Capítulo 2

Matemática em Computação Gráfica

Este capítulo tem como objetivo principal revisar alguns conceitos matemáticos que serão utilizados ao longo desta disciplina.

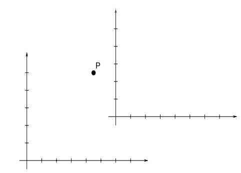
2.1 Pontos

Um **ponto** no espaço de n dimensões pode ser identificado por uma lista de n valores denominados **coordenadas**. A forma mais usual é associar estes valores às distâncias do ponto em relação a um conjunto de planos defindo pelos n eixos ortogonais entre si. Tal sistema de eixos é conhecido como **sistema de coordenadas retangulares** ou **cartesianas**.

No espaço 3D, o sistema de referência cartesiano é constituído por 3 eixos que são designados, respectivamente, por x, y e z e as coordenadas x, y e z correspondem, respectivamente, às distâncias aos planos yz, xz e xy. Dependendo da designação, distinguem-se ainda duas orientações:

- orientação mão-direita: ao rotacionarmos os dedos da mão-direita partindo-se do eixo x para o eixo y, o polegar aponta para a direção positiva do eixo z.
- orientação mão-esquerda: ao rotacionarmos os dedos da mão-esquerda partindo-se do eixo x para o eixo y, o polegar aponta para a direção positiva do eixo z.

Exercício 2.1 *Dados um ponto sobre um plano e dois sistemas de referência cartesianos associados a este plano, como ilustra a figura abaixo. Quais são as coordenadas do ponto P em cada sistema?*



A **distância** entre dois pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ dados no sistema cartesiano pode ser obtida pela expressão:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{2.1}$$

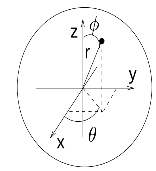
Para problemas que envolvem direções variadas em relação a uma origem O fixa (**pólo**), é conveniente especificar a posição de um ponto P em $\Re^3$ com uso de **coordenadas polares** (r, θ, ϕ), onde r é a distância OP e θ e ϕ são os ângulos que a direção OP faz em relação a dois eixos fixos que passam por O.

Considerando que os eixos de referência sejam respectivamente x e z. A conversão das coordenadas polares para as cartesianas é dada por seguintes equações:

$$x = rcos\theta sen\phi \quad y = rsen\theta sen\phi \quad z = rcos\phi \tag{2.2}$$

E das cartesianas para as polares,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \phi = arccos\frac{z}{r} \quad \theta = arctg\frac{y}{x} \tag{2.3}$$



Em processamento computacional notações mais utilizadas para representar os pontos são vetores-linha ou vetores-coluna:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Exercício 2.2 *Dados dois pontos $P_1 = [1.0\ 2.0\ {-3.0}]^t$ e $P_1 = [4.0\ 1.0\ {-1.0}]^t$ em sistemas cartesianos.*

1. *Represente-os em sistemas esféricos e cilíndricos.*
2. *Determine a distância entre os dois pontos: (a) num sistema cartesiano; (b) num sistema esférico; e (c) num sistema cilíndrico.*

2.2 Vetores

Vetor é uma grandeza física provida de direção e magnitude (norma). Dois pontos distintos de um sistema cartesiano $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ definem um vetor (de deslocamento de P_1 a P_2) $\vec{P_1P_2}$ em $\Re^3$ conforme a seguinte expressão:

$$\vec{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Exercício 2.3 *Desenhe o vetor definido por dois pontos $P_1 = [2.0\ 1.0]^t$ e $P_2 = [6.5\ 6.0]^t$ no sistema 2 do Exercício 2.1. Quais são as coordenadas dos ponto P_1 e P_2 em relação ao sistema 1 do Exercício 2.1? Represente graficamente o vetor definido pelos pontos P_1 e P_2 no sistema 1 e compare-o com o vetor no sistema 2 do Exercício 2.1.*

Análogos aos pontos, os vetores são usualmente representados por vetores-coluna ou vetores-linha. Graficamente, os vetores são representados por um segmento orientado de P_1 (ponto inicial) para P_2 (ponto final). Vale ressaltar aqui que segmentos com orientação e magnitude iguais representam um mesmo vetor, independentemente da sua posição no espaço.

