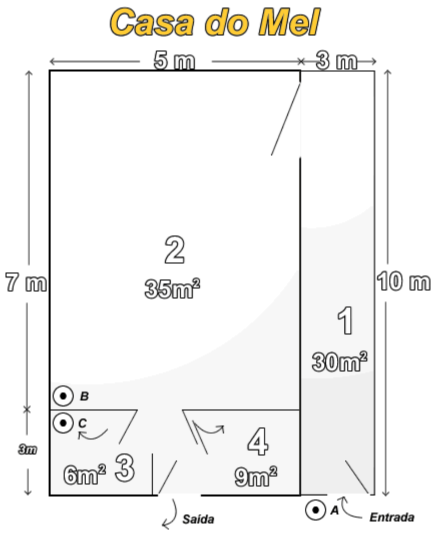
Tipos de Dados Básicos



Escalares

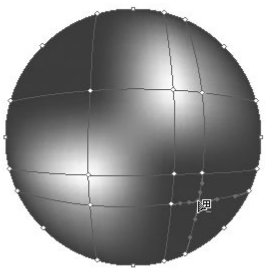
Pontos

Vetores

EA978 – 2s2008 - Ting

Tipos de Dados Básicos

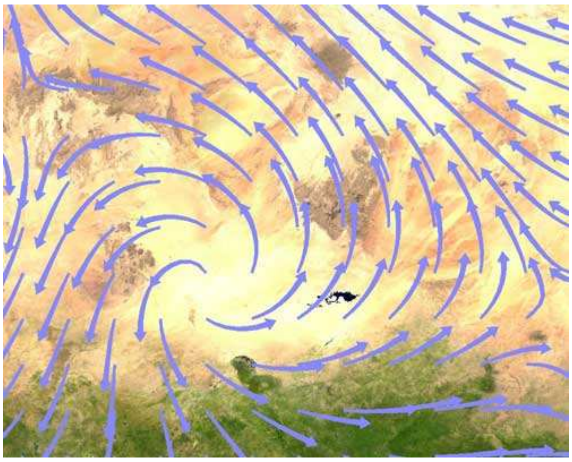
Pontos



EA978 – 2s2008 - Ting

Tipos de Dados Básicos

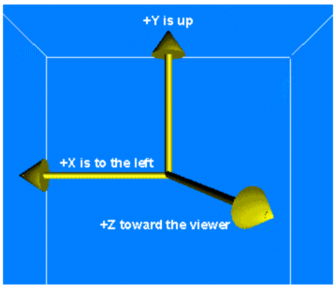
Vetores

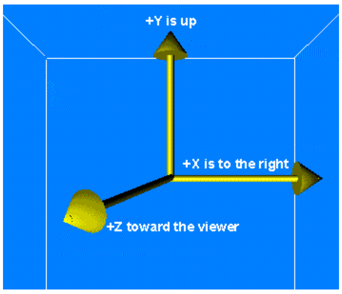


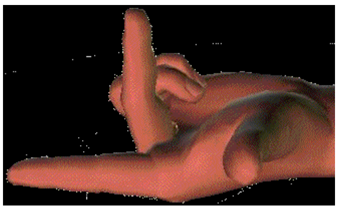
EA978 – 2s2008 - Ting

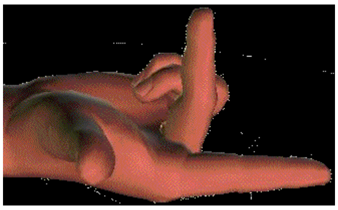
Sistemas de Referência

Base de vetores linearmente independentes



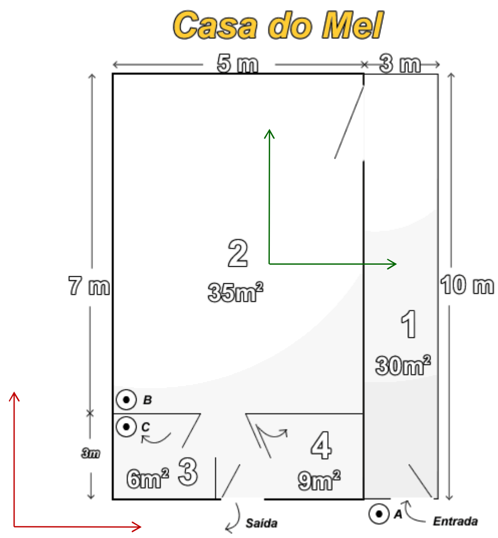






EA978 – 2s2008 - Ting

Sistemas de Referência
Escalares

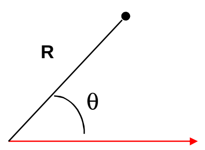


Livres de sistema de referência

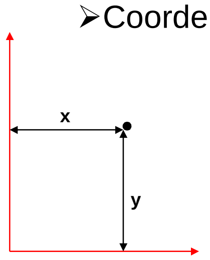
