

Capítulo 3

Modelagem Geométrica

Modelos geométricos são peças fundamentais em síntese e análise de imagens. Em termos de algoritmos de síntese (ou determinação sintética da luminância/brilância), duas informações geométricas são essenciais: posição de cada ponto (também conhecido com **vértice**) e o vetor normal de superfície associado a cada posição. Um dos focos de pesquisa na área de Modelagem Geométrica é prover mecanismos mais simples para descrever de forma intuitiva estas informações. Quando se trata de análise de imagens, os modelos geométricos podem ser utilizados como a ponte entre imagens e os algoritmos que determinam grandezas geométricas, como área e volume, dos objetos capturados nas imagens.

3.1 Vértices e Vetores Normais

Uma forma mais simples, porém trabalhosa, para descrever a geometria de uma superfície é aproximá-la por poliedros de faces poligonais orientáveis. As aproximações mais utilizadas são as quadrilaterias e triangulares, tendo estas últimas a vantagem de possuírem a propriedade de planaridade. Esta descrição pode ser trivialmente implementada com uso de duas listas: uma lista de vértices e a outra de faces. Na lista de vértices cada entrada contém as coordenadas de um vértice e na lista de faces as referências a estas entradas.

(Ver Fig. 11.3 do livro-texto de Foley.)

Exercício 3.1 *Descreva um paralelepípedo “orientável”, isto é de faces orientáveis, com uso de 8 vértices: $[0\ 0\ 1]^t$, $[3\ 0\ 1]^t$, $[3\ 2\ 1]^t$, $[0\ 2\ 1]^t$, $[0\ 0\ 0]^t$, $[3\ 0\ 0]^t$, $[3\ 2\ 0]^t$ e $[0\ 2\ 0]^t$.*

A orientabilidade das faces permite determinar o vetor normal \vec{n} de cada face por meio dos seus três vértices \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 tomados sequencialmente num sentido de orientação fixo

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \vec{v}_2 \times \vec{v}_2 \vec{v}_3.$$

Se o poliedro for uma aproximação de uma superfície suave, é comum determinar o vetor normal no vértice P como a média dos vetores normais de todas as faces adjacentes a P .

Exercício 3.2 *Aproxime uma esfera de raio unitário por um icosaedro. Determine os vértices do icosaedro e os vetores normais em*

1. 20 faces triangulares.
2. 10 vértices.

A codificação da superfície aproximada por duas listas não explicita a relação das arestas, o que dificulta a visualização destes elementos geométricos. Se quisermos visualizá-las, teremos que “desenhá-las” duas vezes, percorrendo todas as faces. Estruturas de dados mais complexas, com base em grafos, foram propostas para representar explicitamente as relações de adjacência como vértice–aresta, aresta–aresta, vértice–face e aresta–face.

(Ver Fig. 11.4 do livro-texto de Foley.)

A estrutura pioneira é a estrutura denominada *winged-edge data structure* com a qual foi introduzida o modelo de representação por bordo (*boundary representation*) ou simplesmente *Brep*.

Exercício 3.3 *Represente o paralelepípedo do Exercício 3.1 e a esfera do Exercício 3.2 usando o modelo Brep.*

3.2 Representações Analíticas de Curvas e Superfícies

As representações analíticas, além de prover uma descrição mais precisa e compacta, nos permitem obter facilmente os pontos intermediários entre os vértices. Isso facilita a manipulação dos objetos geométricos.

Distinguem-se três formas para representar um objeto geométrico:

paramétricas : as coordenadas dos pontos são funções de parâmetros.

impícitas : a relação entre as n coordenadas dos pontos do objeto é expressa por uma função de n variáveis. Tal função estabelece, de fato, o **lugar geométrico** dos pontos do objeto.

explícitas : uma coordenada é dada explicitamente em função de todas as outras.

Exemplo 3.1 *A representação do lugar geométrico dos pontos de uma esfera de raio r na forma*

- *paramétrica*: $x = r \cos \theta \sin \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$ e $z = r \cos \phi$.
- *implícita*: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.
- *explícita*: $z = \pm \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$.

