

3.2.1 Curvas e Superfícies de Bézier

Geometricamente, os pontos sobre as curvas de Bézier de grau n $P(t)$, $t \in [0, 1]$ são obtidos através da combinação convexa de um conjunto fixo de pontos $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ chamados **pontos de controle** com uso de funções de Bernstein

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_{n,i}(t)P_i.$$

É comum denominar a sequência dos pontos de controle de **polígono de controle**.

(Ver Fig. 11.19 do livro-texto de Foley.)

Exercício 3.8 *Por que dizemos que a curva de Bézier é uma combinação convexa dos seus pontos de controle?*

Exemplo 3.5 *Uma definição paramétrica de parábolas é*

$$x(t) = (1 - t)^2 \quad y(t) = t^2$$

que pode ser expressa na base de Bernstein como combinação convexa dos pontos $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$P(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} B_{2,0}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} B_{2,1}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} B_{2,2}(t)$$

Entre as propriedades das curvas de Bézier temos:

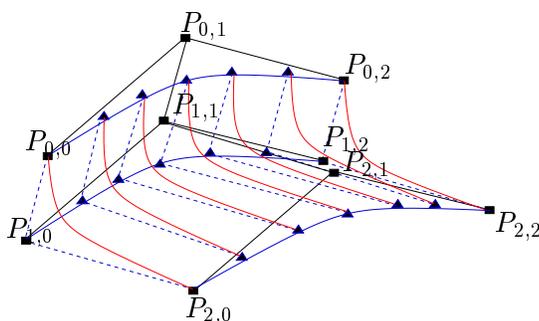
- interpolação dos pontos extremos
- os vetores tangentes dos pontos extremos tem a mesma direção dos segmentos do polígono de controle.
- está sempre localizado no fecho convexo do polígono de controle.
- é invariante (em relação ao polígono de controle) sob transformações lineares.
- é invariante (em relação ao polígono de controle) sob deslocamentos.

Exercício 3.9 *Dados quatro pontos de controle $[1.0 \ 1.0]^t$, $[2.0 \ 3.0]^t$, $[4.0 \ 3.0]^t$ e $[3.0 \ 1.0]^t$ de uma curva de Bézier. Determina $P(0)$, $P(0.15)$, $P(0.35)$, $P(0.5)$, $P(0.65)$, $P(0.85)$ e $P(1.0)$.*

Por processo generativo (deslocando uma curva de Bézier ao longo da outra) podemos ainda obter superfícies de Bézier $P(u, v)$ com uso de funções de Bernstein através da combinação convexa entre os pontos resultantes da combinação convexa dos pontos de controle

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^m \left(\sum_{j=0}^n P_{ij} B_{n,j}(u) \right) B_{m,i}(v).$$

O reticulado de pontos de controle P_{ij} definem a **malha de controle** da superfície.



(Ver Figs. 11.39 e 11.42 do livro-texto de Foley.)

Exercício 3.10 Dados os 16 pontos de controle de uma superfície de Bézier

$$\begin{bmatrix} (-15, 0, 15) & (-15, 5, 5) & (-15, 5, -5) & (-15, 0, -15) \\ (-5, 5, 15) & (-5, 5, 5) & (-5, 5, -5) & (-5, 5, -15) \\ (5, 5, 15) & (5, 5, 5) & (5, 5, -5) & (5, 5, -15) \\ (15, 0, 15) & (15, 5, 5) & (15, 5, -5) & (15, 0, -15) \end{bmatrix}$$

Determine os pontos $P(0, 0)$, $P(0.25, 0.25)$, $P(0.5, 0.25)$, $P(0.75, 0.75)$, $P(1.0, 1.0)$.