A magnitude ou **norma** $|\vec{a}|$ de um vetor $\vec{a}$ é, por definição, a distância entre os pontos inicial e final, ou seja,

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Um vetor normalizado é um vetor cuja magnitude (ou norma) é igual a 1. A normalização de um vetor pode ser obtida com a divisão de cada componente do vetor pela sua norma.

Exercício 2.4 *Normalize os seguintes vetores: (a) (2.0, 7.0); e (b) (1.0, 1.0, 1.0).*

Dados os vetores $\vec{a} = [a_1\ a_2\ a_3]^t$, $\vec{b} = [b_1\ b_2\ b_3]^t$ e $\vec{c} = [c_1\ c_2\ c_3]^t$. As seguintes operações algébricas são definidas:

Adição : $\vec{a} + \vec{b} = [a_1 + b_1\ a_2 + b_2\ c_1 + c_2]^t$;

Multiplicação por um escalar α : $\alpha\vec{a} = [\alpha a_1\ \alpha a_2\ \alpha a_3]^t$;

Produto interno ou escalar : $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ ou $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\ cos\gamma$, onde γ é o ângulo entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Produto externo ou vetorial : $\vec{a} \times \vec{b} = [a_2b_3 - a_3b_2\ a_3b_1 - a_1b_3\ a_1b_2 - a_2b_1]^t$ ou $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\ sen\gamma$, onde γ é o ângulo entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. A direção do vetor resultante é perpendicular aos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e obedece a regra da mão-direita ou mão-esquerda.

Produto misto : $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ é igual ao determinante dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$. Uma interpretação geométrica deste produto é o volume do paralelepípedo definido por a, b e c.

Exercício 2.5 *Dados dois vetores $a = [1.0\ 2.0\ -3.0]^t$ e $b = [4.0\ 1.0\ -1.0]^t$.*

1. *Determine o produto escalar de a e b. Esboce o resultado.*
2. *Determine o produto vetorial de a e b. Esboce o resultado.*
3. *Determine o produto vetorial de a e b normalizados e o produto vetorial normalizado de a e b. Compare os resultados.*

Exercício 2.6 *Dados três vetores: $a = [2.0\ 0.0\ 3.0]^t$, $a = [0.0\ 6.0\ 2.0]^t$ e $a = [3.0\ 3.0\ 0.0]^t$. Qual é o volume do tetraedro definido por eles, sabendo que este volume é $\frac{1}{6}$ do volume do paralelepípedo pelos mesmos vetores?*

O conjunto de vetores em $\Re^n$ e o conjunto de números reais junto com as operações de adição e de multiplicação por escalar definem um **espaço vetorial** sobre os números reais, porque são satisfeitos os seguintes axiomas:

- comutatividade na adição.
- existência de um elemento nulo para adição, o vetor nulo $\vec{0}$.
- existência de elementos inversos para adição, o vetor de mesma magnitude e direção mas com sentido oposto.
- associatividade na adição.
- existência do elemento unitário para multiplicação, o escalar 1.0.
- a multiplicação por um produto de escalares é igual à multiplicação do primeiro escalar por um vetor multiplicado pelo segundo.

- a multiplicação de uma soma de vetores por um escalar é igual a soma de vetores multiplicados pelo escalar.
- a multiplicação de um vetor $\vec{v}$ por uma soma de escalares α e β é igual a soma dos vetores $\alpha\vec{v}$ e $\beta\vec{v}$.

Chamamos de **combinação linear** de m vetores $\vec{a}_{(1)}$, $\vec{a}_{(2)}$, $\cdots$, $\vec{a}_{(m)}$ a expressão

$$\alpha_1\vec{a}_{(1)} + \alpha_2\vec{a}_{(2)} + \cdots + \alpha_m\vec{a}_{(m)},$$

onde $\alpha_i \in \Re$.

Quando a expressão

$$\alpha_1\vec{a}_{(1)} + \alpha_2\vec{a}_{(2)} + \cdots + \alpha_m\vec{a}_{(m)} = \vec{0}$$

é somente satisfeita para $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$, dizemos que os vetores $\vec{a}_{(1)}$, $\vec{a}_{(2)}$, $\cdots$, $\vec{a}_{(m)}$ são **linearmente independentes**.