Exercício 3.4 *Escreva as três formas de representação de um:*

1. *cone;*
2. *parabolóide elíptico; e*
3. *toro.*

Em geral, uma função não é suficiente para representar uma curva ou superfície de interesse. Como solução, várias funções são usadas. Neste caso, em muitas aplicações é importante saber a **continuidade** ou diferenciabilidade nos pontos de “emenda”. Em Modelagem Geométrica é introduzido o conceito de **continuidade geométrica** para melhor caracterizar estes pontos de “emenda” quando se trata das funções paramétricas.

Uma curva representada por duas funções paramétricas conectadas num ponto P pode ter as derivadas à esquerda e à direita diferentes. Porém, se existir uma reparametrização através da qual as derivadas passam a ser iguais, dizemos que a curva é **geometricamente contínua** no ponto P , mesmo que ela não seja “diferenciável”.

Exemplo 3.2 *Uma curva $f(t)$ definida por*

$$f(t) = \begin{cases} (t, t^2) & \text{para } t < 0 \\ (2t, 4t^2) & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

tem no ponto $[0 \ 0]^t$ como a derivada à esquerda $[1 \ 0]^t$ e como derivada à direita $[2 \ 0]^t$. Portanto, a curva não é diferenciável no ponto $[0 \ 0]^t$. Se substituirmos $2t$ por w (uma reparametrização), a derivada à direita passa a ser $[1 \ 0]^t$. Conclui-se, então, que a curva é geometricamente contínua em $[0 \ 0]^t$.

Exercício 3.5 *Mostre que as duas curvas*

$$f_1(t) = [t^2 - 2t + 2t^3 - 2t^2 + t]^t \quad f_2(t) = [t^2 + 1t^3]^t, \quad t \in [0, 1]$$

são C^1 (diferenciável de primeira ordem) contínuas e não G^1 (geometricamente contínuas de primeira ordem) no ponto $f_1(1) = f_2(0)$.

Os vetores normais em cada ponto de uma superfície paramétrica $P(u, v)$ podem ser obtidos com a expressão

$$\vec{n}\{P(u, v)\} = \frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v}$$

enquanto para representações implícitas $f(x, y, z)$

$$\vec{n}\{(x, y, z)\} = \nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Exercício 3.6 *Determine o vetor normal das seguintes superfícies:*

1. $z^2 = 4(x^2 + y^2)$;
2. $S = [a\theta^2 \ 2a\theta \ \phi]^t, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_{max} \quad \phi_{min} \leq \phi \leq \phi_{max}$;
3. $e^x \cos y = 10$.

Propriedades como robustez no processamento, simplicidade na síntese e facilidade na interpretação foram decisivas na evolução dos modelos geométricos. Os modelos analíticos mais comuns nos pacotes gráficos tem formas paramétricas e as funções utilizadas são polinomiais cujos coeficientes tem uma semântica geométrica bem intuitiva.

Observação 3.1 *Na última década as funções implícitas ganharam popularidade na modelagem de objetos “amorfos” ou “moles”, denominados blobby objects.*

Nesta disciplina detalharemos somente a representação por base polinomial de Bernstein – as curvas e superfícies de Bézier e B-splines. Pode-se mostrar que as funções de Bernstein $\{B_{n,0}(t), B_{n,1}(t), \dots, B_{n,n}(t)\}$ definidas como

$$B_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$$

formam uma base para o espaço de polinômios de grau n , com a propriedade

$$\sum B_{n,i}(t) = 1 \quad \forall t.$$

Exemplo 3.3 Quando $n = 2$, as funções

$$\begin{aligned} B_{2,0}(t) &= (1-t)^2 = 1 - 2t + t^2 \\ B_{2,1}(t) &= 2t(1-t) = 2t - 2t^2 \\ B_{2,2}(t) &= t^2 \end{aligned}$$

constituem uma base do espaço de polinômios de grau 2. Utilizando a notação matricial,

$$\begin{bmatrix} B_{2,0}(t) \\ B_{2,1}(t) \\ B_{2,2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz quadrada é também conhecida como **matriz-base de Bézier (quadrática)**.

