Capítulo 4

Transformações Geométricas

Entende-se como **transformação** uma aplicação f que faz corresponder um ponto P do domínio $\mathcal{R}^n$ a um ponto do contra-domínio $\mathcal{S}^n$:

$$f : P \in \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{S}^n \tag{4.1}$$

Em sistemas de informações gráficas, as transformações são muito utilizadas para mudar sistemas de referência ($\mathcal{R}^n \neq \mathcal{S}^n$) ou mudar a posição dos pontos num mesmo sistema de referência ($\mathcal{R}^n = \mathcal{S}^n$). A primeira classe de transformações é recomendada para tratar, por exemplo, um grupo de objetos, em que cada um é descrito em relação a um sistema de coordenadas próprio, enquanto a segunda é apropriada para manipular a posição relativa entre os objetos para compor uma cena mais complexa ou um objeto mais complexo.

Serão apresentadas as cinco transformações básicas da primeira classe de transformações - translação (*translation*), rotação (*rotation*), mudança de escala (*scaling*), espelhamento (*reflection*) e deslocamento relativo linear (*shearing*). Veremos que, exceto as translações, estas transformações são lineares; portanto, representáveis por matrizes. Na seção 4.2 serão apresentados alguns sistemas de referênica mais conhecidos em Computação Gráfica os quais um processo de síntese de imagens com base em modelos pode usar. Finalmente, para ilustrar o conceito de transformações será detalhada a construção de algumas transformações mais conhecidas.

4.1 Transformações Geométricas Básicas

Embora o foco seja em transformações geométricas bi- e tridimensionais, apresentaremos, quando possível, formulações gerais para pontos de n-dimensões.

4.1.1 Translação

A **translação** de um ponto num espaço é o **deslocamento** $\vec{d} = [d_1\ d_2\ \cdots\ d_n]^t$ deste ponto de $P_v = [x_{1,v}\ x_{2,v}\ \cdots\ x_{n,v}]^t$ para $P_r = [x_{1,r}\ x_{2,r}\ \cdots\ x_{n,r}]^t$. Este deslocamento corresponde à adição de uma parcela d_i a cada coordenada $x_{i,v}$

$$
\begin{aligned}
x_{1,r} &= x_{1,v} + d_1 \\
x_{2,r} &= x_{2,v} + d_2 \\
x_{3,r} &= x_{3,v} + d_3 \\
& \cdots \\
x_{n,r} &= x_{n,v} + d_n
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

Usando notação matricial tem-se

$$
\begin{bmatrix} x_{1,r} \\ x_{2,r} \\ \cdots \\ x_{n,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,v} \\ x_{2,v} \\ \cdots \\ x_{n,v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdots \\ d_n \end{bmatrix}.
$$

(Ver Fig. 5.1 do livro-texto de Foley.)

Exercício 4.1 *Dado um segmento $P(t) = (1-t)P_0 + tP_1$, $t \in [0,1]$. Mostre que $P(t) + \vec{d} = (1-t)(P_0 + \vec{d}) + t(P_1 + \vec{d})$. Por que a igualdade é um resultado computacionalmente importante?*

4.1.2 Mudança de Escala

A **mudança de escala** de um objeto implica essencialmente em mudança do seu tamanho. Em termos de vetores, isso equivale a dizer mudar a magnitude dos pares de vetores definidos pelos pontos do objeto. Dados dois pontos a e b em $\Re^3$ de um objeto. Um vetor associado a eles é

$$\vec{ab} = a - b$$

cuja magnitude é

$$|\vec{ab}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

Mudar a escala do vetor por um fator γ corresponde a explicar $|\vec{ab}|$, isto é,

$$\gamma|\vec{ab}| = \gamma\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

Se $a = [0\ 0\ 0]^t$, teremos

$$\gamma|\vec{ab}| = \gamma\sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2} = \sqrt{(\gamma b_1)^2 + (\gamma b_2)^2 + (\gamma b_3^2}.$$

(Ver Fig. 5.2 do livro-texto de Foley.)

Em outras palavras, obteremos o efeito de mudança de escala através da multiplicação de cada coordenada x_i por um fator γ. Quando o fator de escala é igual em todas as direções principais, dizemos que a mudança é **uniforme**.