Diz-se que um espaço vetorial V é de **dimensão** finita n ou é n-**dimensional**, se existem n vetores linearmente independentes e_1, e_2, $\cdots$, e_n que geram V. A lista $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ é então chamada uma **base** de V. Ainda mais, todas as outras bases tem o mesmo número de elementos. Particularmente, a base

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,\cdots,0,0) \\ e_2 &= (0,1,0,\cdots,0,0) \\ &\cdots \\ e_n &= (0,0,0,\cdots,0,1) \end{aligned}$$

é denominada a **base canônica** de V, a partir da qual geram-se todos os vetores em V por combinação linear.

Observação 2.1 *Qual é a base canônica de um espaço vetorial de 2 dimensões? E de 3 dimensões?*

Dado um conjunto de m pontos P_i e um ponto de referência P_0, definimos como **ponto baricêntrico** P o ponto obtido pela **combinação baricêntrica** dos vetores $\vec{P_iP_0}$ da seguinte maneira

$$P - P_0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(P_i - P_0)$$

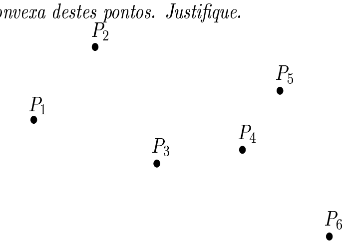
com $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$. Algumas manipulações algébricas nos leva à equação

$$P = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_i.$$

Quando os escalares α_i forem não negativos dizemos que é uma **combinação convexa**. Pode-se mostrar que neste caso P está no fecho convexo definido pelos pontos P_i. Um **fecho convexo** é a menor região caracterizada por qualquer segmento que liga dois pontos pertencentes a esta região está também contido na região.

Exercício 2.7 *Mostre que o baricentro de um triângulo é uma combinação convexa dos vértices do triângulo. O baricentro está sempre localizado no interior do triângulo? Justifique.*

Exercício 2.8 *Dada uma sequência de pontos $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ como ilustra a figura abaixo, esboce o lugar geométrico dos pontos obtidos como a combinação convexa destes pontos. Justifique.*



2.3 Funções

Dados dois conjuntos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Uma **função**, definida em $\mathcal{A}$, é uma correspondência que associa a cada elemento em $\mathcal{A}$ um elemento em $\mathcal{B}$. $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são chamados, respectivamente, de **domínio** e **contra-domínio**.

Se temos duas funções f e g tais que f seja definida para todos os elementos que são os resultados que g pode assumir, então podemos construir uma nova função, representada por $f \circ g$, conhecida como **função composta**:

$$f \circ g(\vec{x}) = f[g(\vec{x})]$$

Exercício 2.9 *Dadas as suas funções $f(x) = 2.0senx$ e $g(x) = x^2 + x$.*

1. *Obter $h_1(x) = f \circ g(x)$.*
2. *Obter $h_2(x) = g \circ f(x)$.*
3. *Quais são as derivadas de $h_1(x)$ e $h_2(x)$?*

Uma função é **diferenciável** se ela admite em todos os pontos derivadas de todas as ordens. Se ela admite derivadas até ordem n, dizemos que ela é diferenciável ou **contínua até ordem** n (C^n).

Exercício 2.10 *Verificar a diferenciabilidade das seguintes funções:*

1. $f(t) = (acost, asent, bt)$.
2. $y = \sqrt{x^3}$.

Observação 2.2 *É muito comum processar informações geométricas com uso de funções trigonométricas. Utilizaremos algumas igualdades desta categoria de funções nesta disciplina:*

- $sen(x \pm y) = senxcosy \pm cosxseny$.
- $cos(x \pm y) = cosxcosy \mp senxseny$.
- $senx = cos(x - \frac{\pi}{2}) = cos(\frac{\pi}{2} - x)$.
- $cosx = sen(x + \frac{\pi}{2}) = sen(\frac{\pi}{2} - x)$.

Funções **lineares**, definidas sobre os números reais $\Re$, é uma expressão com o seguinte aspecto:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

onde a_i, $b \in \Re$ e os x_i são **variáveis** (ou incógnitas). Os escalares a_i são denominados **coeficientes** de x_i.