Exemplo 3.4 Quando $n = 3$, as funções

$$\begin{aligned} B_{3,0}(t) &= (1-t)^3 = 1 - 3t + 3t^2 - t^3 \\ B_{3,1}(t) &= 3t(1-t)^2 = 3t - 6t^2 + 3t^3 \\ B_{3,2}(t) &= 3t^2(1-t) = 3t^2 - 3t^3 \\ B_{3,3}(t) &= t^3 \end{aligned}$$

constituem uma base do espaço de polinômios de grau 3. Utilizando a notação matricial,

$$\begin{bmatrix} B_{3,0}(t) \\ B_{3,1}(t) \\ B_{3,2}(t) \\ B_{3,3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz quadrada é a **matriz-base de Bézier (cúbica)**.

(Ver Fig. 11.20 do livro-texto de Foley.)

Exercício 3.7 Esboce o gráfico das 3 funções de Bernstein de grau 2 e das 4 funções de Bernstein de grau 3. Verifique que a soma das funções para qualquer valor $t \in [0, 1]$ é igual a 1!

3.2.1 Curvas e Superfícies de Bézier

Geometricamente, os pontos sobre as curvas de Bézier de grau n $P(t)$, $t \in [0, 1]$ são obtidos através da combinação convexa de um conjunto fixo de pontos $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ chamados **pontos de controle** com uso de funções de Bernstein

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_{n,i}(t)P_i.$$

É comum denominar a sequência dos pontos de controle de **polígono de controle**.

(Ver Fig. 11.19 do livro-texto de Foley.)

Exercício 3.8 *Por que dizemos que a curva de Bézier é uma combinação convexa dos seus pontos de controle?*

Exemplo 3.5 *Uma definição paramétrica de parábolas é*

$$x(t) = (1 - t)^2 \quad y(t) = t^2$$

que pode ser expressa na base de Bernstein como combinação convexa dos pontos $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$P(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} B_{2,0}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} B_{2,1}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} B_{2,2}(t)$$

Entre as propriedades das curvas de Bézier temos:

- interpolação dos pontos extremos
- os vetores tangentes dos pontos extremos tem a mesma direção dos segmentos do polígono de controle.
- está sempre localizado no fecho convexo do polígono de controle.
- é invariante (em relação ao polígono de controle) sob transformações lineares.
- é invariante (em relação ao polígono de controle) sob deslocamentos.

Exercício 3.9 *Dados quatro pontos de controle $[1.0 \ 1.0]^t$, $[2.0 \ 3.0]^t$, $[4.0 \ 3.0]^t$ e $[3.0 \ 1.0]^t$ de uma curva de Bézier. Determina $P(0)$, $P(0.15)$, $P(0.35)$, $P(0.5)$, $P(0.65)$, $P(0.85)$ e $P(1.0)$.*

Por processo generativo (deslocando uma curva de Bézier ao longo da outra) podemos ainda obter superfícies de Bézier $P(u, v)$ com uso de funções de Bernstein através da combinação convexa entre os pontos resultantes da combinação convexa dos pontos de controle

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^m \left(\sum_{j=0}^n P_{ij} B_{n,j}(u) \right) B_{m,i}(v).$$

O reticulado de pontos de controle P_{ij} definem a **malha de controle** da superfície.

(Ver Figs. 11.39 e 11.42 do livro-texto de Foley.)

Exercício 3.10 *Dados os 16 pontos de controle de uma superfície de Bézier*

$$\begin{bmatrix} (-15, 0, 15) & (-15, 5, 5) & (-15, 5, -5) & (-15, 0, -15) \\ (-5, 5, 15) & (-5, 5, 5) & (-5, 5, -5) & (-5, 5, -15) \\ (5, 5, 15) & (5, 5, 5) & (5, 5, -5) & (5, 5, -15) \\ (15, 0, 15) & (15, 5, 5) & (15, 5, -5) & (15, 0, -15) \end{bmatrix}$$

Determine os pontos $P(0, 0)$, $P(0.25, 0.25)$, $P(0.5, 0.25)$, $P(0.75, 0.75)$, $P(1.0, 1.0)$.