Generalizando, podemos substituir o escalar γ pelo vetor $[\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \cdots\ \gamma_n]^t$ para produzir efeitos de mudança de escala diferenciada nas n direções canônicas em $\Re^n$, ou seja, **mudança de escala não-uniforme**

$$\begin{aligned}
x_{1,r} &= \gamma_1 x_{1,v} \\
x_{2,r} &= \gamma_2 x_{2,v} \\
x_{3,r} &= \gamma_3 x_{3,v} \\
&\cdots \\
x_{n,r} &= \gamma_n x_{n,v}
\end{aligned}$$

Em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} x_{1,r} \\ x_{2,r} \\ \cdots \\ x_{n,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,v} \\ x_{2,v} \\ \cdots \\ x_{n,v} \end{bmatrix}.$$

(Ver Fig. 5.6 do livro-texto de Foley.)

E

Observação 4.1 *Da forma como a transformação é definida, é conveniente fixar um ponto do objeto de interesse na origem.*

Exercício 4.2 *Dados os três vértices de um triângulo* $[0\ 0]^t$, $[1\ 1]^t$ *e* $[1\ 1]^t$. *Dobre a área do triângulo, mantendo o ponto* $[5\ 2]^t$ *fixo.*

4.1.3 Deslocamento Relativo Linear

Esta transformação, conhecida em inglês como *shearing* ou em português como **cisalhamento**, se caracteriza pela variação em linear de uma coordenada em relação aos valores das outras, ou seja a nova coordenada transformada $x_{i,r}$ em $\Re^n$ pode ser expressa como:

$$x_{i,r} = x_{i,v} + \sum_{j=1,j\neq i}^{n}(sh_{ij}x_{j,v}).$$

Usando notação matricial isso equivale a:

$$\begin{bmatrix} x_{1,r} \\ x_{2,r} \\ \cdots \\ x_{n,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & sh_{12} & \cdots & sh_{1n} \\ sh_{21} & 1 & \cdots & sh_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ sh_{n1} & sh_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,v} \\ x_{2,v} \\ \cdots \\ x_{n,v} \end{bmatrix}.$$

(Ver Fig. 5.7 do livro-texto de Foley.)

Exercício 4.3 *Esboce o efeito de deslocamento relativo de um quadrado unitário ($[0\ 0]^t$, $[1\ 0]^t$, $[1\ 1]^t$ e $[0\ 1]^t$) na direção de x com $sh_{12} = 2$, na direção de y com $sh_{21} = 4$ e o mesmo montante em ambas as direções.*

4.1.4 Rotação

Rotações são transformações em que os pontos giram de um ângulo θ em torno de um dado ponto $\mathcal{O}$. Por convenção, atribuímos valores positivos a θ quando o sentido de giro for anti-horário (de eixo x para y) e negativos quando for horário.

(Ver Fig. 5.3 do livro-texto de Foley.)

Se considerarmos que $\mathcal{O}$ seja a origem de um sistema de coordenadas de 2 dimensões, r, a distância entre $\mathcal{O}$ e o ponto (x, y) a ser girado e que ϕ seja o ângulo entre a direção de (x, y) e o eixo x, então:

$$x = rcos\phi$$
$$y = rsen\phi.$$

Após a rotação de um ângulo θ, o ângulo entre a direção do "novo" ponto (x_r, y_r) e o eixo x passará para $\theta + \phi$. Assim

$$\begin{aligned} x_r &= rcos(\theta+\phi) \\ &= rcos\phi cos\theta - rsen\phi sen\theta \\ &= x_v cos\theta - y_v sen\theta \\ y_r &= rsen(\theta+\phi) \\ &= rsen\phi cos\theta + rcos\phi sen\theta \\ &= y_v cos\theta + x_v sen\theta. \end{aligned}$$

Em forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} x_r \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \end{bmatrix}.$$

(Ver Fig. 5.4 do livro-texto de Foley.)

