Capítulo 4

Transformações Geométricas

Entende-se como **transformação** uma aplicação f que faz corresponder um ponto P do domínio $\mathcal{R}^n$ a um ponto do contra-domínio $\mathcal{S}^n$:

$$f : P \in \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{S}^n \tag{4.1}$$

Em sistemas de informações gráficas, as transformações são muito utilizadas para mudar sistemas de referência ($\mathcal{R}^n \neq \mathcal{S}^n$) ou mudar a posição dos pontos num mesmo sistema de referência ($\mathcal{R}^n = \mathcal{S}^n$). A primeira classe de transformações é recomendada para tratar, por exemplo, um grupo de objetos, em que cada um é descrito em relação a um sistema de coordenadas próprio; enquanto a segunda é apropriada para manipular a posição relativa entre os objetos para compor uma cena mais complexa ou um objeto mais complexo.

Serão apresentadas as cinco transformações básicas – translação (*translation*), rotação (*rotation*), mudança de escala (*scaling*), espelhamento (*reflection*) e deslocamento relativo linear (*shearing*). Veremos que, exceto as translações, estas transformações são lineares; portanto, representáveis por matrizes. Na seção 4.2 serão apresentados alguns sistemas de referênica mais conhecidos em Computação Gráfica e algumas transformações entre eles. Finalmente, na seção 4.3 são introduzidas as noções básicas de quatérnios, considerados uma alternativa robusta e eficiente para computar as rotações.

4.1 Transformações Geométricas Básicas

Embora o foco seja transformações geométricas bi- e tridimensionais, apresentaremos, quando possível, formulações gerais para pontos de n-dimensões.

4.1.1 Translação

A **translação** de um ponto num espaço é o **deslocamento** $\vec{d} = [d_1\ d_2\ \cdots\ d_n]^t$ deste ponto de $P_v = [x_{1,v}\ x_{2,v}\ \cdots\ x_{n,v}]^t$ para $P_r = [x_{1,r}\ x_{2,r}\ \cdots\ x_{n,r}]^t$. Este deslocamento corresponde à adição de uma parcela d_i a cada coordenada $x_{i,v}$

$$\begin{aligned} x_{1,r} &= x_{1,v} + d_1 \\ x_{2,r} &= x_{2,v} + d_2 \\ x_{3,r} &= x_{3,v} + d_3 \\ & \cdots \\ x_{n,r} &= x_{n,v} + d_n \end{aligned} \tag{4.2}$$

Usando notação matricial tem-se

$$\begin{bmatrix} x_{1,r} \\ x_{2,r} \\ \cdots \\ x_{n,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,v} \\ x_{2,v} \\ \cdots \\ x_{n,v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdots \\ d_n \end{bmatrix}.$$

(Ver Fig. 5.1 do livro-texto de Foley.)

Exercício 4.1 *Dado um segmento $P(t) = (1-t)P_0 + tP_1$, $t \in [0,1]$. Mostre que $P(t)+\vec{d} = (1-t)(P_0+\vec{d})+t(P_1+\vec{d})$. Por que a igualdade é um resultado computacionalmente importante?*

4.1.2 Mudança de Escala

A **mudança de escala** de um objeto implica essencialmente em mudança do seu tamanho. Em termos de vetores, isso equivale a dizer mudar a magnitude dos pares de vetores definidos pelos pontos do objeto. Dados dois pontos a e b em $\Re^3$ de um objeto. Um vetor associado a eles é

$$\vec{ab} = a - b$$

cuja magnitude é

$$|\vec{ab}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

Mudar a escala do vetor por um fator γ corresponde a multiplicar $|\vec{ab}|$ por γ, isto é,

$$\gamma|\vec{ab}| = \gamma\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

Se $a = [0\ 0\ 0]^t$, teremos

$$\gamma|\vec{ab}| = \gamma\sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2} = \sqrt{(\gamma b_1)^2 + (\gamma b_2)^2 + (\gamma b_3^2}.$$

(Ver Fig. 5.2 do livro-texto de Foley.)

Em outras palavras, obteremos o efeito de mudança de escala através da multiplicação de cada coordenada x_i por um fator γ. Quando o fator de escala é igual em todas as direções principais, dizemos que a mudança é **uniforme**.