Observação 3.2 *Para visualizar curvas (superfícies), é comum subdividi-las em n segmentos (nm facetas) pequenos. Sendo em representação paramétrica, uma forma seria fixar as variações dos parâmetros em intervalos constantes, Δu (Δu e Δv), e calcular os pontos $P(i\Delta u)$ ($P(i\Delta u, j\Delta v)$) com $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ($i \in \{0, 1, \dots, n\}$ e $j \in \{0, 1, \dots, m\}$).*

(Ver Figs. 11.35 e 11.44 do livro-texto de Foley.)

Há, porém, técnicas computacionalmente muito mais eficientes como algoritmo de DeCasteljau para subdivisão, que não discutiremos nesta disciplina.

3.2.2 Curvas e Superfícies de B-Splines

As curvas de Bézier são definidas sobre um intervalo de suporte, usualmente $[0, 1]$. As curvas de B-splines de grau n podem, por sua vez, descrever uma seqüência de curvas de Bézier de grau n conectadas suavemente entre si (continuidade C^{n-1}). Como os intervalos de definição das curvas de Bézier que compõem a curva B-spline podem ser variáveis, é possível obter curvas que visualmente apresentam uma complexidade maior.

(Ver Fig. 11.22 do livro-texto de Foley.)

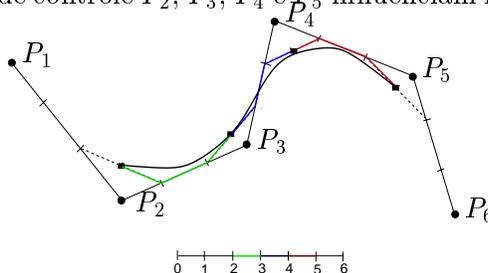
Analicamente, é possível representar uma curva de B-spline de grau $k - 1$ (ordem k) definida sobre o intervalo $[t_1, t_{n+k+1})$ com os nós $t_1 < t_2 <$

$\dots < t_{n+k+1}$ como uma combinação convexa de $n + 1$ pontos de controle P_i utilizando funções $N_{i,k}(t)$ de suporte finito

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} P_i N_{i,k}(t).$$

Observação 3.3 O vetor $[t_1 \ t_2 \ t_3 \ \dots \ t_{n+k+1}]$ é conhecido como **vetor de nós**.

A seguinte figura ilustra uma curva B-spline de ordem 4 (cúbica) constituída por 3 curvas de Bézier cúbica suavemente conectadas. Observe que somente os pontos de controle P_2, P_3, P_4 e P_5 influenciam na forma da curva.



A função $N_{i,k}(t)$, também conhecida como **função de base**, pode ser definida recursivamente a partir de

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - t_i)N_{i,k-1}(t)}{t_{i+k-1} - t_i} + \frac{(t_{i+k} - t)N_{i+1,k-1}(t)}{t_{i+k} - t_{i+1}}.$$

É adotada ainda a convenção $\frac{0}{0} = 0$.

(Ver Fig. 11.26 do livro-texto de Foley.)

Observação 3.4 Há mais opções para manipular as curvas B-splines que as curvas de Bézier. Nas curvas de Bézier, as formas geométricas podem ser alteradas pelos pontos de controle e pelo grau da curva. Nas curvas B-splines, além destes dois conjuntos de variáveis, as formas podem ser afetadas através do espaçamento dos intervalos entre t_i e t_{i+1} . Quando os espaçamentos forem iguais, dizemos que são **curvas B-splines uniformes**; caso contrário, **curvas B-splines não-uniformes**.

(Ver Fig. 11.27 do livro-texto de Foley.)

Exercício 3.11 Na figura anterior, o vetor de nós é igualmente espaçado, mais precisamente $[0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6]$. Como seriam os polígonos de controle das curvas de Bézier cúbicas que compõem a curva B-spline apresentado acima, se o vetor de nós for diferentemente espaçado $[0\ 0\ 0\ 1\ 3\ 4\ 8\ 10\ 10\ 10]$?

