IA369P – Tópicos em Engenharia de Computação VI

Visualização de Informação: Algoritmos

Representação de Dados

Capítulo 3 do livro-texto Telea

Visualização de Dados

$$(x, y, f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}), x, y \in [-1,1]$$

Discretização:
Transformar dados contínuos em discretos

↓

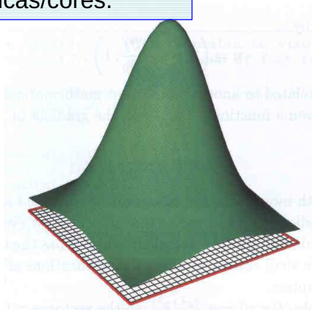
Amostras

Mapeamento:
Transformar amostras em dados geométricos e seus valores em propriedades ópticas/cores.

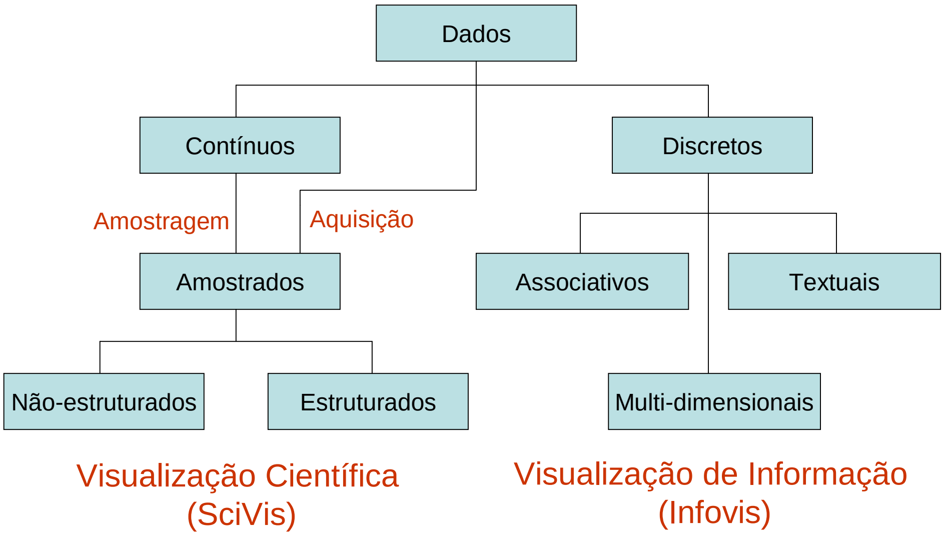
↓

Primitivas Gráficas

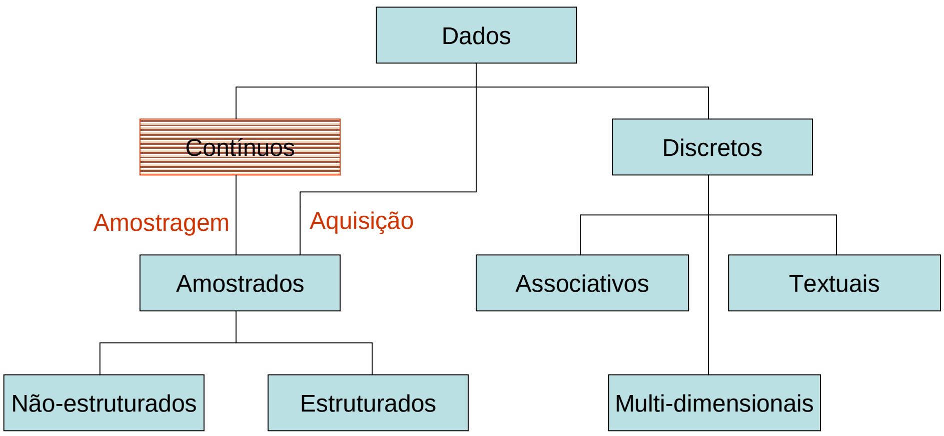
Síntese de Imagens:
Transformar dados geométricos (posição e vetores normais), propriedades ópticas destes dados e radiações luminosas incidentes sobre estes dados em cores.



Classificação

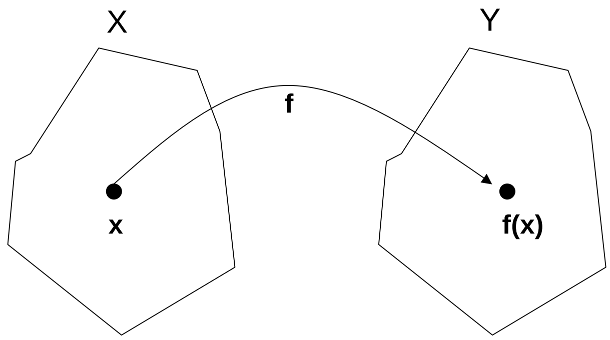


Dados Contínuos



Dados Contínuos

Descritíveis por uma função contínua

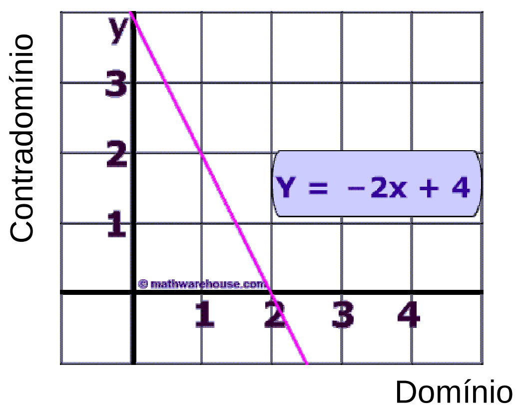


$$f : X \to Y$$

X: domínio de elementos de interesse
Y: contradomínio de atributos

Dados Contínuos

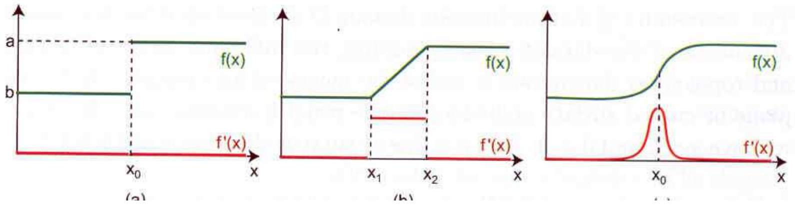
y = f(x)



Continuidade

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \, / \, | x - x_0 | < \delta, x, x_0 \in X \rightarrow | f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$$

- Descontínua
- Continuidade de Ordem Zero(C^0): trechos de curvas conectadas - contínuas por parte
- Continuidade de Primeira Ordem (C^1): primeira derivada contínua
- Continuidade de Ordem k (C^k): até derivada de ordem k contínua
- Continuidade de Ordem infinita (C^∞). Ex. : função exponencial e^x.



Avaliação quantitativa da suavidade (*fairness*).

