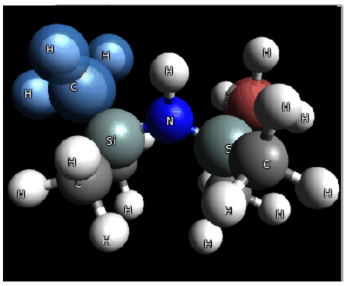
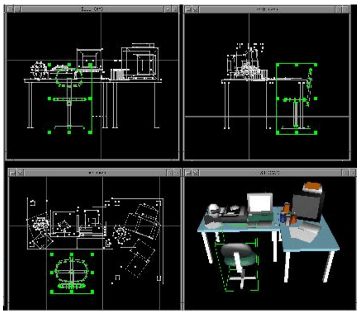
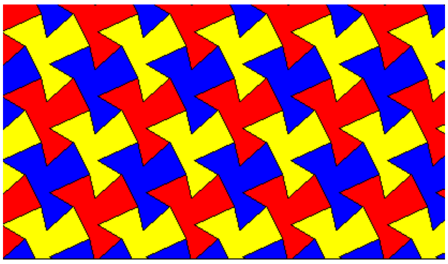
# Transformações Geométricas

Modificação sobre os dados geométricos





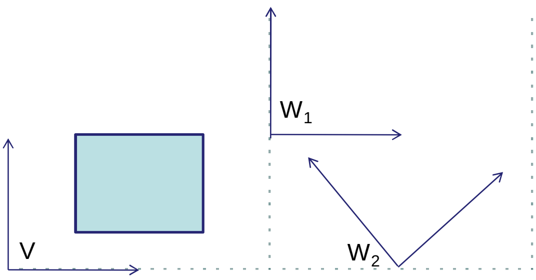




# Transformações Afins

Transformações = funções f entre dois espaços vetoriais V e W que preservam as operações de adição vetorial e multiplicação por escalar do conjunto K

$f: V \rightarrow W$

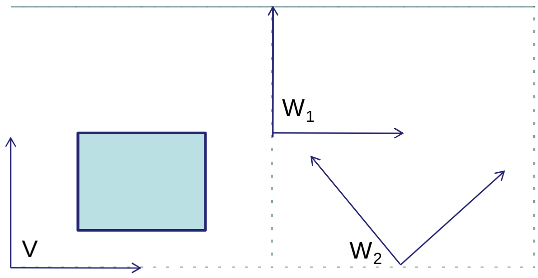



Afins = lineares + deslocamento

# Transformações Afins

Transformações = funções f entre dois espaços vetoriais V e W que preservam as operações de adição vetorial e multiplicação por escalar do conjunto K