Sistemas de Referência
Pontos

n valores escalares no espaço R^n

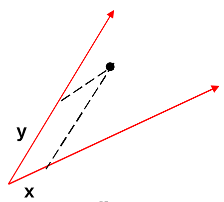
- ➢Coordenadas cartesianas
- ➢Coordenadas polares
- ➢Coordenadas cilíndricas
- ➢Coordenadas esféricas
- ➢Coordenadas afins



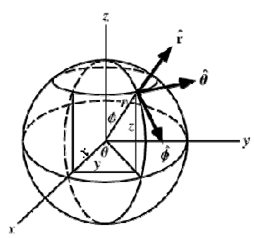
Polares



Cartesianas



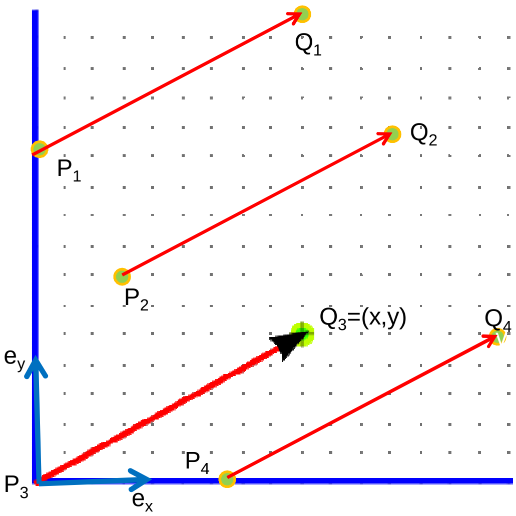
Afins



Esféricas

Sistemas de Referência

Vetores



"Diferença" entre 2 pontos

v = $Q_i - P_i$

- Magnitude (|v|)
- Orientação

Vetor contravariante

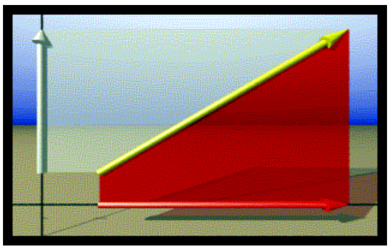
$$\mathbf{Q_3} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

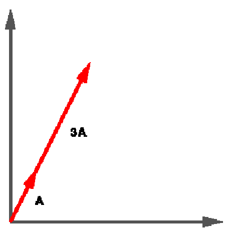
Vetor covariante

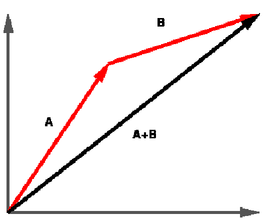
$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_x & e_y \end{bmatrix}$$