Exercícios

Analise a ordem de continuidade das seguintes funções:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$$

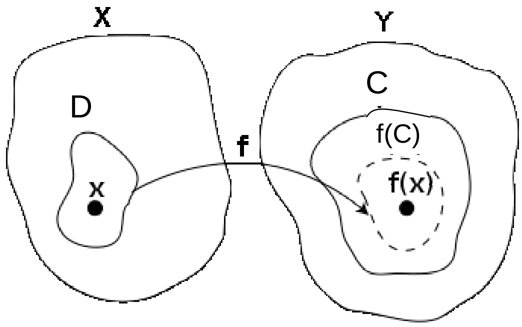
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 2 \\ -1, & x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \leq 0 \\ 2x^3, & x > 0 \end{cases}$$

Dimensão

$$f : D \to C$$

D: sub-domínio de elementos de interesse
C: contradomínio de atributos

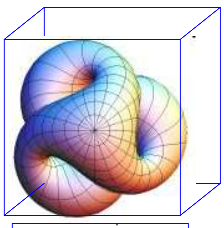


Dimensão de U

$$f : D \to C$$

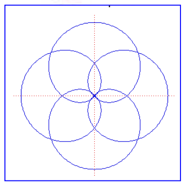
- Topológica (s): dimensão do “espaço mínimo” para conter D.
- Geométrica (d): dimensão do espaço em que D está imerso.

s=2



d=3

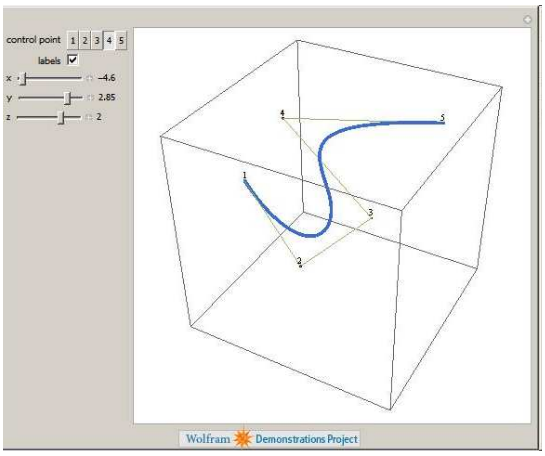
s=1



d=2

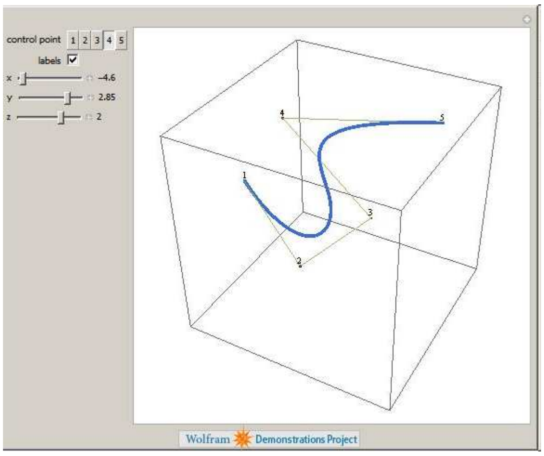
Exercício

- Qual é a dimensão geométrica e topológica dos dados (em azul)?