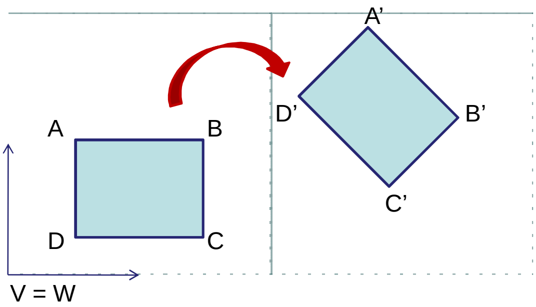
f: V $\rightarrow$ W




Afins = lineares + deslocamento

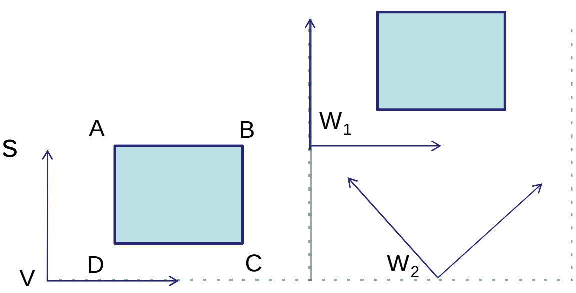


# Transformações Afins

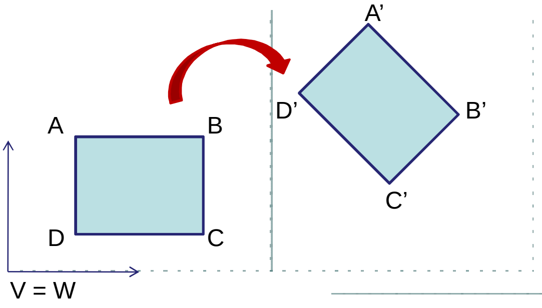



No mesmo referencial

Mudança de referenciais

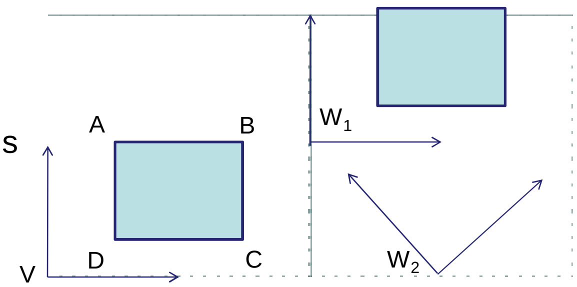


# Transformações Afins




No mesmo referencial

Mudança de referenciais



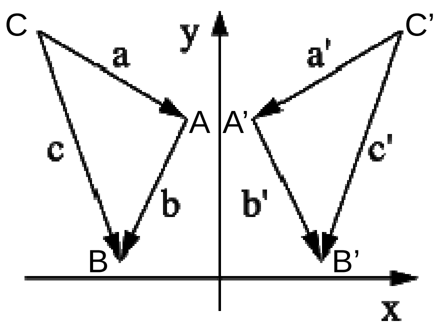

EA978 – 2s2008 - Ting

# Transformações Lineares

Lineares= satisfazem a relação

$f(\alpha p+\beta q) = \alpha f(p)+\beta f(q), \forall p,q \in V$ e $\forall \alpha,\beta \in K$

Reflexão




Pontos

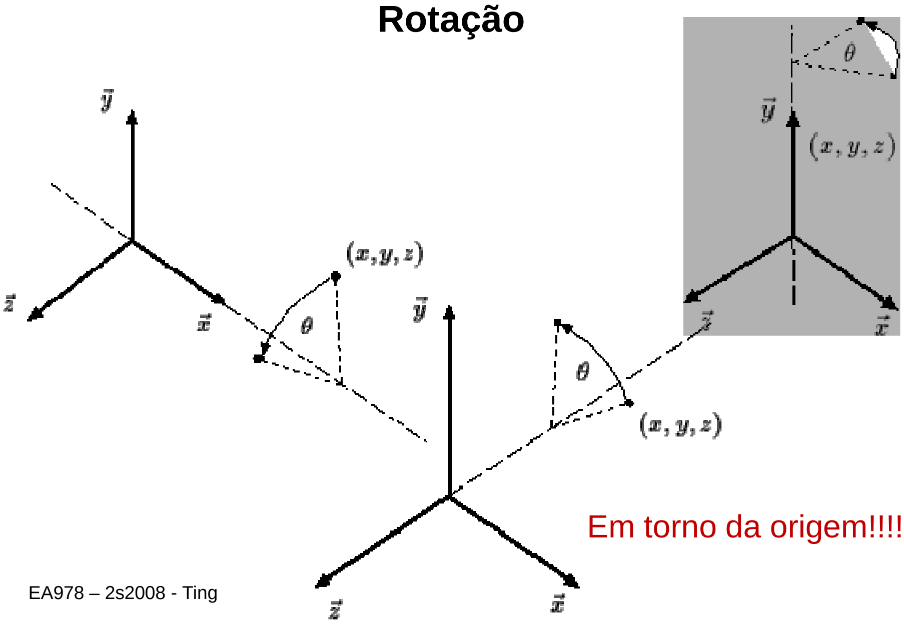
$$\begin{pmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} A'_x & B'_x & C'_x \\ A'_y & B'_y & C'_y \end{pmatrix}$$

Vetores: diferença de 2 pontos

$$\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} a'_x & b'_x & c'_x \\ a'_y & b'_y & c'_y \end{pmatrix}$$

EA978 – 2s2008 - Ting

# Transformações Lineares
## Rotação




Em torno da origem!!!!