Generalizando, podemos substituir o escalar γ pelo vetor $[\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \cdots\ \gamma_n]^t$ para produzir efeitos de mudança de escala diferenciada nas n direções canônicas em $\Re^n$, ou seja, **mudança de escala não-uniforme**

$$\begin{array}{rcl} x_{1,r} & = & \gamma_1 x_{1,v} \\ x_{2,r} & = & \gamma_2 x_{2,v} \\ x_{3,r} & = & \gamma_3 x_{3,v} \\ & & \cdots \\ x_{n,r} & = & \gamma_n x_{n,v} \end{array}$$

Em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} x_{1,r} \\ x_{2,r} \\ \cdots \\ x_{n,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,v} \\ x_{2,v} \\ \cdots \\ x_{n,v} \end{bmatrix}.$$

(Ver Fig. 5.6 do livro-texto de Foley.)

E

Observação 4.1 *Da forma como a transformação é definida, é conveniente fixar um ponto do objeto de interesse na origem.*

Exercício 4.2 *Dados os três vértices de um triângulo* $[0\ 0]^t$, $[1\ 1]^t$ *e* $[5\ 2]^t$. *Dobre a área do triângulo, mantendo o ponto* $[5\ 2]^t$ *fixo.*

4.1.3 Deslocamento Relativo Linear

Esta transformação, conhecida em inglês como *shearing* ou em português como **cisalhamento**, se caracteriza pela variação linear de uma coordenada em relação às outras, ou seja a nova coordenada transformada $x_{i,r}$ em $\Re^n$ pode ser expressa como:

$$x_{i,r} = x_{i,v} + \textstyle\sum_{j=1,j\neq i}^{n}(sh_{ij}x_{j,v}).$$

Usando notação matricial, isso equivale a:

$$\begin{bmatrix} x_{1,r} \\ x_{2,r} \\ \cdots \\ x_{n,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & sh_{12} & \cdots & sh_{1n} \\ sh_{21} & 1 & \cdots & sh_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ sh_{n1} & sh_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,v} \\ x_{2,v} \\ \cdots \\ x_{n,v} \end{bmatrix}.$$

(Ver Fig. 5.7 do livro-texto de Foley.)

Exercício 4.3 *Esboce o efeito de deslocamento relativo de um quadrado unitário* ($[0\ 0]^t$, $[1\ 0]^t$, $[1\ 1]^t$ *e* $[0\ 1]^t$)*: (a) na direção de* x *com* $sh_{12} = 2$*; (b) na direção de* y *com* $sh_{21} = 4$*; e (c) o mesmo montante* $sh_{12} = sh_{21} = 3$ *em ambas as direções.*

4.1.4 Rotação

Rotações são transformações em que os pontos giram de um ângulo θ em torno de um dado ponto $\mathcal{O}$. Por convenção, atribuímos valores positivos a θ quando o sentido de giro for anti-horário e negativos quando for horário.

(Ver Fig. 5.3 do livro-texto de Foley.)

Se considerarmos que $\mathcal{O}$ seja a origem de um sistema de coordenadas de 2 dimensões; r, a distância entre $\mathcal{O}$ e o ponto (x,y) a ser girado; e que ϕ seja o ângulo entre a direção de (x,y) e o eixo x, então:

$$x = rcos\phi$$
$$y = rsen\phi.$$

Após a rotação de um ângulo θ, o ângulo entre a direção do "novo" ponto (x_r, y_r) e o eixo x passará para $\theta + \phi$. Assim

$$\begin{array}{rcl} x_r & = & rcos(\theta+\phi) \\ & = & rcos\phi cos\theta - rsen\phi sen\theta \\ & = & x_v cos\theta - y_v sen\theta \\ y_r & = & rsen(\theta+\phi) \\ & = & rsen\phi cos\theta + rcos\phi sen\theta \\ & = & y_v cos\theta + x_v sen\theta. \end{array}$$

Em forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} x_r \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \end{bmatrix}.$$

(Ver Fig. 5.4 do livro-texto de Foley.)