Exercício 3.12 Dados quatro pontos de controle $[1\ 1]^t$, $[2\ 3]^t$, $[4\ 3]^t$ e $[3\ 1]^t$ e o vetor de nós $[0\ 0\ 1\ 3\ 5\ 5]$. Determine $P(1.5)$, $P(2.5)$ e $P(4.5)$.

De forma análoga às superfícies de Bézier, as superfícies B-splines podem ser obtidas de forma generativa através do deslocamento das curvas de B-splines no espaço, por uma malha de pontos de controle P_{ij} :

$$P(u, v) = \sum_{i=1}^{m+1} \left(\sum_{j=1}^{n+1} P_{ij} N_{j,k_1}(u) \right) N_{i,k_2}(v).$$

Observação 3.5 O algoritmo de Boor é um algoritmo similar ao algoritmo de DeCasteljau para computar os pontos das curvas e superfícies B-splines usando somente combinações lineares.

3.3 Geometria Construtiva

Uma técnica apropriada para construção de formas complexas por usuários não-sepecialistas é a técnica construtiva. Esta técnica caracteriza-se por obter um novo objeto a partir da combinação entre os blocos geométricos básicos, chamados **primitivas geométricas**. Usualmente, os detalhes das representações geométricas das primitivas geométricas e as implementações das operações booleanas (união, interseção e diferença) ficam transparentes aos usuários.

CSG (*Constructive Solid Geometry*) é o modelo que segue o princípio de geometria construtiva mais conhecido. Ele compreende um conjunto de blocos sólidos elementres (como esfera, paralelepípedo, cilindro e cone) e um conjunto de **operadores booleanos regulares** – operadores booleanos (união, interseção e diferença) modificados para garantir o fechamento destas operações sobre os sólidos.

(Ver Figs. 12.2 e 12.28 do livro-texto de Foley.)

A construção de um modelo CSG é naturalmente hierárquica, que pode ser representada por uma árvore binária. Nesta árvore, os nós-folha representam as primitivas geométricas e os nós intermediários, os resultados intermediários de operações booleanas.

(Ver Fig. 12.27 do livro-texto de Foley.)

Exercício 3.13 *Descreva o logotipo da Unicamp com uso de paralelepípedos e cilindros de tamanhos variáveis. Represente a sua descrição através de uma árvore binária.*

3.4 Classificação do Espaço Particionado

Uma outra técnica apropriada para descrever um objeto é particionar o espaço onde ele está imerso em células e classificar a ocupação dessas células pelo objeto. O objeto é então representado pelo aglomerado das células classificadas como ocupadas. O tamanho da célula varia com o interesse de cada aplicação. Quando se trata de um espaço bidimensional, a célula é denominada **pixel** (*picture element*) e as células 3D de um espaço tridimensional são chamadas **voxel** (*volume element*).

(Ver Figs. 12.20 e 12.21 do livro-texto de Foley.)

Se o espaço é particionado em células de mesmo tamanho, é comum utilizar matrizes para armazenar os atributos de cada célula. Uma alternativa eficiente para representar o espaço ocupado seria, porém, subdividir as células em tamanhos iguais somente quando elas são parcialmente ocupadas.

(Ver Fig. 12.25 do livro-texto de Foley.)

Essa subdivisão adaptativa induz uma hierarquia na representação das células que pode ser descrita com uso de uma árvore, cujos nós-folha são células ocupadas.

(Ver Figs. 12.22 e 12.23 do livro-texto de Foley.)

Para visualizar os objetos modelados como um aglomerado de células, é feito um pré-processamento de extração das faces das células que correspondem ao bordo do objeto. O método mais antigo, ainda muito utilizado, é o método *marching cube*.

(Ver Fig. 12.20 do livro-texto de Foley.)