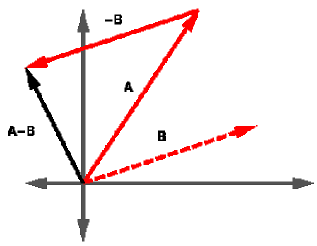
EA978 – 2s2008 - Ting

Operações sobre Vetores





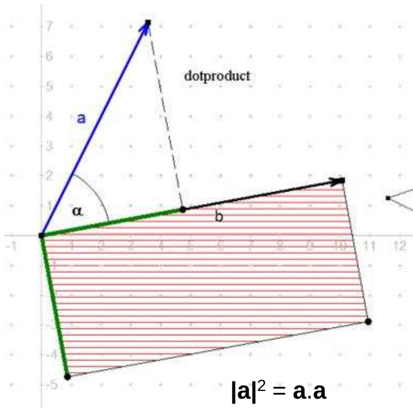


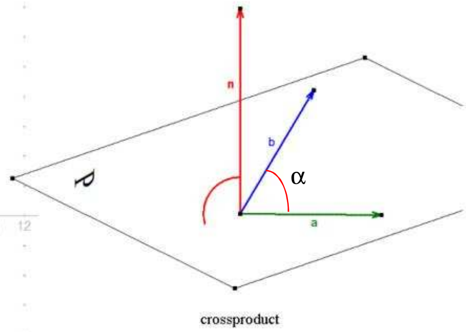


EA978 – 2s2008 - Ting

Operações sobre Vetores

Produto Escalar e Vetorial





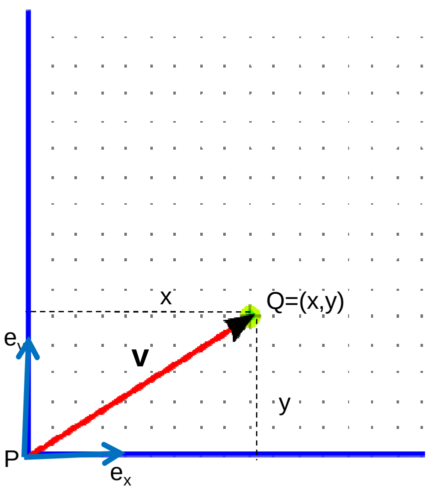
$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}.\mathbf{a}$

$\cos \alpha = \mathbf{a}.\mathbf{b}/|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$

$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$

$\text{sen}\ \alpha = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|/|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$

Representação



$\mathbf{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ponto: $Q = \begin{bmatrix} e_x & e_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}$

$P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ "Absoluta"

Vetor: "diferença" entre 2 pontos

$\mathbf{v} = Q - P$

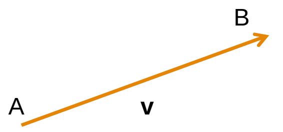
$= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

"Relativa"

Tipos de Dados Geométricos

Representações de figuras geométricas complexas a partir de escalares, pontos e vetores

Segmento AB



$\mathbf{v} = B - A$

Pode ser representado, sem ambigüidade, pela seqüência de pontos {A,B}

Pontos interiores do segmento

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= A + \alpha\mathbf{v} = \\ &= A + \alpha\,(B-A) \\ &= \alpha B + (1-\alpha)A \end{aligned}$$

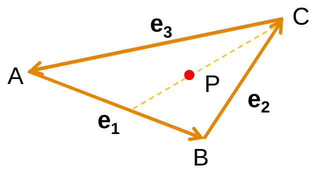
$$P(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 B + \alpha_2 A$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$
$$0 \le \alpha_1, \alpha_2 \le 1$$

Tipos de Dados Geométricos

Quais são as coordenadas do ponto médio do segmento PQ, onde P = (1,1,1) e Q = (5,5,5)?

Tipos de Dados Geométricos

Face ABC



$\mathbf{e_1}$ = B – A
$\mathbf{e_2}$ = C - B
$\mathbf{e_3}$ = A - C

Pode ser codificado, sem ambigüidade, pela seqüência de pontos {A,B,C}

Pontos interiores do triângulo

$$P(\alpha_1,\alpha_2,\lambda) = \lambda(\alpha_1 B + \alpha_2 A)+(1-\lambda)C$$
$$= \lambda\alpha_1 B + \lambda\alpha_2 A + (1-\lambda)C$$

$$P(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha B + \beta A + \gamma C$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$
$$0 \leq \alpha,\beta,\gamma \leq 1$$

EA978 – 2s2008 - Ting

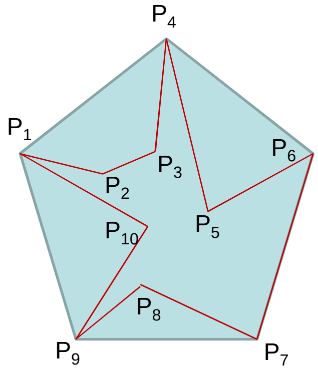
Tipos de Dados Geométricos

Quais são as coordenadas do baricentro da face triangular ABC, onde A = (1,1,1), B = (5,5,5) e C=(3,9,3)?