Esta transformação equivale a girar um ponto em torno de um eixo z em $\Re^3$:

$$\begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{bmatrix}.$$

Analogamente, pode-se derivar a matriz de rotação em torno do eixo x (segundo a regra da mão-direita em relação ao eixo de rotação):

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & sen\theta \\ 0 & -sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

e em torno do eixo y,

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sen\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix}.$$

Observação 4.2 *As matrizes de rotação são ortogonais, ou seja, a magnitude dos vetores é preservada nas transformações de rotação.*

Exercício 4.4 *Quais são as coordenadas de um quadrado ($[2\ 6]^t$, $[4\ 6]^t$, $[4\ 8]^t$ e $[2\ 8]^t$) após uma rotação de 30^o em torno do ponto $[5\ 7]^t$?*

Observação 4.3 *Uma rotação de θ em torno de um eixo qualquer pode ser descrita como uma sequência constituída por três rotações básicas e representada por um vetor (roll,pitch,yaw): em torno do eixo x,* **ângulo de rotação longitudinal** *(roll); em torno do eixo y,* **ângulo de declividade** *(pitch); e em torno do eixo z,* **ângulo de guinada** *(yaw). Ou então, na sequência z–y–x.*

Em Mecânica, os ângulos roll, pitch, yaw são conhecidos como **ângulos de Euler**.

4.1.5 Espelhamento

O **espelhamento** é uma rotação bem particular, em que um ponto "sai" do espaço, em que ele está contido, dá um giro de 180^o no espaço de uma dimensão maior e volta em "posição espelhada" ao espaço original.

Num espaço de 2 dimensões define-se o espelhamento em relação a uma reta, enquanto num espaço de 3 dimensões fala-se em espelhamento em relação a um plano.

Exemplo 4.1 *A matriz de espelhamento em relação ao plano xy é:*

$$M_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

em relação ao plano yz:

$$M_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e em relação ao plano xz:

$$M_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 4.5 *Mostre que um espelhamento em relação a uma reta $y = x$ equivale a trocar as coordenadas, isto é, $M[x\ y]^t = [y\ x]^t$.*

4.1.6 Notação Matricial Única

Usando a notação matricial, translação, mudança de escala, deslocamento linear relativo, rotação e o espelhamento são dadas, respectivamente, por:

$$P_r = P_v + T \ , \tag{4.3}$$

$$P_r = SP_v \ , \tag{4.4}$$

$$P_r = ShP_v \ . \tag{4.5}$$

$$P_r = RP_v \ , \tag{4.6}$$

$$P_r = MP_v \ . \tag{4.7}$$

O fato da translação ser tratada de forma diferenciada (adição) em relação às outras (que são lineares) dificulta um pouco a composição das transformações. Isso pode ser, entretanto, contornado com a adição de uma coordenada e com a extensão da matriz de transformação por mais uma coluna e uma linha. Com isso, a representação de um ponto assume o mesmo aspecto da sua representação em coordenadas homogêneas com a restrição de que o valor da coordenada adicional seja 1 (O espaço 3D (x,y,z) seria a projeção de um espaço 4D (x,y,z,w) no "hiperplano" w=1).

Observação 4.4 *Uma transformação que satisfaz a seguinte relação*

$$\begin{aligned} x_r &= a_{0,0}x_v + a_{0,1}y_v + a_{0,2}z_v + a_{0,3} \\ y_r &= a_{1,0}x_v + a_{1,1}y_v + a_{1,2}z_v + a_{1,3} \\ z_r &= a_{2,0}x_v + a_{2,1}y_v + a_{2,2}z_v + a_{2,3} \end{aligned} \tag{4.8}$$

é uma transformação **afim**. *Esta transformação preserva o paralelismo.*

Exemplo 4.2 *A translação de um ponto num espaço bidimensional pode ser expressa como o produto:*

$$\begin{bmatrix} x+d_x \\ y+d_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

e num espaço tridimensional,

$$\begin{bmatrix} x+d_x \\ y+d_y \\ z+d_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz estendida $M_{m+1,m+1}$ (em relação à matriz $m \times m$)

$$\begin{bmatrix} U_{m,m} & \vdots & U_{m,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{1,m} & \vdots & U_{1,1} \end{bmatrix}, \tag{4.9}$$

onde o bloco $U_{m,m}$ engloba as transformações lineares (espelhamento, mudança de escala, rotação e deslocamento relativo linear) e o bloco $U_{m,1}$ os deslocamentos, permite que a translação e as transformações lineares sejam tratadas de forma uniforme. Assim, a composição destas transformações

básicas pode ser reduzida em multiplicações (**concatenações**) das matrizes correspondentes.