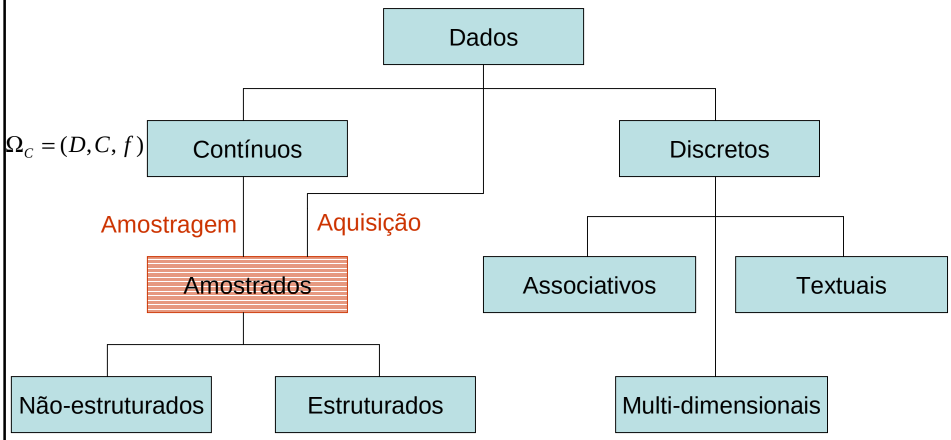
Co-dimensão de U

$$c = d - s$$

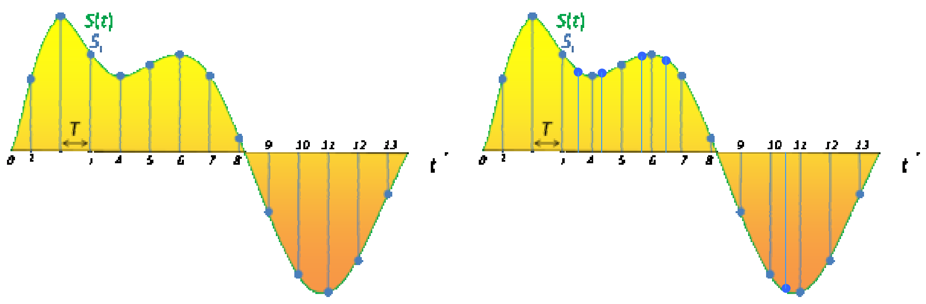


d=3
s=1
c=d-s=2

Dados Amostrados



Amostragem



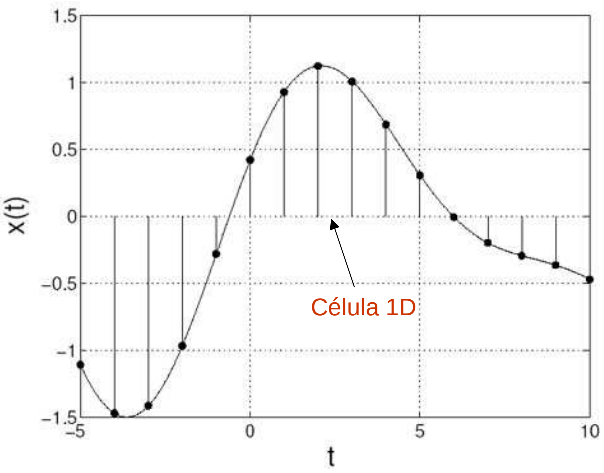
Amostragem uniforme

Amostragem adaptativa

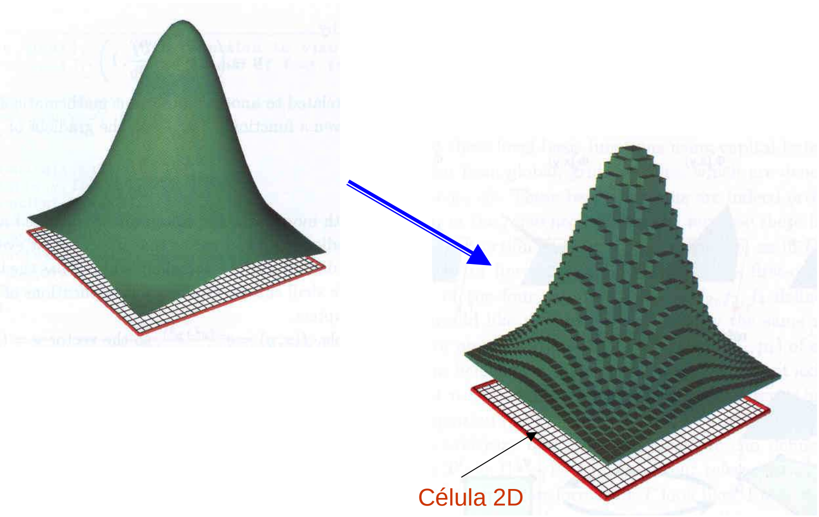
T = intervalo de amostragem

$c_i = [t_i, t_i + T) \rightarrow$ célula ou elemento

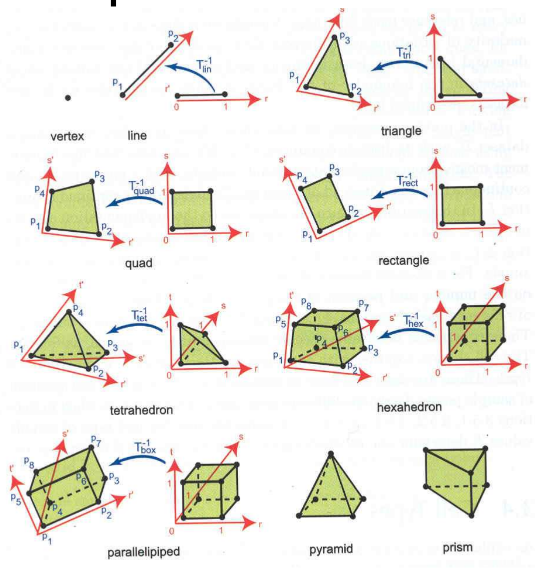
Reticulado de Células



Reticulado de Células

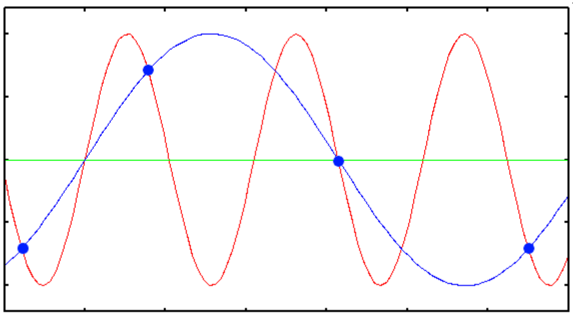


Tipos de Células



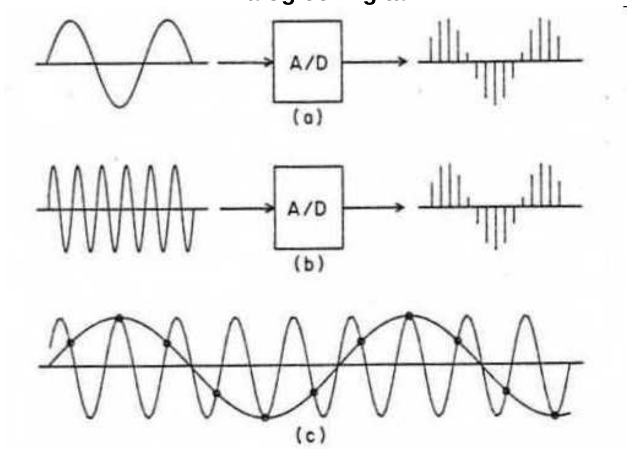
Amostragem

- Propriedades desejadas:
  - Precisa: reconstrução fiel;
  - Minimalista: número mínimo de amostras;
  - Genérica: comportamento equivalente aos dados contínuos;
  - Eficiente: sob o ponto de vista algorítmico;
  - Simples: algoritmos de baixa complexidade.

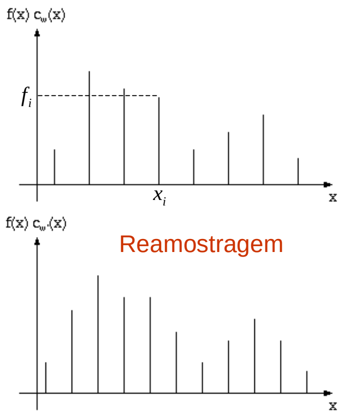


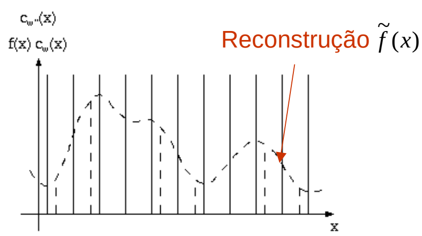
Amostras Adquiridas

Conversor Analógico-Digital



Reconstrução





Conhecidas N amostras (x_i, f_i)

determinar $\tilde{f}(x_i)$ tal que

$$\tilde{f}(x_i) = f(x_i) = f_i$$

Reconstrução = Interpolação

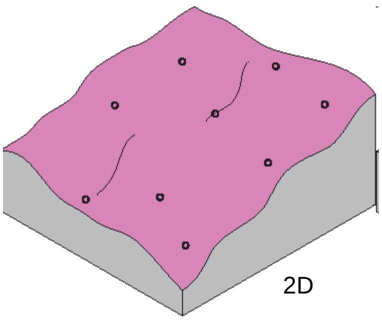
Interpolação

Conhecidas N amostras (x_i, f_i), determinar

$$\tilde{f}(x_i) = \sum_{i=1}^{N} f_i \phi_i^k$$, tal que

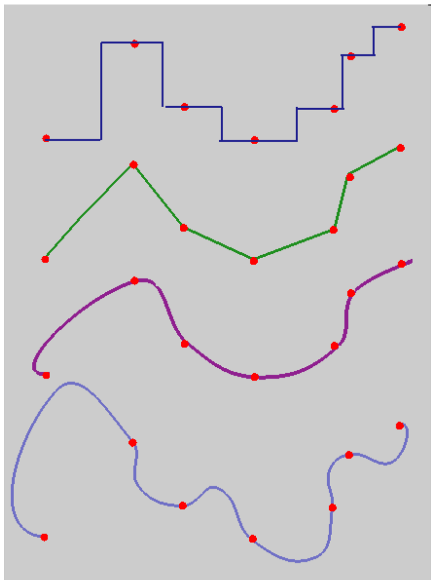
$$\tilde{f}(x_i) = f(x_i) = f_i$$

A solução não é única!