# Transformações Lineares
## Notação Matricial

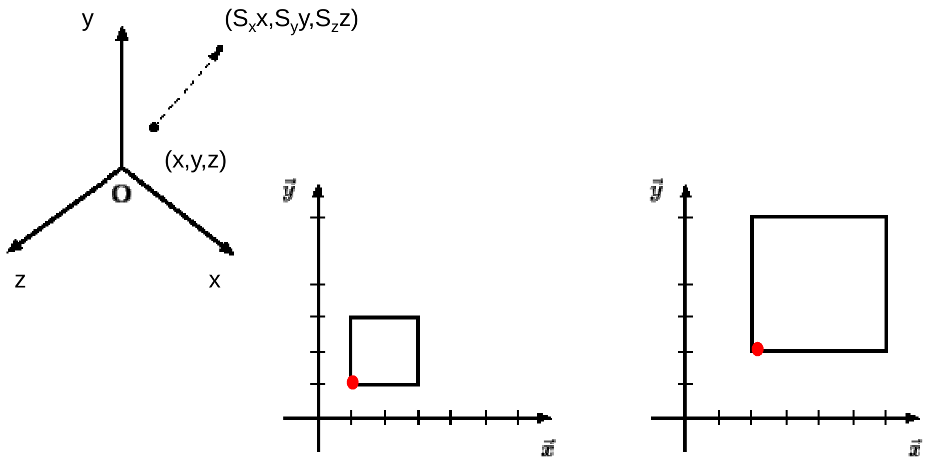
$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Em torno da origem!!!!

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ 0 & \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\,\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\,\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

# Transformações Lineares
## Mudança de Escala




Como se pode evitar deslocamentos?



# Transformações Lineares
## Notação Matricial

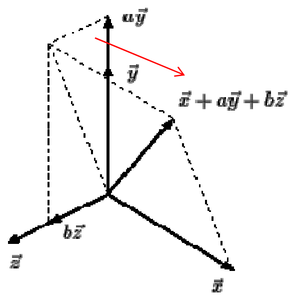
$$S = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix}$$

Uniforme

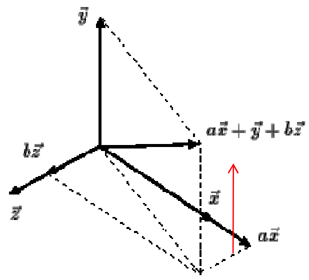
$$S = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{pmatrix}$$

Não-Uniforme

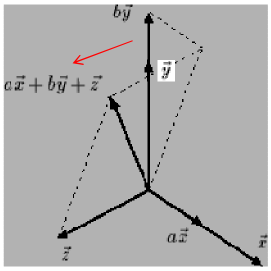
# Transformações Lineares
## Cisalhamento (*Shearing*)




x em relação a y e z




y em relação a x e z




z em relação a x e y

Gráfico das funções de cisalhamento passam pela origem!!!!



# Transformações Lineares
## Notação Matricial

$$Sh_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta x/\Delta z \\ 0 & 1 & \Delta y/\Delta z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Sh_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \Delta y/\Delta x & 1 & 0 \\ \Delta z/\Delta x & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Sh_y = \begin{pmatrix} 1 & \Delta x/\Delta y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \Delta z/\Delta y & 1 \end{pmatrix}$$

# Transformações Afins

Transformações = funções f entre dois espaços vetoriais V e W que preservam as operações de adição vetorial e multiplicação por escalar do conjunto K