Observe ainda que a ação do bloco $U_{1,1}$ é equivalente à **mudança de escala uniforme** (Seção 4.1.2)

$$\begin{bmatrix} x_{1,r} \\ x_{2,r} \\ \cdots \\ x_{m,r} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,v} \\ x_{2,v} \\ \cdots \\ x_{m,v} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,v} \\ x_{2,v} \\ \cdots \\ x_{m,v} \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s}x_{1,v} \\ \frac{1}{s}x_{2,v} \\ \cdots \\ \frac{1}{s}x_{m,v} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 4.6 *Dada uma curva de Bézier* $P(t) = \sum P_i B_i^n(t)$, $t \in [0,1]$. *Mostre que* $TP(t) = \sum (TP_i) B_i^n(t)$, *onde* T *é uma transformação afim qualquer. Esboce a rotação de uma curva de Bézier definida pelos pontos de controle* $P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *e* $P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

O Jacobiano de uma transformação afim dada pelo Sistema 4.8 é dado por

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_r}{\partial x_v} & \frac{\partial x_r}{\partial y_v} & \frac{\partial x_r}{\partial z_v} \\ \frac{\partial y_r}{\partial x_v} & \frac{\partial y_r}{\partial y_v} & \frac{\partial y_r}{\partial z_v} \\ \frac{\partial z_r}{\partial x_v} & \frac{\partial z_r}{\partial y_v} & \frac{\partial z_r}{\partial z_v} \end{vmatrix}.$$

Se $J = 0$, a transformação não é inversível. Quando $J = 1$, a área é invariante sob a transformação.

Exercício 4.7 *Mostre que uma translação, uma rotação, uma mudança de escala ou um deslocamento linear relativo são inversíveis e que o deslocamento relativo não preserva a área.*

Exercício 4.8 *Obter a matriz de transformação de reflexão de um ponto em relação a um plano arbitrário definido por um ponto* $P = [x\ y\ z]^t$ *e um vetor normal* $\vec{n} = [n_x\ n_y\ n_z]^t$. *Aplique esta transformação sobre as coordenadas do seguinte objeto definido pelos vértices:*

$$\begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) & (8) & (9) & (10) \\ 1 & 3 & 3 & 2.5 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1.5 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e pelas seguintes faces

1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	*6*	*7*	*2*	
8	*10*	*3*	*2*	*7*
9	*5*	*4*	*10*	*8*
5	*9*	*6*	*1*	
9	*8*	*7*	*6*	

4.2 Transformações entre Sistemas de Coordenadas

As transformações que vimos até agora se restringem a situações em que o sistema de referência permanece inalterado. Uma forma alternativa, porém equivalente, a esta visão, é pensar que houve a mudança de sistemas de referência em relação aos quais os objetos, antes e após a transformação, permanecem inalterados. Esta segunda visão é bastante útil em Computação Gráfica para compor, por exemplo, num espaço de cena um conjunto de objetos, cada um definido num sistema de referência próprio.

(Ver Fig. 5.26 do livro-texto de Foley.)

Um dos principais objetivos de Computação Gráfica é viabilizar a síntese de imagens bidimensionais a partir de modelos geométricos 3D (cenas 3D). Como veremos mais adiante, para passar de 3D a 2D, os objetos sofrem uma sequência de transformações. Por eficiência, definem-se então diversos sistemas de coordenadas para distinguir os diferentes espaços em que os diferentes estágios intermediários de um objeto "em transformação" se encontram. A cada espaço associa-se um sistema de coordenadas.

(Ver Fig. 5.23 do livro-texto de Foley.)

Intuitivamente é fácil identificar dois espaços:

Espaço de Objeto O sistema de coordenadas é relativo a um objecto específico. Geralmente o modelo do objeto está centrado na origem do sistema e tem dimensões normalizadas. O sistema de coordenadas associado a este espaço é denominado de **sistema de coordenadas do objeto**, **de modelamento** ou **local**.

(Ver Fig. 5.21 do livro-texto de Foley.)

Espaço de Imagem As coordenadas dos pontos dos objetos são relativas a um sistema de referência fixado no dispositivo de saída. Este sistema de referência é chamado de **sistema de coordenadas da imagem**, **do dispositivo**, ou **de rasterização** (*screen-coordinate system*).