2D

1D

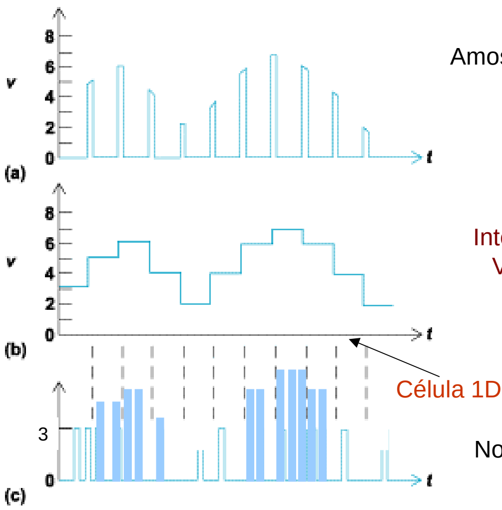


Interpolação por ϕ_i^0

Amostras Adquiridas

?

Novas Amostras

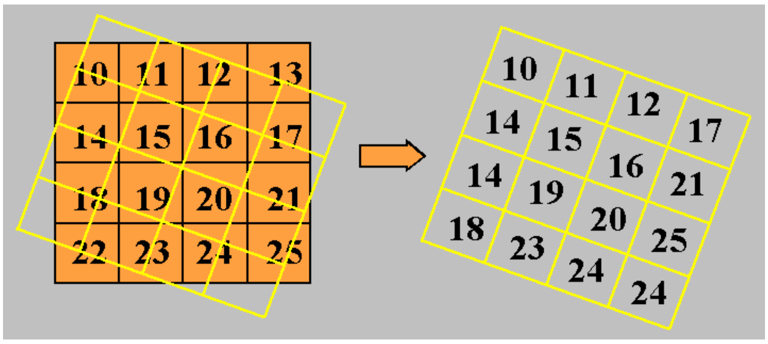


Amostras Adquiridas

Interpolação por Vizinho mais próximo

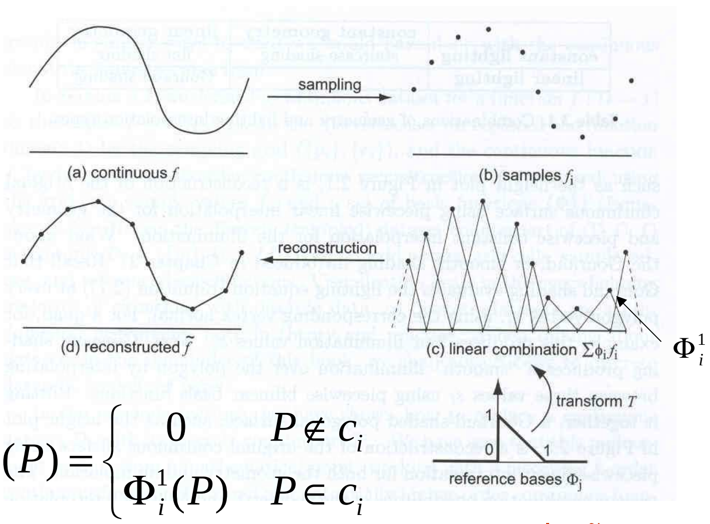
Novas Amostras

Interpolação por ϕ_i^0



Novas amostras

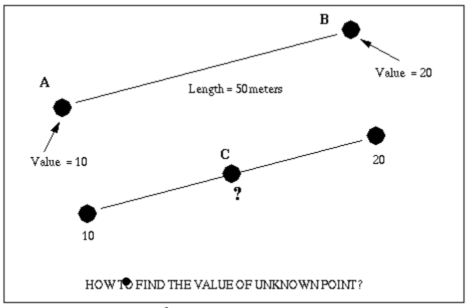
Interpolação por ϕ_i^1



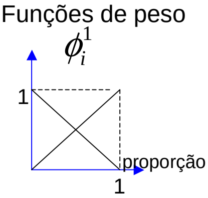
$$\phi_i^1(P) = \begin{cases} 0 & P \notin c_i \\ \Phi_i^1(P) & P \in c_i \end{cases}$$

Interpolação por parte

Combinação Convexa



Funções de peso



Regra de três: $\begin{cases} 50 \rightarrow 25 \\ (Valor_B - Valor_A) \rightarrow (Valor_C - Valor_A) \end{cases}$

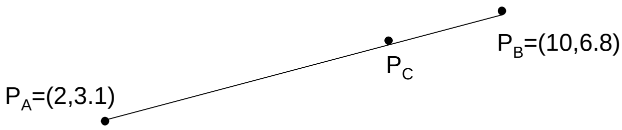
$(Valor_C - Valor_A)/(Valor_B - Valor_A) = (25/50)$

$Valor_C = Valor_A + (25/50)\,(Valor_B - Valor_A)$

$Valor_C = (1-(25/50))Valor_A + (25/50)\,Valor_B$

Proporção dos valores

Combinação Convexa



Regra de três: $\begin{cases} 1 \rightarrow 0.75 \\ (P_B - P_A) \rightarrow (P_C - P_A) \end{cases}$

$(P_C - P_A)/(P_B - P_A) = 0.75$

$P_C = P_A + 0.75\,(P_B - P_A)$

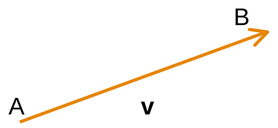
$P_C = (1-0.75)P_A + 0.75\,P_B$

Proporção de um vetor de valores

Interpolação por ϕ_i^1

Estudo do Caso Segmento

Segmento AB



$\mathbf{v} = B - A$

Pode ser representado, sem ambigüidade, pela seqüência de pontos {A,B}

Pontos interiores do segmento:

$$P(r) = A + r\mathbf{v} =$$
$$= A + r\,(B-A)$$
$$= rB + (1-r)A$$

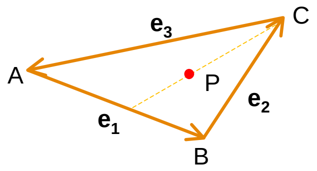
$$P(\Phi_1^1,\Phi_2^1) = \Phi_1^1 B + \Phi_2^1 A$$
$$\Phi_1^1 + \Phi_2^1 = 1$$
$$0 \le \Phi_1^1 , \Phi_2^1 \le 1$$

Funções interpoladoras

Interpolação por ϕ_i^1

Estudo do Caso Triângulo

Face ABC



$\mathbf{e_1} = B - A$
$\mathbf{e_2} = C - B$
$\mathbf{e_3} = A - C$

Pontos interiores do triângulo:

$$P(\alpha_1,\alpha_2,\lambda) = \lambda(\alpha_1 A + \alpha_2 B) + (1-\lambda)C$$
$$= \lambda\alpha_1 A + \lambda\alpha_2 B + (1-\lambda)C$$
$$P(\alpha,\lambda) = \lambda\alpha A + \lambda(1-\alpha)B + (1-\lambda)C$$