Esta transformação equivale a girar um ponto em torno de um eixo z em $\Re^3$:

$$\begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{bmatrix}.$$

Analogamente, pode-se derivar a matriz de rotação em torno do eixo x (segundo a regra da mão-direita em relação ao eixo de rotação):

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & sen\theta \\ 0 & -sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

e em torno do eixo y,

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sen\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix}.$$

Observação 4.2 *As matrizes de rotação são ortogonais, ou seja, a magnitude dos vetores é preservada nas transformações de rotação.*

Exercício 4.4 *Quais são as coordenadas de um quadrado (*$[2\ 6]^t$*,* $[4\ 6]^t$*,* $[4\ 8]^t$ *e* $[2\ 8]^t$*) após uma rotação de* 30^o *em torno do ponto* $[5\ 7]^t$*?*

Observação 4.3 *Em Computação Gráfica, em analogia à Aviação, os ângulos de rotação em torno dos eixos x, y e z são também conhecidos por* **ângulo de guinada** *(yaw),* **ângulo de declividade** *(pitch) e* **ângulo de rotação longitudinal** *(roll).*

4.1.5 Espelhamento

O **espelhamento** é uma rotação bem particular, em que um ponto "sai" do espaço, em que ele está contido, dá um giro de 180^o no espaço de uma dimensão maior e volta em "posição espelhada" ao espaço original.

Num espaço de 2 dimensões define-se o espelhamento em relação a uma reta, enquanto num espaço de 3 dimensões fala-se em espelhamento em relação a um plano.

Exemplo 4.1 *A matriz de espelhamento em relação ao plano xy é:*

$$M_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

em relação ao plano yz:

$$M_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e em relação ao plano xz:

$$M_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 4.5 *Mostre que um espelhamento em relação a uma reta $y = x$ equivale a trocar as coordenadas, isto é, $M[x\ y]^t = [y\ x]^t$.*

4.1.6 Notação Matricial Única

Usando a notação matricial, translação, mudança de escala, deslocamento relativo, rotação e o espelhamento são dadas, respectivamente, por:

$$P_r = P_v + T \quad , \tag{4.3}$$

$$P_r = SP_v \quad , \tag{4.4}$$

$$P_r = ShP_v \quad . \tag{4.5}$$

$$P_r = RP_v \quad , \tag{4.6}$$

$$P_r = MP_v \quad . \tag{4.7}$$

O fato da translação ser tratada de forma diferenciada (adição) em relação às outras (que são lineares) dificulta um pouco a composição das transformações. Isso pode ser, entretanto, contornado com a adição de uma coordenada e com a extensão da matriz de transformação por mais uma coluna e uma linha. Com isso, a representação de um ponto assume o mesmo aspecto da sua representação em coordenadas homogêneas com a restrição de que o valor da coordenada adicional seja 1.

Observação 4.4 *Uma transformação que satisfaz a seguinte relação*

$$\begin{aligned} x_r &= a_{0,0}x_v + a_{0,1}y_v + a_{0,2}z_v + a_{0,3} \\ y_r &= a_{1,0}x_v + a_{1,1}y_v + a_{1,2}z_v + a_{1,3} \\ z_r &= a_{2,0}x_v + a_{2,1}y_v + a_{2,2}z_v + a_{2,3} \end{aligned} \tag{4.8}$$

é uma transformação **afim**. *Esta transformação preserva o paralelismo.*

Exemplo 4.2 *A translação de um ponto num espaço bidimensional pode ser expressa como o produto:*

$$\begin{bmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

e num espaço tridimensional,

$$\begin{bmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ z + d_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz estendida $M_{m+1,m+1}$ (em relação à matriz $m \times m$)

$$\begin{bmatrix} U_{m,m} & \vdots & U_{m,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{1,m} & \vdots & U_{1,1} \end{bmatrix}, \tag{4.9}$$

onde o bloco $U_{m,m}$ engloba as transformações lineares (espelhamento, mudança de escala, rotação e deslocamento relativo linear) e o bloco $U_{m,1}$ os deslocamentos, permite que a translação seja modelada como uma transformação linear. Assim, a composição destas transformações básicas pode ser reduzida em multiplicações (**concatenação**) das matrizes correspondentes.

Observe ainda que a ação do bloco $U_{1,1}$ é equivalente à **mudança de escala uniforme** (Seção 4.1.2)

$$\begin{bmatrix} x_{1,r} \\ x_{2,r} \\ \cdots \\ x_{m,r} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,v} \\ x_{2,v} \\ \cdots \\ x_{m,v} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,v} \\ x_{2,v} \\ \cdots \\ x_{m,v} \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s}x_{1,v} \\ \frac{1}{s}x_{2,v} \\ \cdots \\ \frac{1}{s}x_{m,v} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 4.6 *Dada uma curva de Bézier* $P(t) = \sum P_i B_i^n(t)$, $t \in [0, 1]$. *Mostre que* $TP(t) = \sum (TP_i) B_i^n(t)$, *onde* T *é uma transformação afim qualquer.*