Exemplo 2.1 *A combinação linear de vetores é uma função linear.*

Dados dois espaços vetoriais X e Y. A correspondência que associa a cada vetor $\vec{x} \in X$ um vetor $\vec{y} \in Y$ é conhecida como **transformação** F (**mapeamento** ou **operador**) de X em Y. Uma transformação é conhecida como **linear** se para todos os vetores $\vec{v}$ e $\vec{x}$ em X e escalares C são satisfeitas as duas relações:

$$\begin{aligned} F(\vec{v} + \vec{x}) &= F(\vec{v}) + F(\vec{x}) \\ F(c\vec{x}) &= cF(\vec{x}) \end{aligned}$$

Uma transformação é denominada **isométrica** quando o produto interno dos vetores é preservado, ou seja a norma (ou a magnitude) do vetor é preservado.

Exemplo 2.2 *A transformação* $F(x,y,z) = (-x,y,z)$ *é uma transformação linear* ($F((x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)) = F(x_1,y_1,z_1) + F(x_2,y_2,z_2) = (-(x_1+x_2),(y_1+y_2),(z_1+z_2))$ *e* $F(c(x_1,y_1,z_1)) = cF(x_1,y_1,z_1) = (-cx_1, cy_1, cz_1)$ *) e isométrica (as distâncias entre os pontos são preservadas na transformação).*

Exemplo 2.3 *A transformação* $F(x,y,z) = (x+dx, y+dy, z+dz)$ *não é linear, pois* $F(c_1x, c_2y, c_3z) \neq [cF(x,y,z) = (c_1(x+dx), c_2(y+dy), c_3(z+dz))$.

Exercício 2.11 *Dê duas transformações isométricas e uma transformação não-isométrica.*

2.4 Matrizes e Transformações

Muitas vezes, transformações lineares são consideradas como sinônimo de "representáveis por matrizes": a manipulação de transformações lineares entre os vetores fica simplificada com uso de matrizes, porque estas permitem representar as transformações sucessivas de forma compacta.

Matrizes são disposições "tabulares" de escalares. Uma transformação linear de $\Re^n$ em $\Re^m$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ddots \quad & \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

é equivalente à equação matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ou simplesmente $A\vec{x} = \vec{b}$. Chamamos A de **matriz** (de coeficientes) **de transformação**.

Exercício 2.12 *Utilize a notação matricial para descrever o seguinte sistema de equações lineares:*

$$x = 2.0t + 1.0(t-1)$$

$$\begin{aligned} y &= -1.0t + 4.0(t-1) \\ z &= -1.5t - 2.0(t-1) \end{aligned}$$

Qual é o lugar geométrico das soluções do sistema para o intervalo $t \in [0, 1.0]$?

Operações algébricas definidas sobre duas matrizes A e B são:

Adição : de matrizes de mesma dimensão $m \times n$.

Multiplicação por escalar : cada elemento da matriz é multiplicado pelo escalar.

Multiplicação : cada elemento ij da nova matriz AB é obtido multiplicando a i-ésima linha de A e j-ésima coluna de B. Portanto, o número de linhas de A deve ser igual ao número de colunas de B.

Transposição : cada linha é transposta ordenadamente para coluna da nova matriz.

Inversão : a multiplicação de uma matriz (quadrada e inversível) pela sua inversa é uma matriz identidade.

Observação 2.3 *Determine a matriz inversa de:*

1.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

2.

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 4.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

É fácil mostrar que a composição de duas transformações lineares $A(B(\vec{x}))$ pode ser representada como a multiplicação das matrizes de coeficientes, ou seja, $A(B(\vec{x})) = AB\vec{x}$.

Algumas propriedades satisfeitas pelas operações de matrizes são:

- Associativa para adição: $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- $A + 0 = A$.

- $A + (-A) = 0$.
- $A + B = B + A$.
- $k(A + B) = kA + kB$, onde k é um escalar.
- $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$, onde k_1 e k_2 são escalares.
- $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$.
- $1.A = A$ e $0.A = 0$.
- $(AB)C = A(BC)$.
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $(B + C)A = BA + CA$.
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, onde k é um escalar.
- $(A + B)^t = A^t + B^t$.
- $(A^t)^t = A$.
- $(kA)^t = kA^t$, onde k é um escalar.
- $(AB)^t = B^tA^t$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Uma matriz A quadrada é **ortogonal**, se e somente se, seus vetores-coluna (e também seus vetores-linha) formam um sistema ortonormal (são unitários e ortogonais entre si). Uma transformação **isométrica** pode ser representada por uma matriz ortogonal (porisso, é conhecida também como **transformação ortogonal**). Uma propriedade útil para matrizes ortogonais é $(A)^{-1} = A^t$.