(Ver Fig. 5.10 do livro-texto de Foley.)

Para facilitar o entendimento do processo de mapeamento do espaço do objeto para o espaço da imagem, muitos padrões gráficos tridimensionais, como PHIGS, distinguem ainda os seguintes espaços:

Espaço de Cena Corresponde ao espaço que compreende todos os elementos que compõem uma cena. Entre os elementos citam-se os componentes representados no espaço do objeto, as fontes de luz, a câmera virtual e o fundo. Neste espaço é possível estabelecer as posições e as orientações relativas entre os elementos de uma cena, pois as coordenadas dos pontos dos elementos integrantes da cena são dadas em função de um **sistema de coordenadas global WC** (ou **do mundo**, em inglês *world-coordinate system*). Tal sistema é também chamado de **sistema de coordenadas da aplicação**, em vista de que as medidas dos elementos estão comumente em escala natural da aplicação.

Espaço de Câmera É conhecido também como o **volume de visão** (*view volume*). Neste espaço destaca-se a posição do observador (ou câmera) na cena, denominada **ponto de referência de projeção** (*projection reference point* – PRP). Os eixos (v u n) do sistema de referência deste espaço, conhecido como **sistema de coordenadas de câmera** ou **do observador** (*viewing-reference coordinate system* – VRC), são definidos normalmente em função de WC. O eixo n coincide com a normal VPN do **plano de projeção**. A projeção do vetor *view up vector* – VUP) na direção do eixo n define o eixo v. E o eixo u deve ser perpendicular a v e n. A origem deste sistema, especificado em WC, é chamado **ponto de referência de visão** (*view reference point* – VRP). Usualmente, VRP é um ponto sobre o **plano de projeção**. Observe que o vetor VUP indica, de fato, a direção superior da linha de visão.

(Ver Fig. 6.14 do livro-texto de Foley.)

O volume de visão corresponde a uma região da cena de interesse que deve ser visualizada, isto é, que deve ser projetada sobre a á área de exibição. Este volume depende, portanto, do plano de projeção (o plano uv), da janela de visão (*window*) (dada por $(u_{min}, u_{max}, v_{min}, v_{max})$), do tipo de projeção (paralela ou perspectiva) e do ponto de referência de projeção (PRP). Para limitar os dois lados deste volume, são introduzidos ainda os planos de corte dianteiro (*front clipping plane*) e traseiro (*back clipping plane*).

Espaço de Visão Normalizado Este espaço corresponde ao volume de visão normalizado. Normalmente, projeta-se os elementos contidos neste espaço num plano, passando assim para o espaço de imagem.

Outros termos como espaço de textura e espaço de cor são comumente utilizados na literatura sobre Computação Gráfica, como veremos durante esta disciplina.

Uma transformação que leva um sistema Σ coincidir com um outro sistem Σ', de mesmas dimensões, pode ser obtida como concatenacão de um conjunto de transformações básicas, como ilustram os seguintes exemplos.

Exemplo 4.3 *A transformação T de uma base $\{b_1, b_2, b_3\}$ para a base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ deve ser tal que*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$T = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}^{-1}$$

Sendo a matriz $[b_1\ b_2\ b_3]$ ortogonal, $T = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}^t$.

Exemplo 4.4 *Em Computação Gráfica, objetos definidos no espaço de objeto normalmente seguem a regra da mão-direita e os no espaço de imagem, a da mão-esquerda. Neste caso, é muito frequente a aplicação de transfromações entre estes dois sistemas durante o processo de visualização. Por inspeção, é fácil concluir que a transformação entre os dois sistemas é simplesmente um espelhamento em torno do plano xy:*

$$C_{R\leftarrow L} = C_{L\leftarrow R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 4.5 *Muitos pacotes gráficos oferecem facilidades para definir as entidades gráficas planares em qualquer unidade métrica apropriada para as aplicações, como milímetro, centímetro, metro e kilômetro, embora que a área de visão (normalmente, uma tela) seja "limitada". Estes pacotes dispõem, então, de um conjunto de funções que transformam as entidades*

definidas pelos usuários (em sistema de coordenadas do mundo - world coordinate system) para entidades visualizáveis (em sistema de coordenadas do dispositivo - screen coordinate system).

(Ver Fig. 5.11 do livro-texto de Foley.)