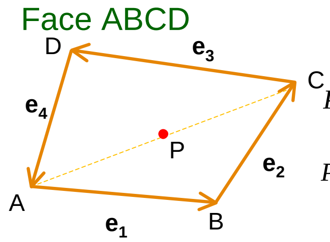
Fazendo $r=(\lambda\alpha)$ e $(1-s)=\lambda$, temos
$P(r,s) = rA + (1-r-s)B+sC$

$$P(\Phi_1^1,\Phi_2^1,\Phi_3^1) = \Phi_1^1 A + \Phi_2^1 B + \Phi_3^1 C$$
$$\Phi_1^1 + \Phi_2^1 + \Phi_3^1 = 1$$
$$0 \le \Phi_1^1 , \Phi_2^1 , \Phi_3^1 \le 1$$

Funções interpoladoras

Interpolação por ϕ_i^1

Estudo do Caso Quadrilátero



$\mathbf{e_1}$ = B – A
$\mathbf{e_2}$ = C - B
$\mathbf{e_3}$ = D – C
$\mathbf{e_4}$ = A – D

Pontos interiores do quadrilátero:

$$P(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\lambda) = \lambda(\alpha_1 A+\alpha_2 B)+(1-\lambda)(\beta_1 C+\beta_2 D)$$
$$= \lambda\alpha_1 A+\lambda\alpha_2 B+(1-\lambda)\beta_1 C+(1-\lambda)\beta_2 D$$
$$P(\alpha,\beta,\lambda) = \lambda\alpha A+\lambda(1-\alpha)B+(1-\lambda)\beta C+(1-\lambda)(1-\beta)D$$

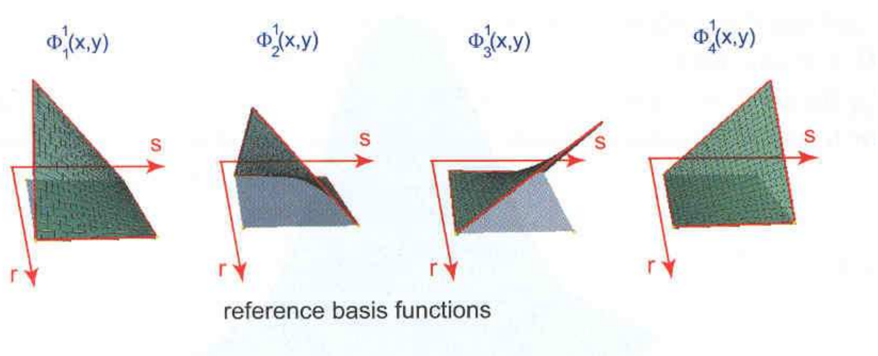
Interpolação bilinear

Fazendo r=(1-α)=β,s=(1-λ), temos
P(r,s) = (1-r)(1-s)A + r(1-s)B+rsC+(1-r)sD

$$P(\Phi_1^1,\Phi_2^1,\Phi_3^1,\Phi_4^1) = \Phi_1^1 A + \Phi_2^1 B + \Phi_3^1 C + \Phi_4^1 D$$
$$\Phi_1^1 + \Phi_2^1 + \Phi_3^1 + \Phi_4^1 = 1$$
$$0 \le \Phi_1^1,\Phi_2^1,\Phi_3^1,\Phi_4^1 \le 1$$

Funções interpoladoras

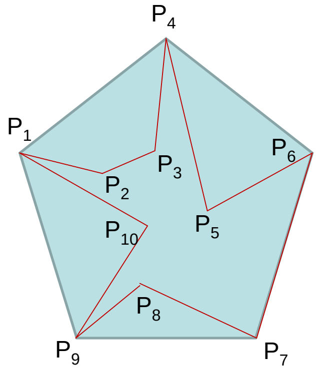
Interpolação por ϕ_i^1



Interpolação por ϕ_i^1

Generalização

Fecho Convexo: o menor polígono convexo que contém todos os pontos P_i



Pontos interiores do fecho convexo

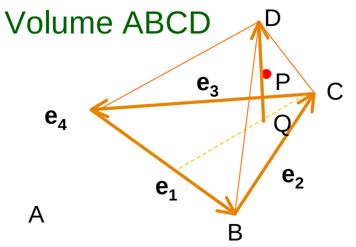
$$P(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_n P_n$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$$
$$0 \le \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \le 1$$

Funções Interpoladoras

Interpolação por ϕ_i^1

Estudo do Caso Tetraedro



$\mathbf{e_1}$ = B – A
$\mathbf{e_2}$ = C - B
$\mathbf{e_3}$ = D – C
$\mathbf{e_4}$ = A – D

Pontos interiores do tetraedro:

$$P(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\lambda) = \lambda(\alpha_1 A+\alpha_2 B+\alpha_3 C)+(1-\lambda)D$$
$$= \lambda\alpha_1 A+\lambda\alpha_2 B+\lambda\alpha_3 C+(1-\lambda)D$$
$$P(\alpha_1,\alpha_2,\lambda) = \lambda\alpha_1 A+\lambda\alpha_2 B+\lambda(1-\alpha_1-\alpha_2)C+(1-\lambda)D$$

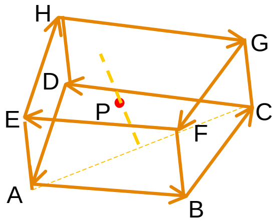
Fazendo $r=\lambda\alpha_1$, $s=\lambda\alpha_2$, $t=\lambda\alpha_3$, $(1-r-s-t)=(1-\lambda)$, temos
$P(r,s,t) = rA + sB+tC+(1-r-s-t)D$

$$P(\Phi_1^1,\Phi_2^1,\Phi_3^1,\Phi_4^1) = \Phi_1^1 A + \Phi_2^1 B + \Phi_3^1 C + \Phi_4^1 D$$
$$\Phi_1^1+\Phi_2^1+\Phi_3^1+\Phi_4^1 = 1$$
$$0 \le \Phi_1^1,\Phi_2^1,\Phi_3^1,\Phi_4^1 \le 1$$

Funções interpoladoras

Interpolação por ϕ_i^1

Estudo do Caso Paralelepípedo



Volume ABCDEFGH

Pontos interiores do paralelepípedo:

$$P(r,s,t) = t((1-r)(1-s)A + r(1-s)B + rsC + (1-r)sD) +$$
$$+(1-t)((1-r)(1-s)E + r(1-s)F + rsG + (1-r)sH)$$

Interpolação trilinear

$P(\Phi_1^1, \Phi_2^1, \Phi_3^1, \Phi_4^1, \Phi_5^1, \Phi_6^1, \Phi_7^1, \Phi_8^1) =$

