdot PRP]^t = [0\ -1\ -5.66\ 1]^t.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{-1}{-5.66} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1.41 & 0 & 1.41 & -1.41 & 0 & -1.41 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ -4.25 & -2.82 & -4.25 & -2.82 & -2.82 & -1.42 & -2.82 & -1.42 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1.41 & 0 & 1.41 & -1.41 & 0 & -1.41 & 0 \\ 2.75 & 2.50 & 0.75 & 0.5 & 2.50 & 2.25 & 0.5 & 0.25 \\ -4.25 & -2.82 & -4.25 & -2.82 & -2.82 & -1.42 & -2.82 & -1.42 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Passo 5 S_{per}: *A escala depende de*

$$VRP' = SH \cdot T(-PRP') \cdot R \cdot T(-VRP) \cdot VRP = [0\ 1.02\ -5.66\ 1]^t$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2(-5.66)}{(2-(-2))(-5.66+(-10))} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2(-5.66)}{(2-(-4))(-5.66+(-10))} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{-5.66+(-10)} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1.41 & 0 & 1.41 & -1.41 & 0 & -1.41 & 0 \\ 2.75 & 2.50 & 0.75 & 0.5 & 2.50 & 2.25 & 0.5 & 0.25 \\ -4.25 & -2.82 & -4.25 & -2.82 & -2.82 & -1.42 & -2.82 & -1.42 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0 & 0.25 & -0.25 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0.33 & 0.30 & 0.09 & 0.01 & 0.30 & 0.27 & 0.01 & 0.03 \\ -0.27 & -0.18 & -0.27 & -0.18 & -0.18 & -0.09 & -0.18 & -0.09 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Note que até este passo o paralelismo é preservado!

Passo 6 P_{per}: *Sabendo que*

$$n_{min} \; = \; VRP'_z + F \; = \; -5.66$$

então

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+(-5.66)} & -\frac{-5.66}{1+(-5.66)} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0 & 0.25 & -0.25 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0.33 & 0.30 & 0.09 & 0.01 & 0.30 & 0.27 & 0.01 & 0.03 \\ -0.27 & -0.18 & -0.27 & -0.18 & -0.18 & -0.09 & -0.18 & -0.09 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0 & 0.25 & -0.25 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0.33 & 0.30 & 0.09 & 0.01 & 0.30 & 0.27 & 0.01 & 0.03 \\ -1.16 & -1.18 & -1.16 & -1.18 & -1.18 & -1.20 & -1.18 & -1.20 \\ 1.27 & 1.18 & 1.27 & 1.18 & 1.18 & 1.09 & 1.18 & 1.09 \end{bmatrix} .$$

Dividindo as coordenadas x, y e z pela coordenada w, obteremos os pontos no espaço euclideano $\Re^3$. Fazendo um esboço deste cubo normalizado, pode-se verificar facilmente que as arestas, antes paralelas ao eixo x e z, não são mais paralelas.

Exercício 5.3 *Resolva o Exercício 5.2 substituindo o tipo de projeção paralelo para perspectivo.*

Exercício 5.4 *Qual matriz corresponde à transformação especificada pela lista de argumentos da função* gluLookAt *da API OpenGL para o sistema de referência adotada pela OpenGL?*

Exercício 5.5 *Qual a correspondência entre os argumentos da função* glFrustum *e* gluPerspective *da API OpenGL?*

Exercício 5.6 *Escreva em formato matricial a transformação especificada pela função* glViewport *da API OpenGL.*