EA978 – 2s2008 - Ting

Tipos de Dados Geométricos

Fecho Convexo: o menor polígono convexo que contém todos os pontos P_i



Pontos interiores do fecho convexo

$$P(\alpha_1,\alpha_2, ..., \alpha_n) = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + ... + \alpha_n P_n$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$$
$$0 \leq \alpha_1,\alpha_2, ... ,\alpha_n \leq 1$$

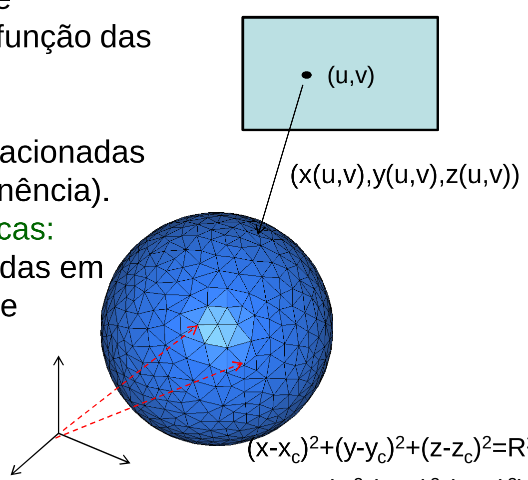
Combinação Convexa

EA978 – 2s2008 - Ting

Tipos de Dados Geométricos

Funções Analíticas

- Representações Explícitas:
  - Uma das coordenadas é explicitamente dada em função das outras.
- Representações Implícitas:
  - As coordenadas são relacionadas por uma função (de pertinência).
- Representações Paramétricas:
  - As coordenadas são dadas em termos de um conjunto de parâmetros.



$$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2=R^2$$
$$x=x_c \pm sqrt(R^2-(y-y_c)^2-(z-z_c)^2)$$

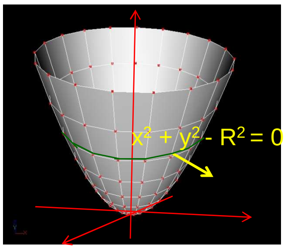
EA978 – 2s2008 - Ting

Tipos de Dados Geométricos
Vetores Normais

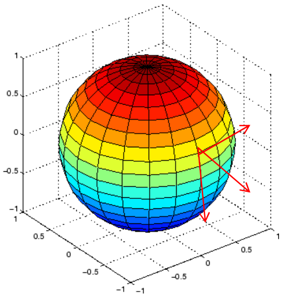
- Representações Explícitas:
  - gradiente
- Representações Implícitas:
  - gradiente

Ex: $f(x,y) = x^2 + y^2 - R^2$

$\nabla f = (2x, 2y)$



- Representações Paramétricas:
  - produto vetorial de vetores tangentes às curvas coordenadas



Ex: $r(u,v) = (R\cos u, R\,\mathrm{sen}\,u \cos v, R\,\mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}\,v)$

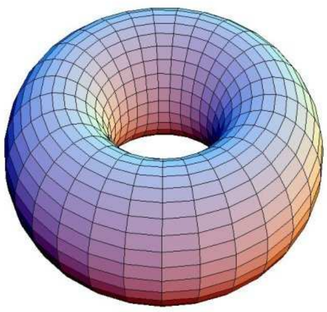
$\mathbf{n} = (\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v)/|\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v|$

EA978 – 2s2008 - Ting

Tipos de Dados Geométricos
Vetores Normais

Determine o vetor normal em (x,y,z) de um toro, conhecida a sua representação implícita:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2+y^2)$$



E a partir de sua representação paramétrica:

$$r(u,v) = ((R+r \cos v)\cos u,\ (R+r \cos v)\,\mathrm{sen}\,u,\ r\,\mathrm{sen}\,v)$$

Compare os resultados.