$= \Phi_1^1 A + \Phi_2^1 B + \Phi_3^1 C + \Phi_4^1 D + \Phi_5^1 E +$
$+ \Phi_6^1 F + \Phi_7^1 G + \Phi_8^1 H$

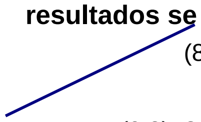
$\Phi_1^1 + \Phi_2^1 + \Phi_3^1 + \Phi_4^1 + \Phi_5^1 + \Phi_6^1 + \Phi_7^1 + \Phi_8^1 = 1$

$0 \leq \Phi_1^1, \Phi_2^1, \Phi_3^1, \Phi_4^1, \Phi_5^1, \Phi_6^1, \Phi_7^1, \Phi_8^1 \leq 1$

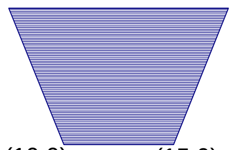
Funções interpoladoras

Exercícios

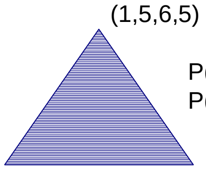
1. **Quais são as coordenadas dos pontos interpolados? Alteram os resultados se variarmos a ordem das amostras?**



P(0.2)=?
P(0.7)=?



P(0.2, 0.4)=?
P(0.3,0.3)=?



P(0.2, 0.4)=?
P(0.3,0.3)=?

2. **Podemos utilizar o mesmo esquema para interpolar os valores de f(P), onde P é uma amostra?**

Interpolação por ϕ_i^1

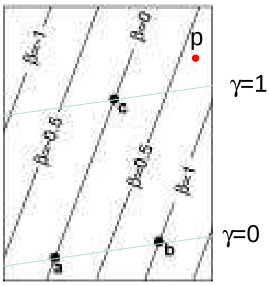
Problema Inverso

Triângulo: p(r,s,t), a, b, c $\longrightarrow$ r, s, t ?

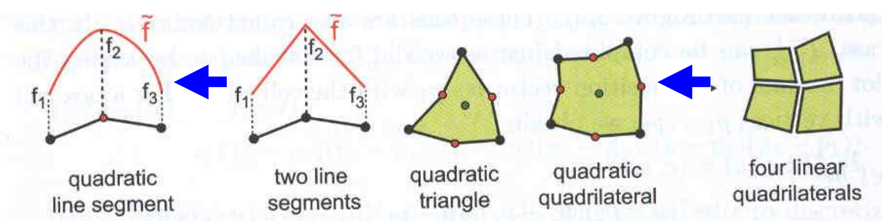
p(r,s,t) = ra + sb + tc

p = (1-s-t) a + sb + tc

(p-a) = s(b-a) + t(c-a)

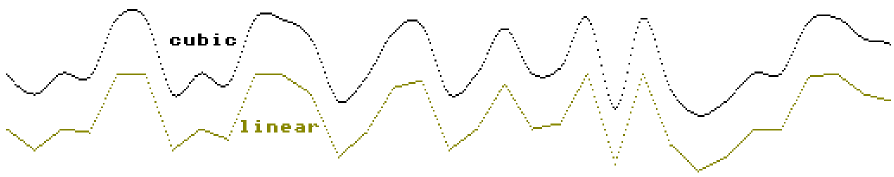


Interpolação por ϕ_i^2



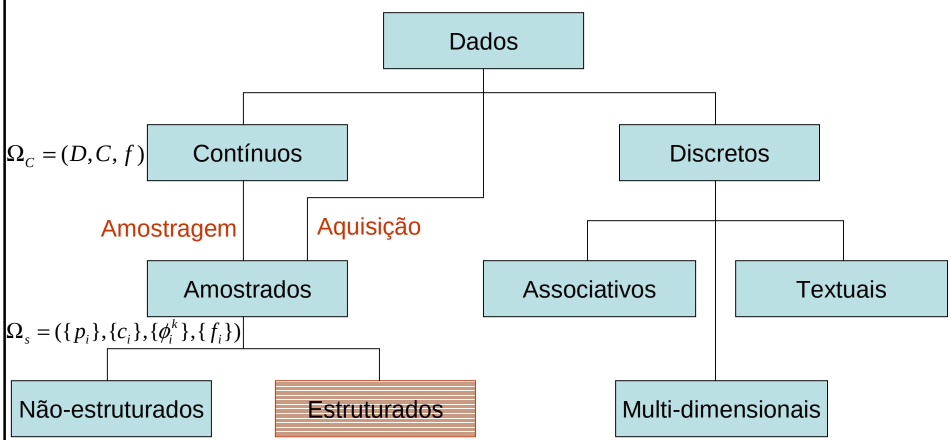
Interpolação quadrática

Interpolação por ϕ_i^3



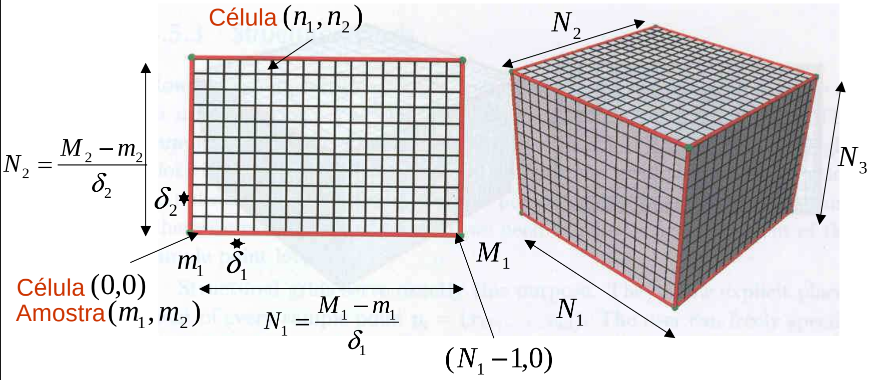
Interpolação cúbica

Grades Estruturadas



Reticulados Uniformes

Amostras p_i são igualmente espaçadas e paralelas aos eixos de referência

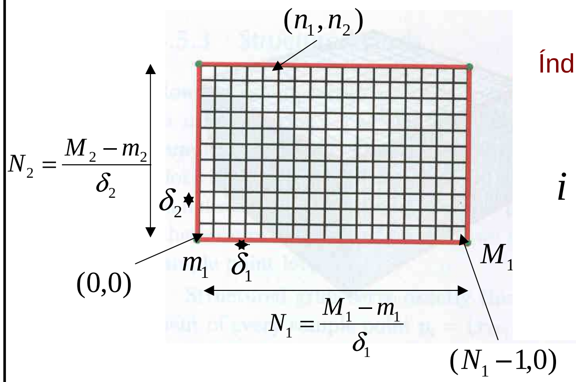


d = 2 (N_1xN_2 células)

d = 3 (N_1xN_2xN_3 células)

Ordenação Lexicográfica

(*a*,*b*) ≤ (*a'*,*b'*), se e somente se, *a* < *a'* ou (*a* = *a'* e *b* ≤ *b'*).