A região retangular de interesse, que pretendemos visualizar, é denominada a **janela** *(window) e a região no dispositivo de saída, onde as entidades são "desenhadas", é chamada* **quadro de visão** *(viewport). Se associarmos a cada um deles um sistema de referência, denominamos o procedimento que mapeia os pontos de uma janela para um quadro como transformação de window para viewport.*

Esta transformação pode ser obtida por meio de aplicações sucessivas das seguintes transformações básicas:

- *deslocamento da janela para a origem,*
- *transferir a janela para o sistema de coordenadas do quadro,*
- *aplicar a transformação de mudança de escala sobre as coordenadas da janela, para que ela fique de mesmo tamanho do quadro de saída, e*
- *desclocar a janela para o quadro.*

(Ver Figs. 5.12 e 5.13 do livro-texto de Foley.)

Exemplo 4.6 *Somente os pontos contidos no volume de visão normalizados são "imageados". Como os pontos numa cena são dados normalmente em coordenadas de WC e o volume de visão (definido por planos de corte, PRP e a janela de visão) é definido em coordenadas de VRC, precisa-se transformar os pontos da cena de interesse do sistema de WC para o sistema VRC. Esta transformação depende do tipo de projeção, como veremos no Capítulo 5. Para projeções paralelas, em que o volume de visão é um paralelepípedo, a matriz de transformação pode ser obtida com as seguintes operações:*

- *deslocar o ponto VRP à origem de WC,*
- *girar o sistema VRC de tal forma que o eixo n coincida com o eixo z de WC, v com o eixo y e u com o eixo x (considerando que o sistema VRC obedeça à regra da mão direita) e*
- *deslocar as coordenadas x e y dos raios de projeção em relação à coordenada z, de forma que estes raios fiquem paralelos ao eixo z.*

Exercício 4.9 *Obter a matriz de transformação entre as referências:*

1. *base canônica; e*
2. *em relação à base canônica, a origem fique no ponto* $P = [P_x\ P_y\ P_z\ 1]^t$, *o eixo z coincida com a direção* $\vec{d} = [d_x\ d_y\ d_z\ 0]^t$ *e o plano yz contenha* $\vec{d}$ *e o vetor* $VUP = [v_x\ v_y\ v_z\ 0]^t$. *Considere* $P = [4\ 3\ -3\ 1]^t$, $\vec{d} = [-5\ -1\ 2\ 0]^t$ *e* $VUP = [0\ 1\ 0\ 0]^t$.

Exercício 4.10 *Qual é a transformação a ser aplicado no vetor normal de um plano se for aplicado nele uma transformação M? Verifique a direção normal do plano* $3x + 1.5y + 0.2z - 4.0 = 0$ *após uma rotação de 45º em torno da origem do sistema.*

4.3 Quatérnios e Rotações

Os quatérnios $q = a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3$ são uma extenão dos números complexos. Ao invés de um valor imaginário (i), temos um "vetor imaginário" (i+j+z), tal que

	$\vec{1}$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{1}$	$\vec{1}$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{i}$	$-\vec{1}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$-\vec{1}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$-\vec{1}$

Dizemos que a_0 é a **parte real** ou **escalar** e $\vec{a} = ia_1 + ja_2 + ka_3$, a **parte pura** ou **vetorial**. Um quatérnio que tem a parte real nula é denominado **quatérnio puro**. Similar aos números complexos, o **conjugado** do quatérnio $a_0 + \vec{a}$ é $\bar{q} = a_0 - \vec{a}$ e o quadrado da sua norma $|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. O **inverso** multiplicativo é definido por $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{(q\bar{q})}$. Particularmente, para um quatérnio unitário, $|q| = 1$, $q^{-1} = \bar{q}$.

São definidas entre dois quatérnios $q_1 = a_0 + \vec{a}$ e $q_2 = b_0 + \vec{b}$ as operações

Adição : $q_1 + q_2 = (a_0 + b_0) + (\vec{a} + \vec{b})$, que pode ser expressa com uso de notação matricial é

$$\begin{bmatrix} a_0 + b_0 \\ a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Multiplicação : $q_r = q_1q_2 = (a_0 + b_0 - (\vec{a} \cdot \vec{b})) + (a_0\vec{b} + b_0\vec{a} + \vec{a} \times \vec{b})$. Em notação matricial, temos

$$\begin{bmatrix} q_{0,r} \\ q_{1,r} \\ q_{2,r} \\ q_{3,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -b_1 & b_0 & -b_3 & b_2 \\ -b_2 & b_3 & b_0 & -b_1 \\ -b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix}.$$

A primeira multiplicação é conhecida como **multiplicação esquerda** que corresponde a uma transromação linear $L_a(b)$ associando q_2 a q_1q_2 e a segunda, **multiplicação direita** $R_b(a)$ que mapeia q_1 a q_1q_2.