$f: V \rightarrow W$

Afins = lineares + deslocamento

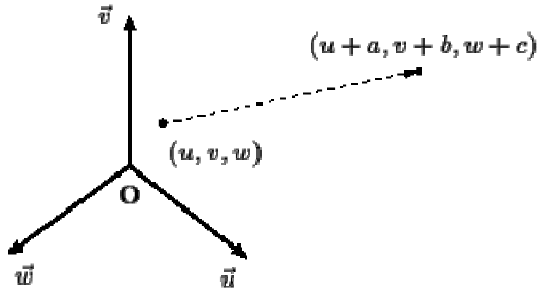
$\downarrow$

Reflexões
Rotação
Mudança de escala
Cisalhamento



# Deslocamentos

## Translações



# Translações
## Notação Matricial

$$Tr = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$



# Transformações Afins
## Notação Matricial

Transformação Linear

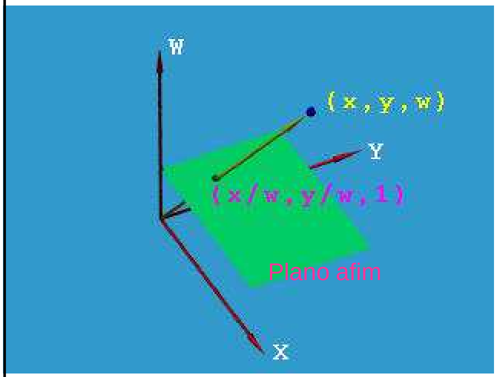
Translação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas = pontos $R^n$ representados por (n+1) escalares

# Coordenadas Homogêneas

(x,y,z,w)




Ponto

(x/w,y/w,z/w,1), ou seja, projeção de (x,y,z,w), sobre o plano w=1 com centro de projeção na origem.

Vetor

"diferença" de 2 pontos homogeneizados → Quarta coordenada(w) é nula

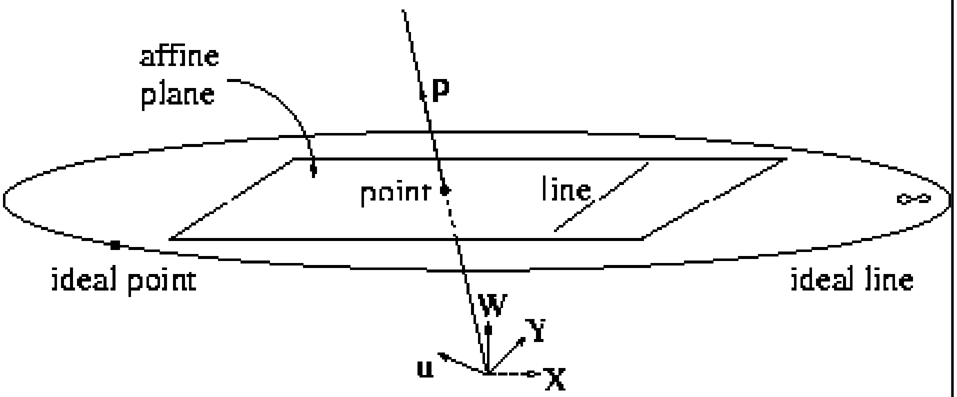
$\lim_{w \to 0} (x/w, y/w, z/w, w/w) = (\infty, \infty, \infty, 1)$

na direção (x,y,z)