EA978 – 2s2008 - Ting

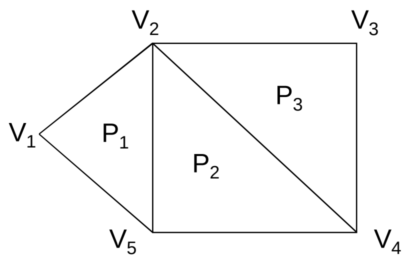
Tipos de Dados Geométricos
Aproximação

Funções Deriváveis

↓

Malhas Triangulares
ou
Poligonais

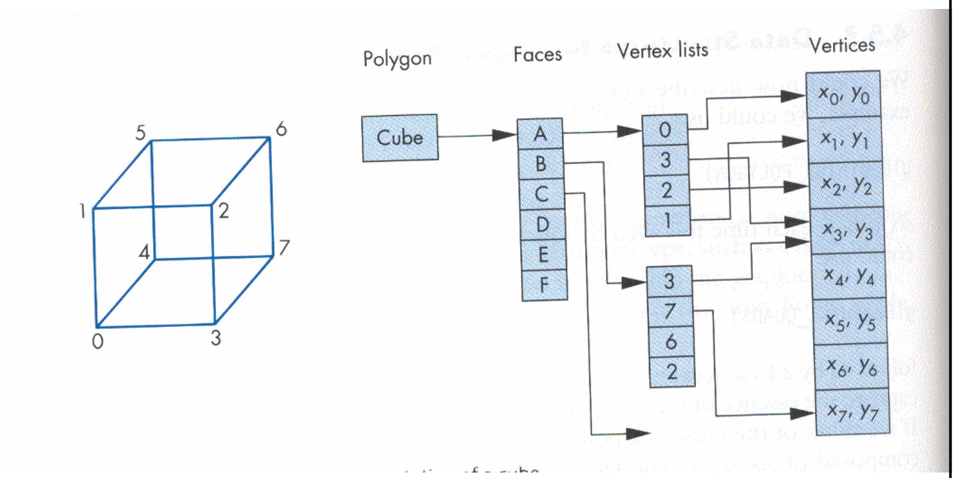
Tipos de Dados Geométricos
Representação



Arranjos de vértices

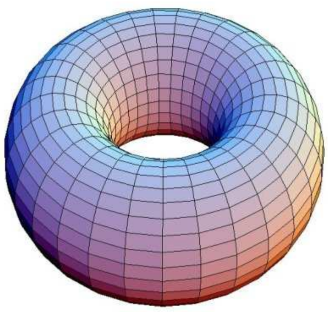
1	$x_1\ y_1\ z_1$	1 5 2
2	$x_2\ y_2\ z_2$	2 4 3
3	$x_3\ y_3\ z_3$	2 5 4
4	$x_4\ y_4\ z_4$	
5	$x_5\ y_5\ z_5$	

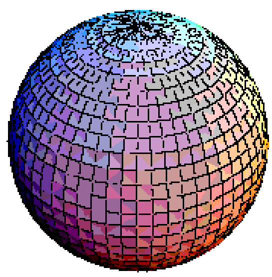
Tipos de Dados Geométricos
Representação



EA978 – 2s2008 - Ting

Tipos de Dados Geométricos
Discretização





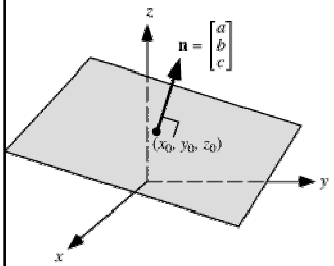
r(u,v) = (R+r cos v)cos u,
(R+r cos v) sen u, r sen v)

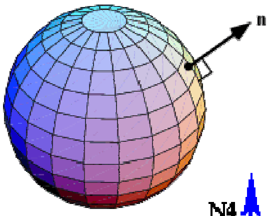
r(u,v) = (R cos v cos u,
R cos v sen u, R sen v)

Amostras: Δu e Δv

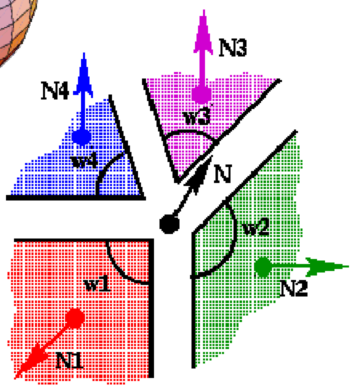
EA978 – 2s2008 - Ting

Tipos de Dados Geométricos
Vetores normais





Exato



Estimado

Tipos de Dados Geométricos
Aproximação

Dê uma aproximação para uma esfera de raio 3

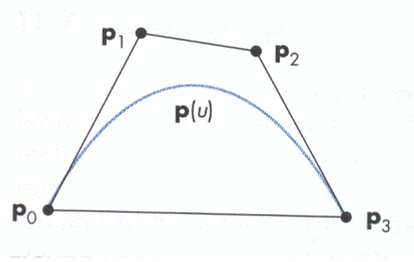
Funções Analíticas

Propriedades desejadas:

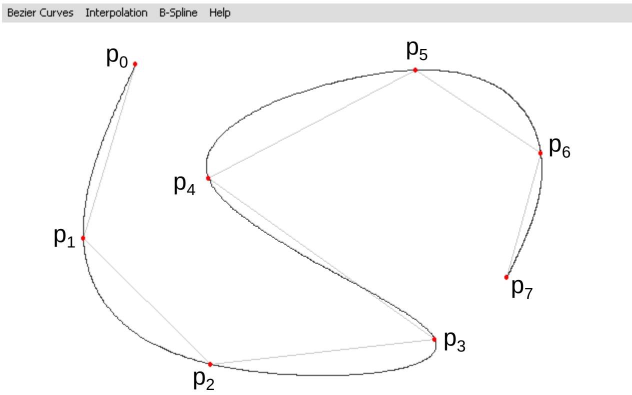
- **Simplicidade**
- **Representatividade**
- **Concisão**
- **Intuitividade**

Funções Analíticas

Representar uma forma geométrica p(υ) como combinação convexa de um conjunto finito de amostras P_i



Curvas de Bézier



$P(t) = \Sigma B_{n,i}(t)\, p_i$ onde $B_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i(1-t)^{n-i}$

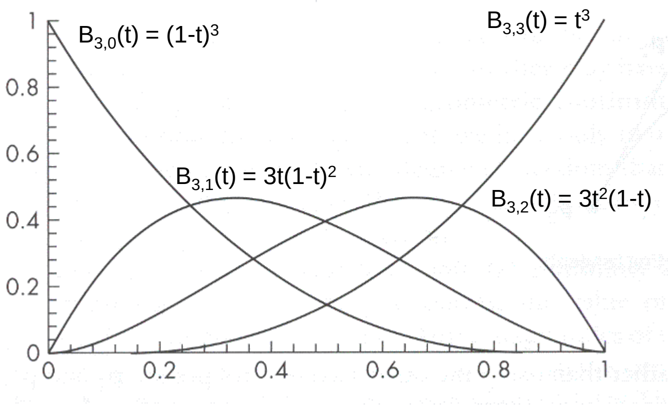
Combinação convexa de p_i

EA978 – 2s2008 - Ting

Curvas de Bézier

Função de Ponderação Bernstein Cúbica

n=3

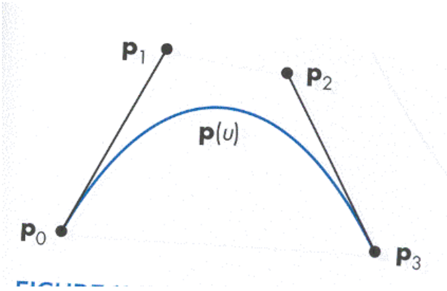


EA978 – 2s2008 - Ting

Curvas de Bézier
Algumas Propriedades

$$P(\upsilon) = \Sigma\, B_{n,i}(\upsilon)\, p_i \quad \text{onde } B_{n,i}(\upsilon) = \binom{n}{i} \upsilon^i (1-\upsilon)^{n-i}$$

- Pontos de Controle: grau + 1
- Pontos extremos coincidem com pontos extremos do polígono de controle
- Tangentes nos pontos extremos coincidem com os segmentos do polígono de controle



Curvas de Bézier
Representação Matricial

$$P(t) = B_{3,0}(t)\, P_0 + B_{3,1}(t) P_1 + B_{3,2}(t)\, P_2 + B_{3,3}(t)\ \ P_3$$

$$= (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)\, P_2 + t^3 P_3$$

$$= (1-3t+3t^2-t^3)P_0 + (3t-6t^2+3t^3)\, P_1 + (3t^2-3t^3)\, P_2 + t^3 P_3$$

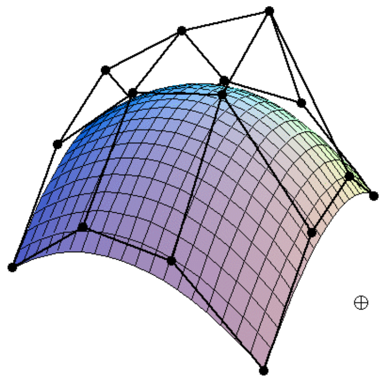
$$= \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

Curvas de Bézier

Esboce a curva de Bézier definida pelos pontos (0,0), (2,2), (4,6), (8,3).

Quais são as coordenadas do ponto P(0.5) desta curva?