Uma matriz A é **simétrica**, se $A^t = A$ e é **anti-simétrica**, se $A^t = -A$.

Além das transformações lineares, as matrizes constituem uma forma compacta para representar figuras geométricas.

Exemplo 2.4 *As seções cônicas e superfícies quadráticas são as formas geométricas mais utilizadas. A equação geral de uma seção cônica é*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

que pode ser reescrita em forma matricial

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou seja, $\vec{x}^t A \vec{x}$. *Esta forma de notação matricial é conhecida como* **forma quadrática**. *Observe que a matriz de coeficientes A é simétrica.*

As superfícies quadráticas, por sua vez, são dadas por

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

que em notação matricial equivale a

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & D/2 & F/2 & G/2 \\ D/2 & B & E/2 & H/2 \\ F/2 & E/2 & C & J/2 \\ G/2 & H/2 & J/2 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para determinar os **autovalores** e **autovetores** de uma matriz A, determinamos primeiro os autovalores λ com uso da expressão

$$det(A - \lambda I) = 0,$$

onde I é uma matriz de identidade. Em seguida, calculamos o autovetor correspondente a cada autovalor através da igualdade

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

Exercício 2.13 *Determine os autovalores e os autovetores da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -5.0 & 2.0 \\ 2.0 & -2.0 \end{bmatrix}$$

Uma das aplicações de autovetores é a diagonalização da matriz A. A idéia básica de diagonalização é "desacoplar" as n variáveis de um sistema linear de n equações de forma que cada equação possa ser resolvido independentemente das outras. A matriz diagonal D correspondente à matriz A é $D = X{-}1AX$ sendo X formada pelos autovetores de A.

Exemplo 2.5 *As seções cônicas e superfícies quadráticas, Q, podem ser sempre representadas por* $Q = x^t Dx$*, onde D é uma matriz diagonal. Isso decorre do fato de que Q pode ser representada por uma forma quadrática*

$y^t Ay$*, onde A é uma matriz real simétrica, como vimos no Exemplo 2.4. Sendo A uma matriz real simétrica, os seus autovetores formam uma base ortonormal e a matriz X constituída por estes autovetores satisfaz a propriedade* $X^{-1} = X^t$*. Portanto, a matriz diagonal de A é* $D = X^{-1}AX = X^tAX$*, ou seja,* $XDX^t = A$ *e* $y^tXDX^ty = y^tAy$*. Fazendo* $X^ty = X^{-1}y = x$ *obtemos a igualdade desejada.*

Exercício 2.14 *A qual seção cônica corresponde a seguinte expressão:*

$$17x^2 - 30xy + 17y^2 = 128 \quad ?$$

Quais são as direções dos eixos principais?

2.5 Números Complexos

Veremos que os números complexos podems ser utilizados para representar de forma ainda mais compacta rotações (uma transformação geométrica) a serem detalhadas no capítulo 4.

Um **número complexo** z é um par ordenado (x, y) com $x, y \in \Re$. x é chamado a parte real e y a parte imaginária de z, ou seja,

$$x = Re\ z \qquad y = Im\ z.$$

Por definição, dois números complexos são iguais, se a suas partes reais e partes imaginárias forem iguais.

Chamamos de **unidade imaginária** o par $(0, 1)$.

Operações definidas para números complexos:

Adição : $z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Multiplicação : $z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

Divisão : $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

Conjugado : $\overline{z} = x - iy$.

Observe que se as partes imaginárias forem nulas, as operações se reduzem às operações definidas para os números reais. Ainda mais, podemos escrever z na forma

$$z = x + iy,$$

ao definirmos $i^2 = -1$.

Exercício 2.15 *Dados dois números complexos $z_1 = 8 + 3i$ e $z_2 = 9 - 2i$. Calcule*

1. $z_1 + z_2$
2. $z_2 - z_1$
3. $z_1 z_2$
4. $\frac{z_1}{z_2}$
5. *seus conjugados.*

Uma representação geométrica dos números complexos é com uso de um plano denominado **plano complexo** (ou **diagrama de Argand**) e um sistema de referência ortogonal. Os dois eixos correspondem, respectivamente, ao **eixo real** e ao **eixo imaginário**. Cada número é então um ponto neste plano onde a parte real corresponde a uma coordenada do eixo real e a parte imaginária a uma coordenada do eixo imaginário. Esta interpretação nos permite definir a **forma polar** de um número complexo z, quando $z \neq 0$.