EA978 – 2s2008 - Ting

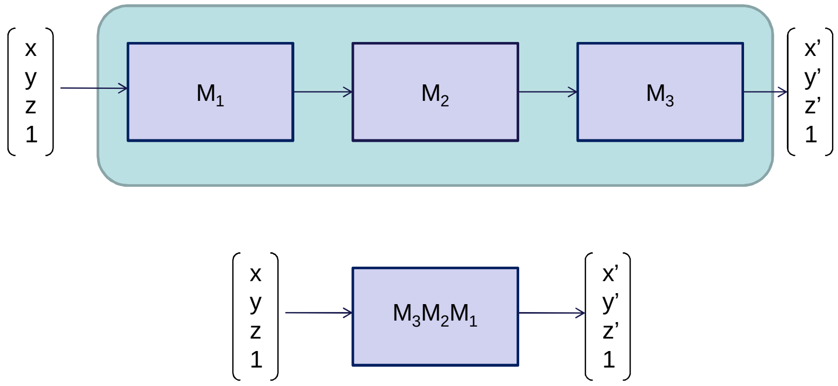
# Coordenadas Homogêneas

## Plano Afim




EA978 – 2s2008 - Ting

# Transformações Afins
## Notação Matricial



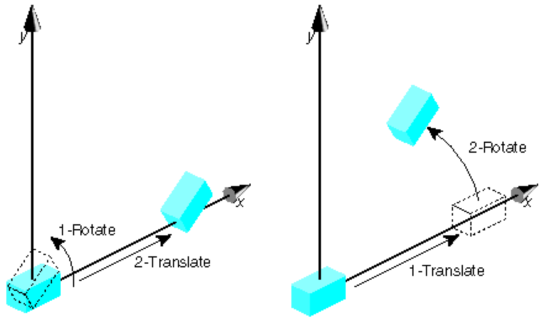

Concatenação de matrizes



# Propriedades de Matrizes

- Multiplicação:
  - Nem sempre vale a comutatividade
  - Associatividade ((AB)C = A(BC))
  - Nem sempre vale o cancelamento (AC=BC não implica em A=B)
- Transposta: as linhas se transformam em colunas
  - $(A^t)^t = A$
  - $(A+B)^t = A^t + B^t$
  - $(AB)^t = B^tA^t$
- Matrizes com propriedades especiais
  - Matriz identidade I: IA= A
  - Matriz inversa: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
  - Matriz ortonormal: $A^{-1} = A^t$

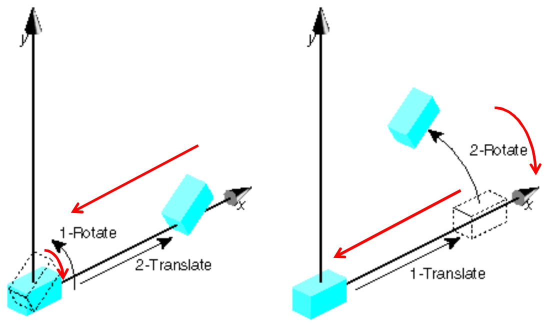
# Dois Exemplos




$P' = T.(R.P) = (T.R).P$ $P' = R.(T.P) = (R.T).P$



# Transformações Inversas



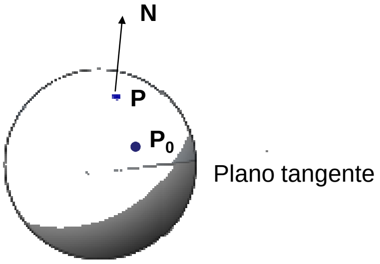

$P' = T.(R.P) = (T.R).P$
$(T.R)^{-1}\ P' = P$
$R^{-1}\ T^{-1}\ P' = P$

$P' = R.(T.P) = (R.T).P$
$(R.T)^{-1}\ P' = P$
$T^{-1}\ R^{-1}\ P' = P$

Matrizes inversas

# Vetores Normais

Em superfície suave, pode-se definir localmente um plano tangente a cada ponto. O vetor normal deste plano coincide com o vetor normal da superfície neste ponto **P**.




**Antes da transformação** T:

$N(P_0 - P) = 0$

**Após a transformação** T:

$N'(TP_0 - TP) = 0$

$N(P_0 - P) = N'T(P_0 - P)$

$N = N'T$

$NT^{-1} = N'$

**Se for deslocamento** d:

$N'(P_0 + d - (P + d)) = N(P_0 - P) = 0$

$N' = N$

**N e N' em vetor-linha!**



# Funções Analíticas

**Equação de um segmento**

$P(t) = (1-t)P_1 + t\,P_2$

Transformação linear:

$(1-t)\,T_L P_1 + tT_L P_2 = T_L[(1-t)P_1 + tP_2] = T_L P(t)$

Translação:

$(1-t)\,(P_1 + d) + t(P_2 + d) = (1-t)P_1 + tP_2 + (1+t-t)d = P(t)+d$

**Equação de uma curva de Bézier**

$P(t) = \Sigma\, B_{n,i}(t)\, P_i$

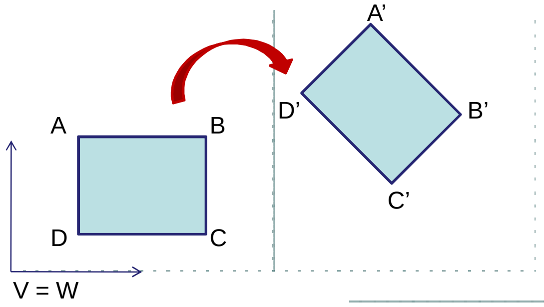
Transformação linear:

$\Sigma\, B_{n,i}(t)\,(T_L\, P_i) = T_L(\Sigma\, B_{n,i}(t)\, P_i) = T_L P(t)$

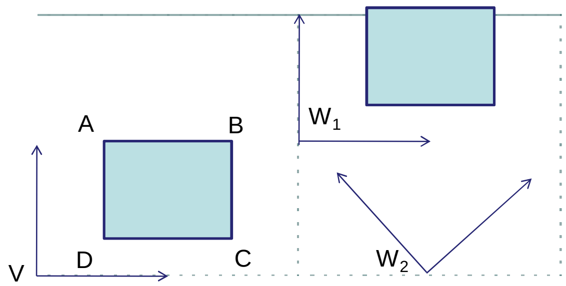
Translação:

$\Sigma\, B_{n,i}(t)\,(P_i + d) = \Sigma\, B_{n,i}(t)\, P_i + \Sigma\, B_{n,i}(t)\, d = P(t) + d$

# Transformações Afins




No mesmo referencial



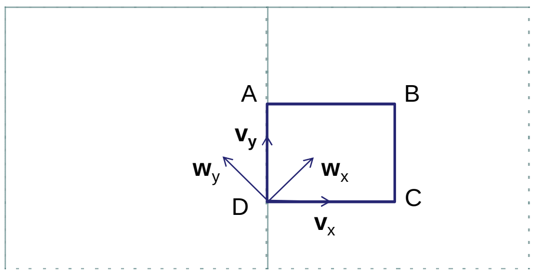

Mudança de referenciais
- reposicionamento do objeto
- referencial mais conveniente



# Mudança de Referenciais Referencial mais Conveniente

Transformação de Base

$$T(\mathbf{w}_x \ \ \mathbf{w}_y) = (\mathbf{v}_x \ \ \mathbf{v}_y)$$




$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{x,x} & \mathbf{v}_{y,x} \\ \mathbf{v}_{x,y} & \mathbf{v}_{y,y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{x,x} & \mathbf{w}_{y,x} \\ \mathbf{w}_{x,y} & \mathbf{w}_{y,y} \end{pmatrix}^{-1}$$

$P' = T\,P \rightarrow P' = B_V\, B_W^{-1} P$

# Mudança de Referenciais

## Reposicionamento de Objetos

$P' = TP$

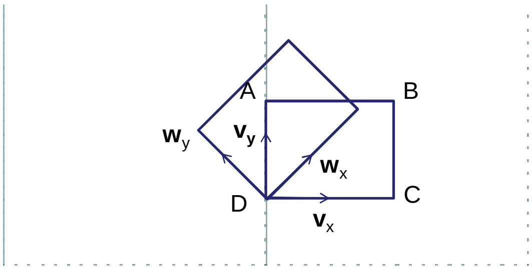
$T = P'P^{-1}$,

se P for inversível

⇕

"Transformação de Base"

$$(\mathbf{w}_x \ \mathbf{w}_y) = T\,(\mathbf{v}_x \ \mathbf{v}_y)$$

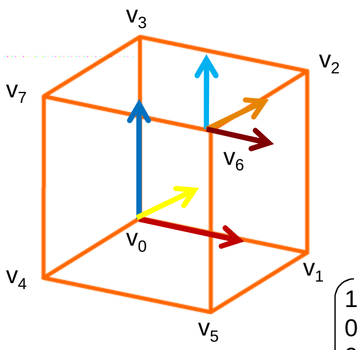


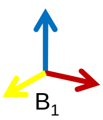

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{x,x} & \mathbf{w}_{y,x} \\ \mathbf{w}_{x,y} & \mathbf{w}_{y,y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{x,x} & \mathbf{v}_{y,x} \\ \mathbf{v}_{x,y} & \mathbf{v}_{y,y} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$T = B_w B_v^{-1}$$