Observação 3.2 Para visualizar curvas (superfícies), é comum subdividi-las em n segmentos (nm facetas) pequenos. Sendo em representação paramétrica, uma forma seria fixar as variações dos parâmetros em intervalos constantes, Δu (Δu e Δv), e calcular os pontos $P(i\Delta u)$ ($P(i\Delta u, j\Delta v)$) com $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ($i \in \{0, 1, \dots, n\}$ e $j \in \{0, 1, \dots, m\}$).

(Ver Figs. 11.35 e 11.44 do livro-texto de Foley.)

Há, porém, técnicas computacionalmente muito mais eficientes como **algoritmo de DeCasteljau** para subdivisão, que não discutiremos nesta disciplina.

3.2.2 Curvas e Superfícies de B-Splines

As curvas de Bézier são definidas sobre um intervalo de suporte, usualmente $[0, 1]$. As curvas de B-splines de grau n podem, por sua vez, descrever uma sequência de curvas de Bézier de grau n conectadas suavemente entre si (continuidade C^{n-1}). Como os intervalos de definição das curvas de Bézier que compõem a curva B-spline podem ser variáveis, é possível obter curvas que visualmente apresentam uma complexidade maior.

(Ver Fig. 11.22 do livro-texto de Foley.)

Analicamente, é possível representar uma curva de B-spline de ordem k (grau $(k - 1)$) definida sobre o intervalo $[t_1, t_{n+k+1}]$ com os nós $t_1 < t_2 < \dots < t_{n+k+1}$ como uma combinação convexa de $n + 1$ pontos de controle P_i utilizando funções $N_{i,k}(t)$ de suporte limitado

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} P_i N_{i,k}(t).$$

Observação 3.3 O vetor $[t_1 \ t_2 \ t_3 \ \dots \ t_{n+k+1}]$ é conhecido como **vetor de nós**.

A função $N_{i,k}(t)$, também conhecida como **função de base**, pode ser definida recursivamente a partir de

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - t_i)N_{i,k-1}(t)}{t_{i+k-1} - t_i} + \frac{(t_{i+k} - t)N_{i+1,k-1}(t)}{t_{i+k} - t_{i+1}}.$$

É adotada ainda a convenção $\frac{0}{0} = 0$. Observe que $N_{i,k}(t)$ depende da ordem k , do intervalo de nós sobre o qual ela é definida e do espaçamento entre os nós.

(Ver Fig. 11.26 do livro-texto de Foley.)

Exemplo 3.6 Dado o vetor de nós $\tilde{u} = [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]$ sobre o eixo de parâmetro u . Determine as funções de base $N_{13}(u)$, $N_{23}(u)$, $N_{33}(u)$ e $N_{43}(u)$.

Sabemos que $N_{i,1}(u) = 0$ nos intervalos que não sejam contemplados na seguinte definição:

$$\begin{aligned}
N_{1,1}(u) &= 1, t \in [0, 1) \\
N_{2,1}(u) &= 1, t \in [1, 2) \\
N_{3,1}(u) &= 1, t \in [2, 3) \\
N_{4,1}(u) &= 1, t \in [3, 4) \\
N_{5,1}(u) &= 1, t \in [4, 5) \\
N_{6,1}(u) &= 1, t \in [5, 6)
\end{aligned}$$

Ainda pela definição, temos

$$N_{i,2}(u) = \frac{(t - t_i)N_{i,1}(u)}{t_{i+1} - t_i} + \frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}}N_{i+1,1}(u).$$

Substituindo corretamente os valores de $N_{i,1}(u)$ para cada intervalo, obtemos