Exercício 3.14 *Represente o logotipo da Unicamp como um subespaço de um espaço de células de tamanhos iguais.*

3.5 Representação Polinomial de Seções Cônicas

As seções cônicas ou superfícies quadráticas são as formas analíticas mais utilizadas nas aplicações de Engenharia. Exceto as parábolas, as elipses e as hipérbolas não são possíveis de serem representadas por funções polinomiais. Entretanto, podemos utilizar o fato de que qualquer seção cônica em \mathbb{R}^2 pode ser obtida como a projeção de uma parábola em \mathbb{R}^3 e descrevê-la

como uma projeção de uma **curva de Bézier** em \mathbb{R}^3 usando as noções de Geometria Projetiva.

Uma forma típica para obter a projeção de uma figura em \mathbb{R}^3 num plano é escolher a origem do sistema de coordenadas cartesiano do \mathbb{R}^3 como o **centro de projeção** e o plano $z = 1$ como o plano de projeção. Neste caso, todos os pontos $(wx, wy, w)^t$ ao longo de uma linha que passa pela origem são projetados no ponto $(x, y, 1)$ do plano $z = 1$ e todos os planos que passam pela origem são projetados numa linha no plano $z = 1$. As linhas paralelas uma linha l sobre o plano $z = 1$, como linhas definidas pelos pontos $(x, y, 0)^t$, interceptam l em um mesmo ponto no infinito, e as outras linhas interceptam $z = 1$ em diferentes pontos no finito. O plano z assim definido permite representar uniformemente os pontos no finito e no infinito. Ele é denominado o **plano projetivo**.

(Ver Fig. 5.5 do livro-texto de Foley.)

Os pontos de um plano projetivo são representados por três coordenadas ao invés de duas coordenadas. As três coordenadas utilizadas para representar um ponto do plano projetivo é conhecido como **coordenadas homogêneas**. Para a projeção que definimos, exceto para os pontos no infinito, as coordenadas do espaço usual podem ser facilmente obtidas através da divisão das coordenadas dos pontos no plano projetivo pela terceira coordenada adicional. Esta terceira coordenada é conhecida como **peso** no contexto de Modelagem Geométrica.

Com isso, podemos representar os pontos de uma seção cônica como a projeção de uma curva de Bézier quadrática $P(t) = [wx(t) \ wy(t) \ w]^t$ definida pelos pontos de controle $[w_0x_0 \ w_0y_0 \ w_0]^t$, $[w_1x_1 \ w_1y_1 \ w_1]^t$ e $[w_2x_2 \ w_2y_2 \ w_2]^t$ em \mathbb{R}^3 sobre plano $z = 1$, ou seja,

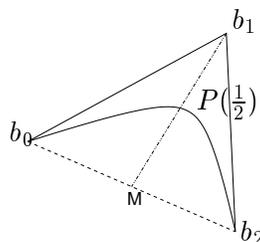
$$P(t) = \frac{w_0b_0B_{2,0}(t) + w_1b_1B_{2,1}(t) + w_2b_2B_{2,2}(t)}{w_0B_{2,0}(t) + w_1B_{2,1}(t) + w_2B_{2,2}(t)},$$

onde $b_i = [x_i \ y_i]^t$.

A este tipo de representação, na qual as coordenadas de cada ponto são obtidas como divisão de polinômios, denomina-se **representação racional**.

Foi demonstrado que quando a razão s entre o segmento definido pelo ponto médio $M = \frac{b_0+b_2}{2}$ e o ponto $P(\frac{1}{2})$ e o segmento definido por M e b_1 for

- igual a $\frac{1}{2}$, então temos uma parábola.
- menor que $\frac{1}{2}$, então temos uma elipse.
- maior que $\frac{1}{2}$, então temos hipérbole.



Exemplo 3.6 *A forma paramétrica conhecida de uma circunferência*

$$x = r \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad y = r \frac{2t}{1 + t^2}$$

é equivalente a uma curva de Bézier racional com os pontos de controle $b_0 = [r \ 0]^t$, $b_1 = [r \ r]^t$ e $b_2 = [0 \ r]^t$ e os pesos $w_0 = w_1 = 1$ e $w_2 = 2$.

Exercício 3.15 *Observe que os parâmetros do Exemplo 3.6 satisfazem as condições de uma elipse.*