Índice da ordenação lexicográfica

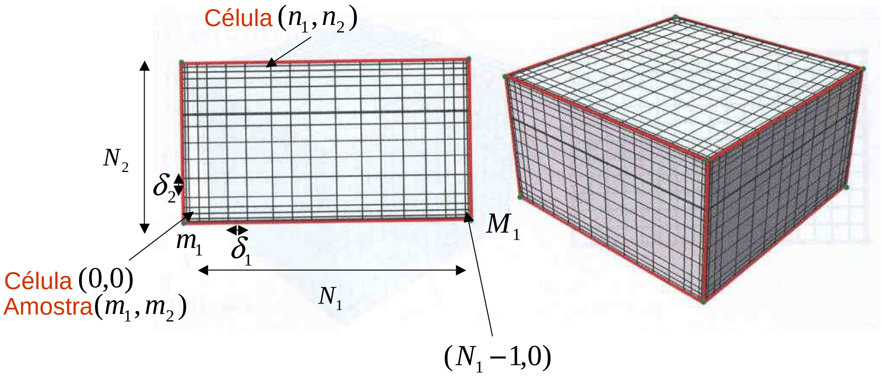
$$i = n_1 + \sum_{k=2}^{d} \left(n_k \prod_{l=1}^{k-1} N_l\right)$$

Converter um arranjo de n dimensões em uma lista de células

Reticulados Retangulares

Os espaçamentos das amostras p_i são distintos em cada direção.

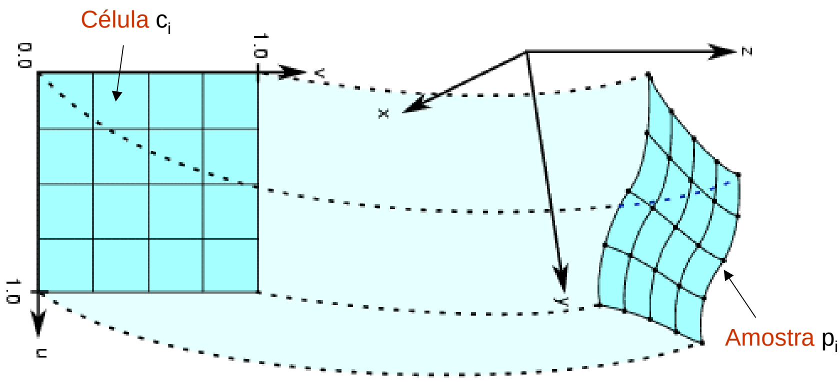
δ_1, δ_2 são variáveis!



d = 2 d = 3

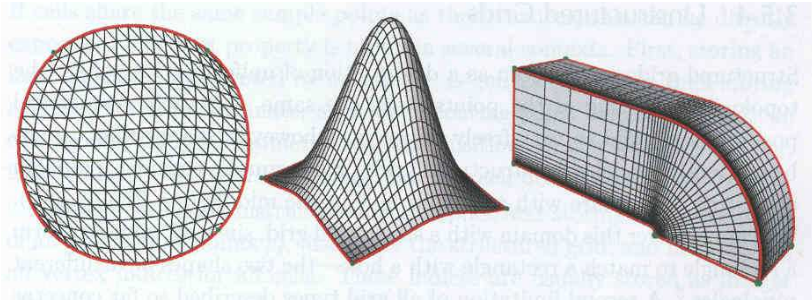
Malhas Estruturadas

As amostras p_i são conectadas segundo um padrão regular.



Regularidade na conectividade não implica em regularidade na geometria!

Malhas Estruturadas

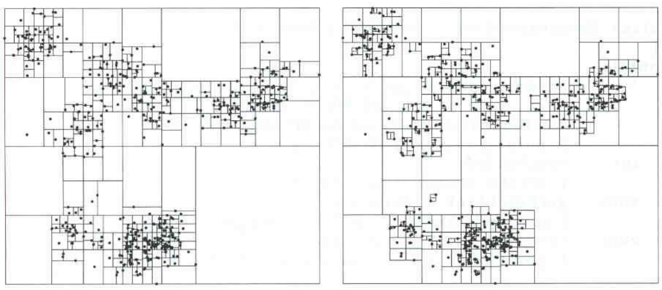


Complexidade de armazenamento: $3\prod_{i=1}^{d} N_i + d$

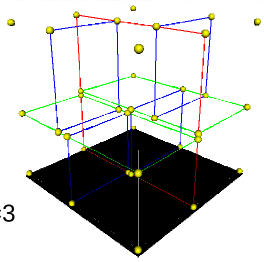
Complexidade em acessos: célula $\leftrightarrow$amostra?

Estruturas de Árvore

Árvore kd



k=2



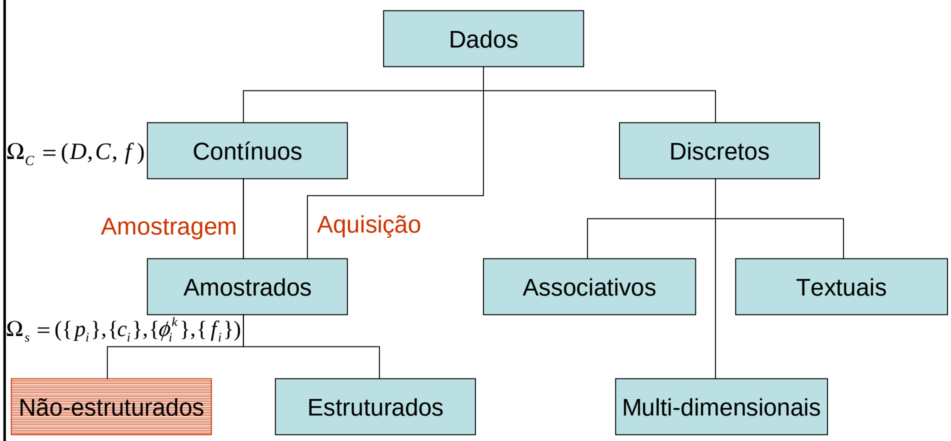
k=3

Árvore bd: árvore binária que organiza as amostras multi-dimensionais em subintervalos regulares

Exercícios

1. Explique o algoritmo da Listing 3.1 do livro-texto.
2. Explique a afirmação do livro-texto: "*The major advantages of uniform grids are the simple implementation and practically zero storage requirements. Regardless of its size, storing a d-dimensional grid itself takes 3d floating-point values*."
3. Quais são as desvantagens de reticulados uniformes?
4. Comparando com os reticulados uniformes, quais problemas os reticulados retangulares conseguem contornar?
5. Comparando com os retangulares, quais são ganhos e perdas em reticulados paramétricos?
6. Esboce uma função de correspondência entre as coordenadas de uma célula e as coordenadas de uma amostra em cada um dos tipos de reticulado. Sugestão: ler a seção 3.8.1 do livro-texto.
7. Pesquise e descreva sucintamente as árvores kd e bd.