O Jacobiano de uma transformação afim dada pelo Sistema 4.8 é dado por

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_r}{\partial x_v} & \frac{\partial x_r}{\partial y_v} & \frac{\partial x_r}{\partial z_v} \\ \frac{\partial y_r}{\partial x_v} & \frac{\partial y_r}{\partial y_v} & \frac{\partial y_r}{\partial z_v} \\ \frac{\partial z_r}{\partial x_v} & \frac{\partial z_r}{\partial y_v} & \frac{\partial z_r}{\partial z_v} \end{vmatrix}.$$

Se $J = 0$, a transformação não é inversível. Quando $J = 1$, a área é invariante sob a transformação.

Observação 4.5 *Mostre que translação, rotação, mudança de escala e deslocamento relativo são inversíveis e que o deslocamento relativo não preserva a área.*

4.2 Transformações entre Sistemas de Coordenadas

As transformações que vimos até agora se restringem a situações em que o sistema de referência permanece inalterado. Uma forma alternativa, porém equivalente, a esta visão, é pensar que houve a mudança de sistemas de referência em relação aos quais o objeto antes e após a transformação permanecem inalterados. Esta segunda visão é bastante útil em Computação Gráfica para compor, por exemplo, num espaço de cena um conjunto de objetos, cada um definido num sistema de referência próprio.

(Ver Fig. 5.26 do livro-texto de Foley.)

Um dos principais objetivos de Computação Gráfica é viabilizar a síntese de imagens bidimensionais a partir de cenas 3D. Como veremos mais adiante, para passar de 3D a 2D, os objetos sofrem uma sequência de transformações. Por conveniência, definem-se então diversos sistemas de coordenadas para distinguir os diferentes espaços em que os diferentes estágios intermediários de um objeto "em transformação" se encontram. A cada espaço associa-se um sistema de coordenadas para garantir a univocidade na representação dos pontos.

(Ver Fig. 5.23 do livro-texto de Foley.)

Intuitivamente é fácil identificar dois espaços:

Espaço de Objeto O sistema de coordenadas é relativo a um objecto específico. Geralmente o modelo do objeto está centrado na origem do sistema e tem dimensões normalizadas. O sistema de coordenadas associado a este espaço é denominado de **sistema de coordenadas do objeto**, **de modelamento** ou **local**.

(Ver Fig. 5.21 do livro-texto de Foley.)

Espaço de Imagem As coordenadas dos pontos dos objetos são relativas a um sistema de referência fixado no dispositivo de saída. Este sistema de referência é chamado de **sistema de coordenadas da imagem**, **do dispositivo**, ou **de rasterização** (*screen-coordinate system*).

(Ver Fig. 5.10 do livro-texto de Foley.)

Para facilitar o entendimento do processo de mapeamento do espaço do objeto para o espaço da imagem, muitos padrões gráficos tridimensionais, como PHIGS, distinguem ainda os seguintes espaços:

Espaço de Cena Corresponde ao espaço que compreende todos os elementos que compõem uma cena. Entre os elementos citam-se os componentes representados no espaço do objeto, as fontes de luz, a câmera virtual e o fundo. Neste espaço é possível definir, com precisão, as posições e as orientações relativas entre os elementos de uma cena, pois as coordenadas dos pontos dos elementos integrantes da cena são dadas em função de um **sistema de coordenadas global WC** (ou **do mundo**, em inglês *world-coordinate system*). Tal sistema é também chamado de **sistema de coordenadas da aplicação**, em vista de que as medidas dos elementos estão comumente em escala natural da aplicação.

Espaço de Câmera É conhecido também como o **volume de visão** (*view volume*). Neste espaço destaca-se a posição do observador (ou câmera) na cena, denominada de **ponto de referência de projeção** (*projection reference point* – PRP), responsáveis pela captação das imagens. Os eixos (v u n) do sistema deste espaço, chamado de **sistema de coordenadas de câmera** ou **do observador** (*viewing-reference coordinate system* – VRC), são definidos normalmente em função de WC. O eixo n coincide com a normal VPN do **plano de projeção**. A projeção do vetor *view up vector* – VUP) na direção do eixo n define o eixo v. E o eixo u deve ser perpendicular a v e n. A origem deste sistema é chamado de **ponto de referência de visão** (*view reference* *point* – VRP) em WC. Observe que o vetor VUP indica, de fato, a direção superior da linha de visão.