Fazendo

$$x = r cos\theta \quad y = r sen\theta,$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $-\pi < \theta = arg\ z = arctg\frac{y}{x} \leq \pi$, então

$$z = r(cos\theta + isen\theta) \ \text{ ou } \ z = re^{i\theta}$$

A forma polar facilita a multiplicação e a divisão de números complexos:

Multiplicação : $z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

Divisão : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

Exercício 2.16 *Repetir a multiplicação e a divisão dos números complexos dados no Exercício 2.15 usando suas formas polares e compare os resultados.*

Representando cada ponto $[x\ y]^t$ num plano como um número complexo $(x+iy)$, podemos então descrever transformações lineares do tipo $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ sobre $[x\ y]^t$ como o produto de dois números complexos

$$(a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay).$$

Exercício 2.17 *É possível escrever em forma de números complexos o seguinte sistema de equações lineares?*

$$\begin{aligned} x_n &= x_v cos\theta - y_v sen\theta \\ y_n &= x_v sen\theta + y_v cos\theta \end{aligned}$$

Esboce a posição relativa entre os dois pontos $P_v = [x_v\ y_v]$ e $P_n = [x_n\ y_n]^t$ num plano. Verifique que foi aplicada uma rotação de θ-graus em torno da origem sobre P_v.

2.6 Métodos Numéricos

Para manipular imagens digitais trabalhamos com um grande volume de valores processáveis por métodos aproximados. É comum a área de Métodos Numéricos ou Computação Científica prover mais de uma técnica para solucionar um problema específico. A escolha por uma mais apropriada, de menor complexidade temporal e com menores erros de propagação oriundos de arredondamento ou de instabilidade é de fundamental importância para o desempenho de um algorimo de informações gráficas.

Nesta seção revisamos alguns métodos numéricos que podem ser úteis na implementação dos algoritmos a serem apresentados nesta disciplina. Vale ressaltar aqui que os métodos dados não são sempre os mais apropriados para solução dos problemas que aprensentaremos. A discussão detalhada foge do escopo desta disciplina.

2.6.1 Método de Eliminação de Gauss

É um método "exato", no sentido de que o método conduz a uma solução exata, após um número finito de passos, a menos dos erros computacionais inerentes à natureza de representação adotada pelos computadores digitais.

O método permite solucionar problemas redutíveis em formas matriciais. Ele consiste essencialmente em converter uma matriz (bem condicionada) dada em matriz identidade, executando uma sequência de operações elementares (multiplicação e soma) sobre as linhas da matriz. É utilizada para inversão das matrizes e na solução de equações não-homogêneas.

Observação 2.4 *Uma matriz bem condicionada é uam matriz quadrada cujas linhas (e colunas) são linearmente independentes.*

No caso da inversão de matriz, a mesma sequência de operações elementares, que transforma a matriz A dada numa identidade, é aplicada sobre uma matriz identidade para obter A^{-1}.

Exercício 2.18 *Utilize o método de eliminação de Gauss para determina a matriz inversa de*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Para solução de um sistema de equações lineares o princípio de computação é o mesmo, lembrando que

$$AX = B \leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Em outras palavras, o vetor-solução X é o produto da inversa A^{-1} da matriz A pelo vetor-coluna B.

Exercício 2.19 *Aplique o método de eliminação para solucionar o seguinte sistema de equações lineares*

$$\begin{aligned} -x + 3y - 2z &= 7 \\ 3x + 3z &= -3 \\ 2x + y + 2z &= -1 \end{aligned}$$

2.6.2 Método de Newton-Raphson

Em sistema de informações gráficas é comum trabalhar com polinômios de ordem muito elevada, cujas raízes não se consegue obter algebricamente. Vários métodos numéricos foram propostos para tal finalidade. Um método comum é o método de Newton-Raphson, que se aplica às equações polinomiais e transcendentais.

O método de Newton-Raphson inicia com uma raíz aproximada x_i (o **chute inicial**) da equação $f(x) = 0$ e faz uso da expansão em série de Taylor para formular um algoritmo recursivo

$$f(x) \approx f(x_i) + f\prime(x_i)(x - x_i) + Erro. \qquad (2.4)$$

Desprezando o termo $Erro$, estaremos considerando apenas os termos que vão até a primeira derivada e a aproximação corresponde a uma tangente ao gráfico da função $f(x)$ no ponto x_i.