$$\begin{aligned}
N_{1,2}(u) &= \frac{(t - t_1)N_{1,1}(u)}{t_2 - t_1} + \frac{(t_3 - t)N_{2,1}(u)}{t_3 - t_2} = \begin{cases} t, & t \in [0, 1) \\ (2 - t), & t \in [1, 2) \end{cases} \\
N_{2,2}(u) &= \frac{(t - t_2)N_{2,1}(u)}{t_3 - t_2} + \frac{(t_4 - t)N_{3,1}(u)}{t_4 - t_3} = \begin{cases} (t - 1), & t \in [1, 2) \\ (3 - t), & t \in [2, 3) \end{cases} \\
N_{3,2}(u) &= \frac{(t - t_3)N_{3,1}(u)}{t_4 - t_3} + \frac{(t_5 - t)N_{4,1}(u)}{t_5 - t_4} = \begin{cases} (t - 2), & t \in [2, 3) \\ (4 - t), & t \in [3, 4) \end{cases} \\
N_{4,2}(u) &= \frac{(t - t_4)N_{4,1}(u)}{t_5 - t_4} + \frac{(t_6 - t)N_{5,1}(u)}{t_6 - t_5} = \begin{cases} (t - 3), & t \in [3, 4) \\ (5 - t), & t \in [4, 5) \end{cases} \\
N_{5,2}(u) &= \frac{(t - t_5)N_{5,1}(u)}{t_6 - t_5} + \frac{(t_7 - t)N_{6,1}(u)}{t_7 - t_6} = \begin{cases} (t - 4), & t \in [4, 5) \\ (6 - t), & t \in [5, 6) \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainda pela definição, temos

$$N_{i,3}(u) = \frac{(t - t_i)N_{i,2}(u)}{t_{i+2} - t_i} + \frac{(t_{i+3} - t)N_{i+1,2}(u)}{t_{i+3} - t_{i+1}}.$$

Substituindo corretamente os valores de $N_{i,2}(u)$ para cada intervalo, obtemos

$$N_{1,3}(u) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & t \in [0, 1) \\ \frac{t(2-t)}{2} + \frac{(3-t)(t-1)}{2}, & t \in [1, 2) \\ \frac{(3-t)(3-t)}{2}, & t \in [2, 3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
N_{2,3}(u) &= \begin{cases} \frac{(t-1)^2}{2}, & t \in [1, 2) \\ \frac{(t-1)(3-t)}{2} + \frac{(4-t)(t-2)}{2}, & t \in [2, 3) \\ \frac{(4-t)(4-t)}{2}, & t \in [3, 4) \end{cases} \\
N_{3,3}(u) &= \begin{cases} \frac{(t-2)^2}{2}, & t \in [2, 3) \\ \frac{(t-2)(4-t)}{2} + \frac{(5-t)(t-3)}{2}, & t \in [3, 4) \\ \frac{(5-t)(5-t)}{2}, & t \in [4, 5) \end{cases} \\
N_{4,3}(u) &= \begin{cases} \frac{(t-3)^2}{2}, & t \in [3, 4) \\ \frac{(t-3)(5-t)}{2} + \frac{(6-t)(t-4)}{2}, & t \in [4, 5) \\ \frac{(6-t)(6-t)}{2}, & t \in [5, 6) \end{cases}
\end{aligned}$$

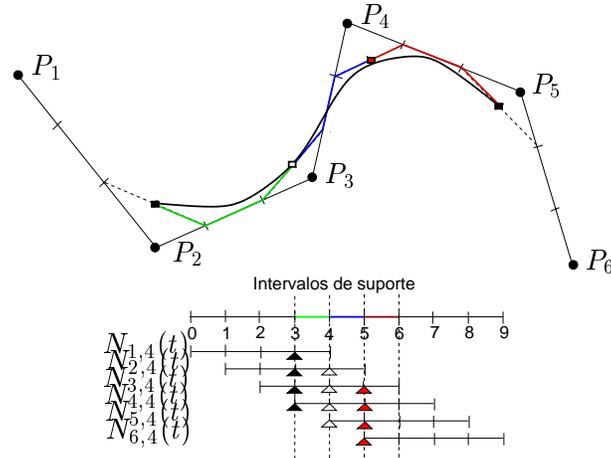
Observe que o número de intervalos de suporte de uma função $N_{i,k}(t)$ é igual a k e o grau da função é igual a $(k - 1)$.