(Ver Fig. 6.14 do livro-texto de Foley.)

O volume de visão corresponde a uma região da cena de interesse que deve ser visualizada, isto é, que deve ser projetada sobre o **plano de projeção**. Este volume depende, portanto, do plano de projeção (o plano uv), da janela de visão (*window*) (dada por $(u_{min}, u_{max}, v_{min}, v_{max})$), do tipo de projeção (paralela e perspectiva) e do ponto de referência de projeção (PRP). Para limitar os dois lados deste volume, são introduzidos ainda os planos de corte dianteiro (*front clipping plane*) e traseiro (*back clipping plane*).

Espaço de Visão Normalizado Este espaço corresponde ao volume de visão normalizado. Normalmente, projeta-se os elementos contidos neste espaço num plano, passando assim para o espaço de imagem.

Outros termos como espaço de textura e espaço de cor são comumente utilizados na literatura sobre informações gráficas, como veremos durante esta disciplina.

Uma transformação que leva um sistema Σ para coincidir com um outro sistem Σ', de mesmas dimensões, pode ser definida como concatenacão de um conjunto de transformações básicas, como ilustram os seguintes exemplos.

Exemplo 4.3 *A transformação T de uma base $\{b_1, b_2, b_3\}$ para a base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ deve ser tal que*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$T = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}^{-1}$$

Sendo a matriz $[b_1\ b_2\ b_3]$ ortogonal, $T = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}^t$.

Em Mecânica, os ângulos entre as direções da base canônica e de uma base ortonormal são conhecidos como **ângulos de Euler**.

Exemplo 4.4 *Em Computação Gráfica, objetos definidos no espaço de objeto normalmente seguem a regra da mão-direita e os no espaço de imagem, a da mão-esquerda. Neste caso, é muito frequente a aplicação de transfromações entre estes dois sistemas durante o processo de visualização. Por* *inspeção, é fácil concluir que a transformação entre os dois sistemas é simplesmente a de espelhamento em torno do plano xy:*

$$C_{R \leftarrow L} = C_{L \leftarrow R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 4.5 *Muitos pacotes gráficos oferecem facilidades para definir as entidades gráficas planares em qualquer unidade métrica familiar às aplicações, como milímetro, centímetro, metro e kilômetro, embora que a área de visão (normalmente, uma tela) seja "limitada". Estes pacotes dispõem, então, de um conjunto de funções que transformam as entidades definidas pelos usuários (em sistema de coordenadas do mundo - world coordinate system) para entidades visualizáveis (em sistema de coordenadas do dispositivo - screen coordinate system).*

(Ver Fig. 5.11 do livro-texto de Foley.)

A região retangular de interesse, que pretendemos visualizar, é denominada a **janela** *(window) e a região no dispositivo de saída, onde as entidades são "desenhadas"é chamada* **quadro de visão** *(viewport). Se associarmos a cada um deles um sistema de referência, denominamos o procedimento, que mapeia os pontos de uma janela para um quadro, como transformação de window para viewport.*

Esta transformação pode ser obtida por meio de aplicações sucessivas das seguintes transformações básicas:

- *deslocamento da janela para a origem,*
- *transferir a janela para o sistema de coordenadas do quadro,*
- *aplicar a transformação de mudança de escala sobre as coordenadas da janela, para que ela fique de mesmo tamanho do quadro de saída, e*
- *desclocar a janela para o quadro.*

(Ver Figs. 5.12 e 5.13 do livro-texto de Foley.)

Exemplo 4.6 *Somente os pontos contidos no volume de visão normalizados são "imageados". Como os pontos numa cena são dados normalmente em coordenadas de WC e o volume de visão (definido por planos de corte, PRP e a janela de visão) é definido em coordenadas de VRC, precisa-se transformar os pontos da cena de interesse do sistema de WC para o sistema VRC. Esta* *transformação depende do tipo de projeção, como veremos no Capítulo 5. Para projeções paralelas, em que o volume de visão é um paralelepípedo, a matriz de transformação pode ser obtida com as seguintes operações:*