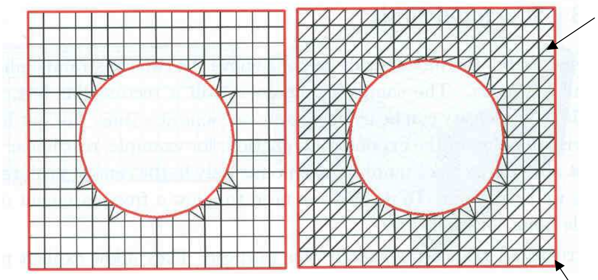
Grades Não-estruturadas



Grades Não-Estruturadas

As amostras p_i são conectadas por uma malha de topologia arbitrária.

Célula c_i

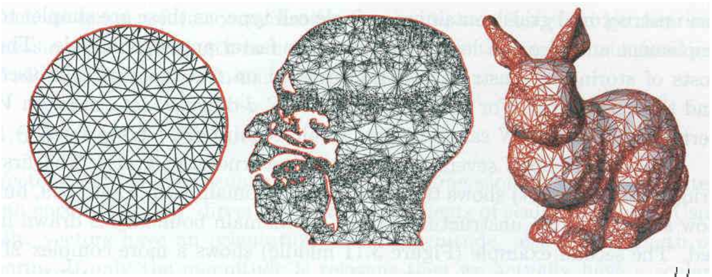


Amostra p_i

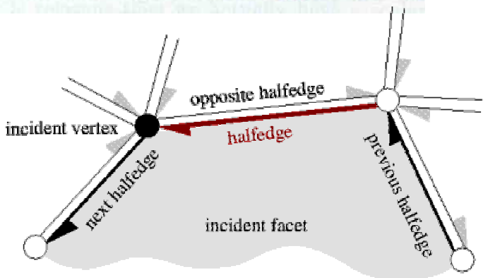
Malha é uma coleção de células não sobreposta.
Célula é contornada por uma coleção de arestas.
Aresta é contornada por uma coleção de vértices.
} Topologia

A geometria de vértices é dada pelas coordenadas das amostras.

Estrutura *Halfedge*



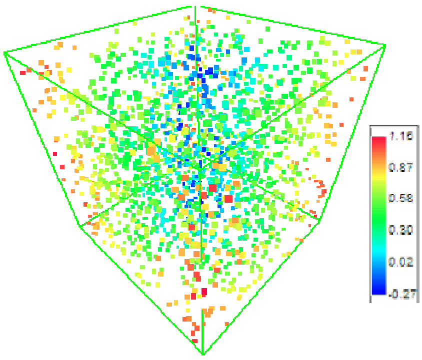
Por eficiência, estruturas mais elaboradas foram desenvolvidas para armazenar a topologia das amostras.
Por exemplo, *halfedge* data structure

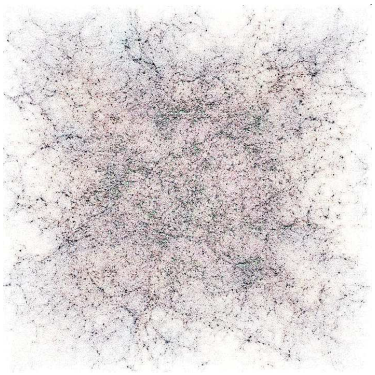


Fonte: CGAL

Amostras Dispersas

Não se conhece/Não há uma organização das amostras p_i .

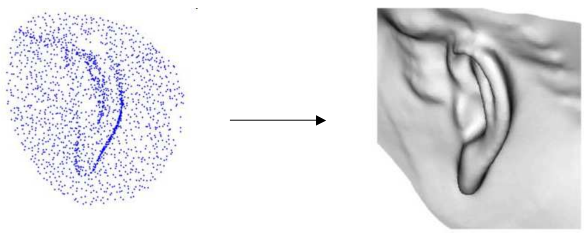




Nuvem de amostras!

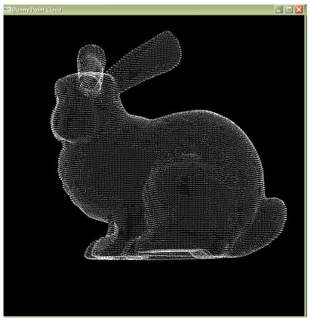
Reconstrução

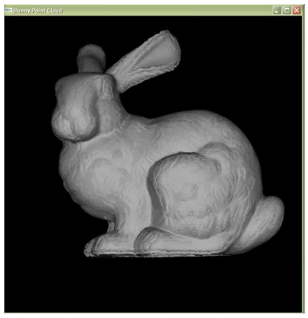
- Estimar uma malha interpoladora das amostras
- Interpolar as amostras com uso de uma base de funções – *radial basis functions* RBFs



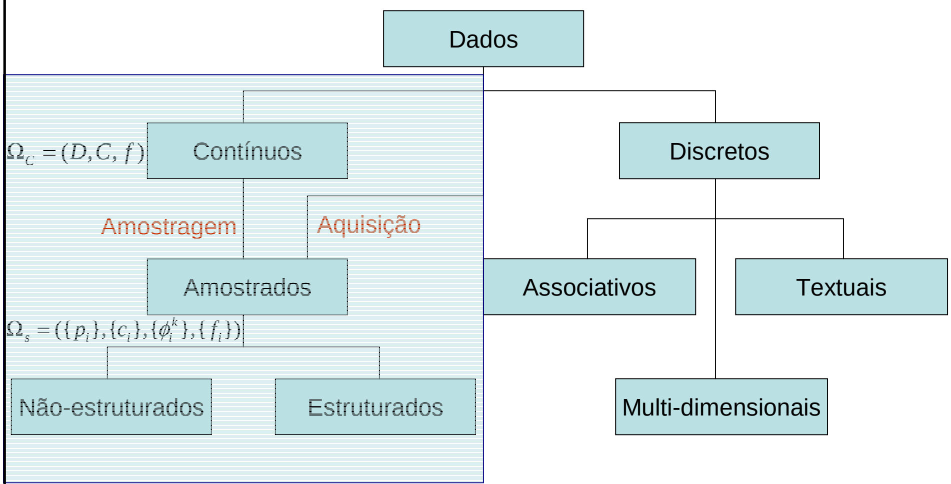
Exercícios

1. Analise a complexidade de uma grade não-estruturada, em termos de armazenamento e processamento.
2. Pesquise e descreva sucintamente a estrutura *halfedge*.
3. Qual é a diferença entre uma reconstrução da topologia e uma reconstrução visual/gráfica de uma nuvem de pontos?





Classificação



Amostras Adquiridas