Exercício 3.11 Mostre que as funções $N_{1,4}(t)$, $N_{2,4}(t)$, $N_{3,4}(t)$ e $N_{4,4}(t)$ definidas sobre o vetor de nós $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ são equivalentes às funções $B_{3,0}(t), B_{3,1}(t), B_{3,2}(t)$ e $B_{3,3}(t)$.

Observação 3.4 Há mais opções para manipular as curvas B-splines que as curvas de Bézier. Nas curvas de Bézier, as formas geométricas podem ser alteradas pelos pontos de controle e pelo grau da curva. Nas curvas B-splines, além destes dois conjuntos de variáveis, as formas podem ser afetadas através do espaçamento dos intervalos entre t_i e t_{i+1} . Quando os espaçamentos forem iguais, dizemos que são **curvas B-splines uniformes**; caso contrário, **curvas B-splines não-uniformes**.

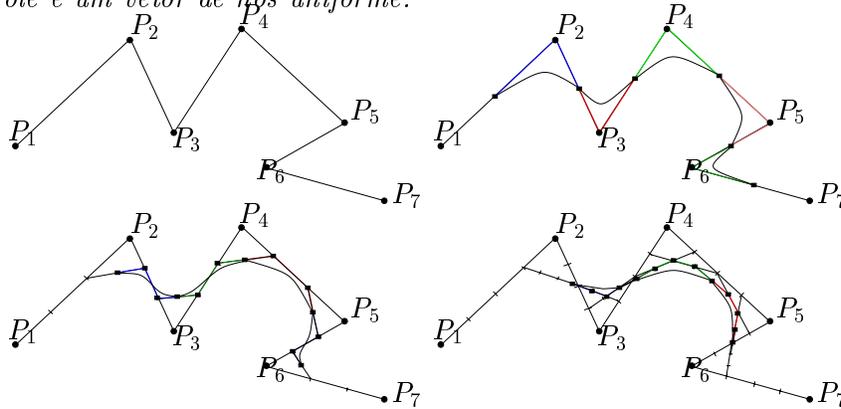
(Ver Fig. 11.27 do livro-texto de Foley.)

Uma curva B-spline \mathcal{C} de ordem k é equivalente a uma sequência de curvas de Bézier de grau $(k - 1)$, pois foi demonstrado que a partir do polígono de controle de \mathcal{C} pode-se obter os polígonos de controle das curvas de Bézier por subdivisões sucessivas, como ilustra a seguinte figura de uma curva B-spline de ordem 4 (cúbica) constituída por 3 curvas de Bézier cúbica suavemente conectadas. Os pontos extremos de cada polígono de controle (marcas em preto, branco e vermelho) foram obtidos com uso do esquema de DeBoor que não detalharemos no escopo desta disciplina.



Exercício 3.12 Dados quatro pontos de controle $[1 \ 1]^t$, $[2 \ 3]^t$, $[4 \ 3]^t$ e $[3 \ 1]^t$ e o vetor de nós $[0 \ 0 \ 1 \ 3 \ 5 \ 5]$. Determine $P(1.5)$, $P(2.5)$ e $P(4.5)$.

Exemplo 3.7 Neste exemplo ilustramos como se obtém os polígonos de controle de curvas de Bézier, de grau 1 a 4, a partir de um mesmo polígono de controle e um vetor de nós uniforme.



De forma análoga às superfícies de Bézier, as superfícies B-splines podem ser obtidas de forma generativa através do deslocamento das curvas de B-splines no espaço, por uma malha de pontos de controle P_{ij} :

$$P(u, v) = \sum_{i=1}^{m+1} \left(\sum_{j=1}^{n+1} P_{ij} N_{j,k_1}(u) \right) N_{i,k_2}(v).$$

Observação 3.5 O algoritmo de Boor é um algoritmo similar ao algoritmo de DeCasteljau para computar os pontos das curvas e superfícies B-splines usando somente combinações lineares sucessivas.