Superfícies de Bézier

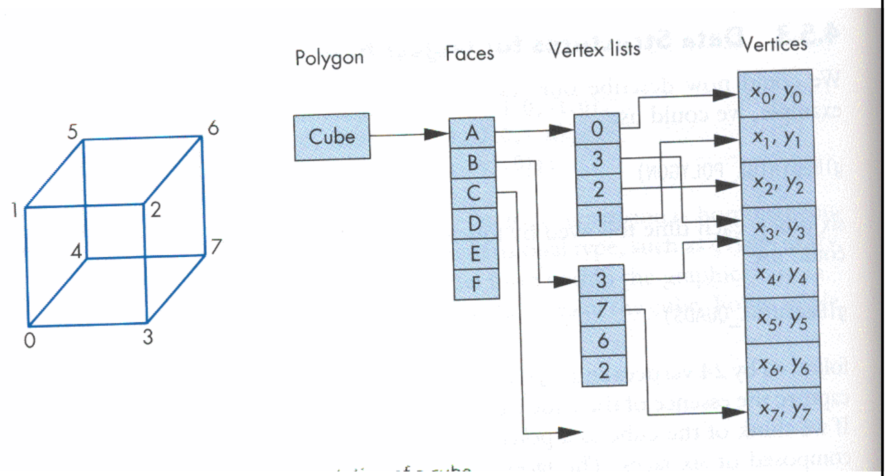


$P(u,v) = \Sigma B_{m,j}(v)\ \Sigma B_{n,i}(u)\ p_{ji}$ onde $B_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$

OpenGL

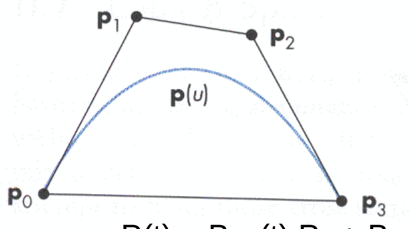
Tipos de Dados Geométricos

Representação



Vetores Normais?

Curvas de Bézier Cúbicas




```
GLfloat ctrlpoints[4][3] = {
        { -4.0, -4.0, 0.0},
        { -2.0, 4.0, 0.0},
        {2.0, -4.0, 0.0},
        {4.0, 4.0, 0.0}};
```

$$P(t) = B_{3,0}(t)\ P_0 + B_{3,1}(t)P_1 + B_{3,2}(t)\ P_2 + B_{3,3}(t)\ \ P_3$$

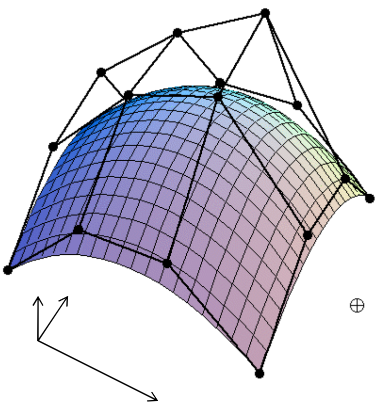
$$= (1-t)^3\ P_0 + 3t(1-t)^2\ P_1 + 3t^2(1-t)\ P_2 + \ t^3\ P_3$$

$$= (1-3t+3t^2-t^3)P_0 + (3t-6t^2+3t^3)\ P_1 + (3t^2-3t^3)\ P_2 + \ t^3\ P_3$$

$$= \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

Superfície de Bézier Bicúbicas

$$P(u,v) = \Sigma\ B_{m,j}(v)\ \Sigma\ B_{n,i}(u)\ p_{ji} \text{ onde } B_{n,i}(t) = \binom{n}{i}\ t^i\ (1-t)^{n-i}$$



```
GLfloat ctrlpoints[4][4][3] = {
  { {-1.5, -1.5, 4.0},
    {-0.5, -1.5, 2.0},
    {0.5, -1.5, -1.0},
    {1.5, -1.5, 2.0}},
  { {-1.5, -0.5, 1.0},
    {-0.5, -0.5, 3.0},
    {0.5, -0.5, 0.0},
    {1.5, -0.5, -1.0}},
  { {-1.5, 0.5, 4.0},
    {-0.5, 0.5, 0.0},
    {0.5, 0.5, 3.0},
    {1.5, 0.5, 4.0}},
  { {-1.5, 1.5, -2.0},
    {-0.5, 1.5, -2.0},
    {0.5, 1.5, 0.0},
    {1.5, 1.5, -1.0}}
};
```