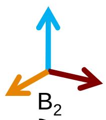
EA978 – 2s2008 - Ting

# Exemplo




$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

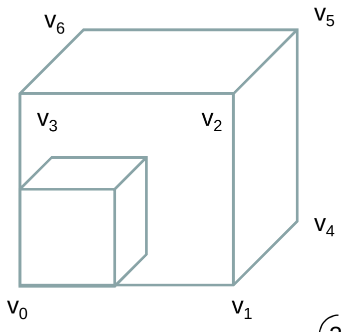


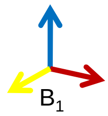

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

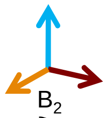
$$P' = B_1 B_2^{-1} P$$

# Exemplo




$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



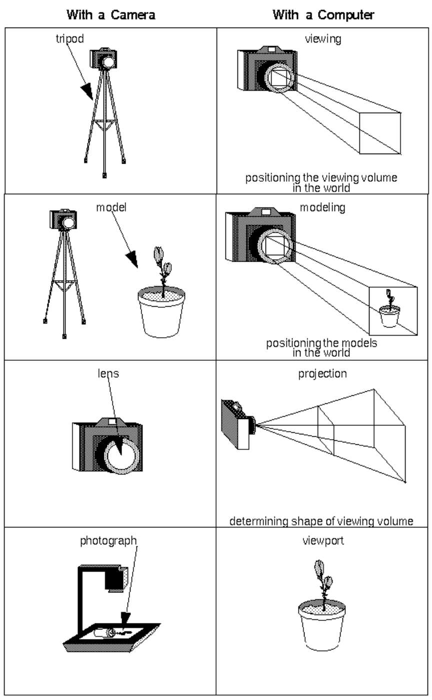

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P' = B_2 B_1^{-1} P$$

# Exemplo

## Geração de Imagens

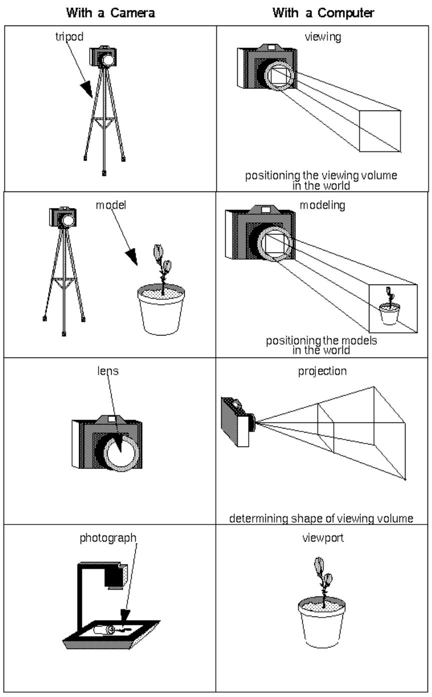


# Exemplo

Referencial da Câmera

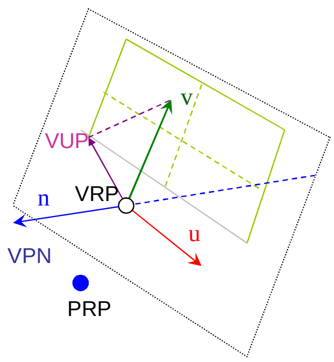
Referencial Normalizado

Referencial da Janela

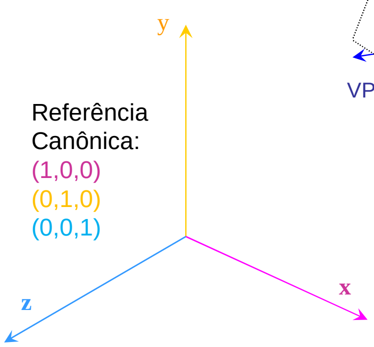



# Referencial da Câmera

VUP (up): view up vector
VRP: view reference point
VPN (n): view plane normal



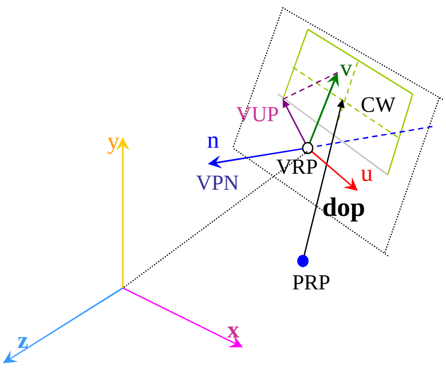

Referência
Canônica:
(1,0,0)
(0,1,0)
(0,0,1)