- *deslocar o ponto VRP à origem de WC,*
- *girar o sistema VRC de tal forma que o eixo n coincida com o eixo z de WC, v com o eixo y e u com o eixo x (considerando que o sistema VRC obedeça à regra da mão direita) e*
- *deslocar as coordenadas x e y dos raios de projeção em relação à coordenada z, de forma que eles fiquem paralelos ao eixo z.*

Exercício 4.7 *Qual é a transformação a ser aplicado no vetor normal de um plano se for aplicado nele uma transformação M? Verifique a direção normal do plano $3x + 1.5y + 0.2z - 4.0 = 0$ após uma rotação de 45º em torno da origem do sistema.*

4.3 Quatérnios e Rotações

Os quatérnios $q = a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3$ são definidos no espaço $\Re^4$ com a base canônica $\vec{1} = [1\ 0\ 0\ 0]^t$, $\vec{i} = [0\ 1\ 0\ 0]^t$, $\vec{j} = [0\ 0\ 1\ 0]^t$ e $\vec{k} = [0\ 0\ 0\ 1]^t$ e dotados de uma estrutura multiplicativa definida conforme o seguinte esquema:

	$\vec{1}$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{1}$	$\vec{1}$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{i}$	$-\vec{1}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$-\vec{1}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$-\vec{1}$

Dizemos que a_0 é a **parte real** ou **escalar** e $\vec{a} = ia_1 + ja_2 + ka_3$, a **parte pura** ou **vetorial**. Um quatérnio que tem a parte real nula é denominado **quatérnio puro**. Similar aos números complexos, o **conjugado** do quatérnio $a_0 + \vec{a}$ é $\overline{q} = a_0 - \vec{a}$ e o quadrado da sua norma $|q|^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. O **inverso** multiplicativo é definido por $q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}$.

São definidas entre dois quatérnios $q_1 = a_0 + \vec{a}$ e $q_2 = b_0 + \vec{b}$ as operações

Adição : $q_1 + q_2 = (a_0 + b_0) + (\vec{a} + \vec{b})$, que pode ser expressa com uso de notação matricial é

$$\begin{bmatrix} a_0 + b_0 \\ a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Multiplicação : $q_r = q_1q_2 = (a_0 + b_0 - (\vec{a} \cdot \vec{b})) + (a_0\vec{b} + b_0\vec{a} + \vec{a} \times \vec{b})$. Em notação matricial, temos

$$\begin{bmatrix} q_{0,r} \\ q_{1,r} \\ q_{2,r} \\ q_{3,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & -a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -b_1 & b_0 & -b_3 & b_2 \\ -b_2 & b_3 & b_0 & -b_1 \\ -b_3 & -b_2 & b_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

A primeira multiplicação é conhecida como **multiplicação esquerda** que corresponde a uma transromação linear $L_a(b)$ associando q_2 a q_1q_2 e a segunda, **multiplicação direita** $R_b(a)$ que mapeia q_1 a q_1q_2.

Análogo aos números complexos podemos representar geometricamente os quatérnios unitários sobre uma hiperesfera unitária em $\Re^4$. Se definirmos $\vec{I} = iu_1 + ju_2 + ku_3$ com $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$, podemos escrever q na forma $a_0 + \mu\vec{I}$. Se adicionalmente $|q| = r$, então existe θ tal que $a_0 = rcos\theta$ e $\mu = rsen\theta$. Isso significa que podemos escrever q na forma polar $r(cos\theta + \vec{I}sen\theta) = re^{\vec{I}\theta}$, o que poderá simplificar as multiplicações entre os quatérnios.

É possível demonstrar que se representarmos cada ponto no espaço $\Re^3$ como um quatérnio puro $P = [0 \ x \ y \ z]^t$, uma rotação $T(P)$ deste ponto de um ângulo igual a 2θ em torno de um vetor $\vec{I}$ que passa pela origem pode ser dada por

$$T(P) = aPa^{-1}, ondea = re^{\vec{I}\theta}, \ r > 0 \text{ e } \vec{I}^2 = -1.$$

Exercício 4.8 *Com uso de quatérnios, obtém o efeito da sequência de duas rotações: (1) rotação em torno do eixo y por* 30^o *e (2) rotação em trono do eixo x por* 45^o*. Qual é a matriz correspondente?*

Exercício 4.9 *Com uso do quatérnio, derive a matriz de rotação em torno da direção* $[u_x \ u_y \ u_z]^t$ *por um ângulo* θ*.*