Os quatérnios são **associativos** e **não são comutativos**.

De forma análoga aos números complexos, podemos representar geometricamente os quatérnios unitários sobre um plano ao definirmos $\vec{I} = iu_1 + ju_2 + ku_3$ com $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$. Podemos escrever q na forma $a_0 + \mu\vec{I}$. Se adicionalmente $|q| = r$, então existe θ tal que $a_0 = rcos\theta$ e $\mu = rsen\theta$. Isso significa que podemos escrever q na forma polar $r(cos\theta + \vec{I}sen\theta) = re^{\vec{I}\theta}$, o que poderá simplificar as multiplicações entre os quatérnios.

É possível demonstrar que se representarmos cada ponto no espaço $\Re^3$ como um quatérnio puro $P = ix + jy + kz$, uma rotação $T(P)$ deste ponto de um ângulo igual a 2θ em torno de um vetor $\vec{I}$ que passa pela origem pode ser dada por

$$T(P) = aPa^{-1}, onde\ \ a = re^{\vec{I}\theta},\ r > 0 \text{ e } \vec{I}^2 = -1.$$

Este resultado nos provê uma ferramenta eficiente e numericamente estável para concatenar as rotações. Supomos que q_1 e q_2 sejam dois quatérnios unitários representando duas rotações. A concaternação da aplicação das duas rotações sobre um ponto P equivale a

$$q_2(q_1Pq_1^{-1})q_2^{-1}$$

Por associatividade,

$$(q_2q_1)P(q_1^{-1}q_2^{-1}) = (q_2q_1)P(q_2q_1)^{-1}.$$

Como o produto de duas matrizes requer um número de operações elementares maior que o produto de dois quatérnios, recomenda-se obter o resultado da concaternação das rotações com uso de quatérnios. Quando se precisa aplicá-lo sobre um conjunto de pontos, faz-se então a sua conversão para a notação matricial.

Exemplo 4.7 *Derive, com uso de quatérnios, a rotação em torno do eixo z por um ângulo θ.*

Neste caso, $\vec{I} = k$ e $a = e^{\vec{I}\frac{\theta}{2}} = cos\frac{\theta}{2} + ksen\frac{\theta}{2}$, cuja inversa é $a = cos\frac{\theta}{2} - ksen\frac{\theta}{2}$. Portanto,

$$T(P) = (cos\frac{\theta}{2} + ksen\frac{\theta}{2})((ix + jy + kz)(cos\frac{\theta}{2} - ksen\frac{\theta}{2})).$$

Utilizando a notação matricial, temos

$$\begin{aligned}
T(P) &= \begin{bmatrix} cos\frac{\theta}{2} & 0 & 0 & -sen\frac{\theta}{2} \\ 0 & cos\frac{\theta}{2} & -sen\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & sen\frac{\theta}{2} & cos\frac{\theta}{2} & 0 \\ sen\frac{\theta}{2} & 0 & 0 & cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \cdot \\
&\quad \cdot(\begin{bmatrix} cos\frac{\theta}{2} & 0 & 0 & sen\frac{\theta}{2} \\ 0 & cos\frac{\theta}{2} & -sen\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & sen\frac{\theta}{2} & cos\frac{\theta}{2} & 0 \\ -sen\frac{\theta}{2} & 0 & 0 & cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sen\theta & 0 \\ 0 & sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Exercício 4.11 *Com uso de quatérnios, obtém o efeito da sequência de duas rotações: (1) rotação em torno do eixo y por 30^o e (2) rotação em torno do eixo x por 45^o. Qual é a matriz correspondente?*

Exercício 4.12 *Com uso do quatérnio, derive a matriz de rotação em torno da direção $[u_x\ u_y\ u_z]^t$ por um ângulo θ.*