Referencial da Câmera:
u =VUP x n/|VUP x n|
n x u
n = VPN/|VPN|

EA978 – 2s2008 - Ting

# Referencial da Câmera




(1) VRP na origem

$$Tr = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -VRP_x \\ 0 & 1 & 0 & -VRP_y \\ 0 & 0 & 1 & -VRP_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) (u,v,n) em vetores base ortonormais

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{VPN}}{\left|\overrightarrow{VPN}\right|}$$

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{VUP} \times \vec{n}}{\left|\overrightarrow{VUP} \times \vec{n}\right|}$$

$$\vec{v} = \vec{n} \times \vec{u}$$

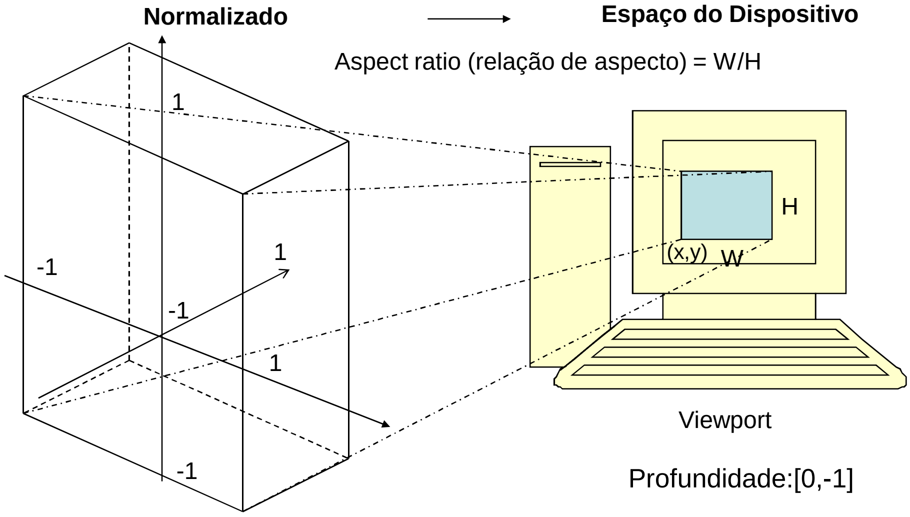
$$R = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Referencial da Janela

**Normalizado** → **Espaço do Dispositivo**

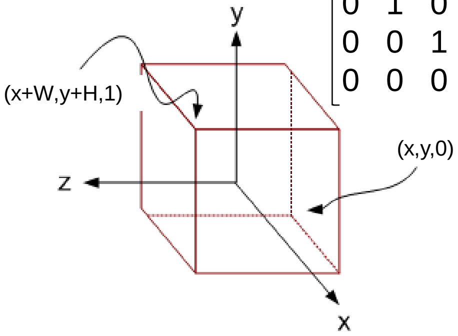
Aspect ratio (relação de aspecto) = W/H




Viewport

Profundidade:[0,-1]

# Referencial da Janela




$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W/2 & 0 & 0 & W/2+x \\ 0 & H/2 & 0 & H/2+y \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(-1,1,-1,1,-1,1) \longrightarrow (x,x+W,y,y+H,0,1)$

EA978 – 2s2008 - Ting

# OpenGL

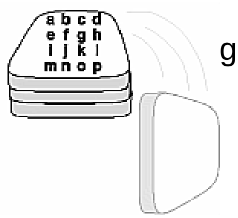
Pilha de Matrizes de Transformação

*MODELVIEW*
*PROJECTION*

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_4 & a_8 & a_{12} \\ a_1 & a_5 & a_9 & a_{13} \\ a_2 & a_6 & a_{10} & a_{14} \\ a_3 & a_7 & a_{11} & a_{15} \end{bmatrix}$$

glTranslate
glRotate
glScale
glMultMatrix
glFrustum
glOrtho
glViewport

glPushMatrix



glPopMatrix

EA978 – 2s2008 - Ting