(Ver Fig. A.7 do livro-texto de Foley.)

A fórmula de recursão pode ser derivada a partir da Eq. 2.4 e do fato de que $f(x) = 0$:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f\prime(x_i)}$$

e o critério de parada da recursão é quando a sequência de x_i converge. Na prática, o teste $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$ é feita em cada iteração.

Exercício 2.20 *Utilize o método de Newton-Raphson para melhorar o valor* $x = 3,23240$ *como raíz da equação*

$$x^5 + x^4 - 7x^3 - 22x^2 + x + 1 = 0$$

2.6.3 Diferenças Finitas

A derivada de uma função $\frac{df}{dx}$ corresponde, de fato, à declividade da tangente que pode ser calculada com valores aproximados, usando-se a razão $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, ou seja razão da variação de $f(x)$ em termos da variação de x

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Chamamos a aproximação $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ de diferenças finitas.

Há uma notação padrão para os vários tipos de diferenças. Os tipos de diferenças e os símbolos correspondentes são os seguintes

Tipo	Definição	Símbolo
Diferença ascendente	$\Delta f = f(x_{i+1}) - f(x_i)$	$\triangle$
Diferença descendente	$\Delta f = f(x_i) - f(x_{i-1})$	∇
Diferença centrada	$\Delta f = \frac{1}{2}(f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))$	δ

2.6.4 Interpolação

Manipulando com amostra, é muito comum em algoritmos de informações gráficas fazer interpolação dos valores da amostra para obter um valor que não faz parte da amostra. As interpolações mais comuns são, de fato, as combinações convexas entre os valores conhecidos, x_a e x_b:

$$x = w_a x_a + w_b x_b, com w_a + w_b = 1 e w_a, w_b > 0.$$

Exercício 2.21 *Dada a sequência de quatro pontos:* $[0.5\ 4.0]^t$, $[2.5\ 0.5]^t$, $[4.0\ 4.5]^t$ *e* $[2.0\ 6.0]^t$. *Determine a interpolação linear dos "quatro pontos", considerando que todos tenham o mesmo peso.*

2.6.5 Técnica de Mínimos Quadrados

O método dos mínimos quadrados é usualmente utilizado para fazer estimativa de um conjunto dos "coeficientes" de uma função polinomial

$$f(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots + k_j x^j + \cdots + k_m x^m$$

que "melhor se ajusta" a um conjunto de pontos conhecidos y_i, tendo como critério de avaliação a soma dos quadrados dos resíduos $(f(x_i) - y_i)^2$, isto é

$$H = \sum_{i=0}^{m} [f(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=0}^{m} [(k_0 + k_1 x_i + k_2 x_i^2 + \cdots + k_j x_i^j + \cdots + k_m x_i^m) - y_i]^2.$$

Para isolar os k_i e reduzir a equação acima num sistema de equações lineares, determina-se as m derivadas parciais $\frac{\partial H}{\partial k_i}$, $i = 1, \cdots, m$ e iguala-as a zero

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial k_0} &= \sum_{i=0}^{m} 2[(k_0 + k_1 x_i + k_2 x_i^2 + \cdots + k_j x_i^j + \cdots + k_m x_i^m) - y_i] = 0 \\
\frac{\partial H}{\partial k_j} &= \sum_{i=0}^{m} 2x_i^j[(k_0 + k_1 x_i + k_2 x_i^2 + \cdots + k_j x_i^j + \cdots + k_m x_i^m) - y_i] = 0. \\
\frac{\partial H}{\partial k_m} &= \sum_{i=0}^{m} 2x_i^m[(k_0 + k_1 x_i + k_2 x_i^2 + \cdots + k_j x_i^j + \cdots + k_m x_i^m) - y_i] = 0
\end{aligned}$$

Com isso, pode-se utilizar a técnica de eliminação para obter os valores k_i da função, se o sistema (matriz) estiver bem condicionado.

Exercício 2.22 *Utilize o método de mínimos quadrados para obter uma função cúbica que aproxime os seguintes pontos:*

θ	0.2	0.6	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6	3.0
$f(\theta)$	0.1987	0.5646	0.8415	0.9854	0.9738	0.8085	0.5154	0.1411

Uma outra alternativa seria estimar um "chute inicial" para os k_i e melhorá-los com o método de Newton-Raphson.