

EA978 – Lista 1 – Vetores, Interpolação e Trigonometria

Data de Entrega: 11/08/2008

Vetores: são elementos básicos no processamento de informações gráficas. Um segmento \mathcal{S} em R^3 é univocamente determinado pelos seus pontos extremos P e Q . Quando se atribui uma **orientação** (direção e sentido) a este segmento, definindo um dos pontos como o ponto inicial e o outro como o ponto final, temos um **segmento orientado**. Tal segmento orientado é denominado vetor. Um vetor é, portanto, caracterizado pela sua **norma**, ou **magnitude**, e sua orientação.

Escolhendo um **sistema de referência cartesiano**, os pontos podem ser representados por uma sequência de escalares (x, y, z) que correspondem às distâncias aos 3 **eixos de referência** mutuamente perpendiculares $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ e concorrentes num ponto denominado **origem**. Sejam $P = (x_P, y_P, z_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$, as componentes (v_x, v_y, v_z) de um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ com respeito ao sistema de referência escolhido podem ser obtidas pela subtração das componentes

$$v_x = x_Q - x_P \quad v_y = y_Q - y_P \quad v_z = z_Q - z_P$$

- Dados dois pontos $P = (4, -1, 0)$ e $Q = (1, 0, 2)$.
 - Determine a magnitude e a direção do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ definido por estes dois pontos.
 - Normalize \vec{v} .
 - Qual é a distância entre os dois pontos P e Q ?
- Dados três vetores: $\vec{a} = (2, 1, 3)$, $\vec{b} = (1, 0, 4)$, $\vec{c} = (3, -1, 2)$.
 - Determine produtos escalares $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{a}$. Os resultados são iguais?
 - Determine produtos vetoriais $\vec{b} \times \vec{c}$, $\vec{c} \times \vec{b}$. Os resultados são iguais?
 - Determine o produto triplo $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. Os três vetores são linearmente independentes? Justifique.
 - Qual é o ângulo entre os vetores \vec{a} e \vec{b} .
 - Qual é a projeção ortogonal do vetor \vec{b} sobre \vec{c} .
 - Qual é o vetor normal do plano \mathcal{P} que contém os vetores \vec{a} e \vec{c} ?
 - Escreva o vetor \vec{b} como adição de dois vetores \vec{b}_N e \vec{b}_T , onde \vec{b}_T é a projeção ortogonal de \vec{b} sobre o plano \mathcal{P} e \vec{b}_N é a projeção ortogonal do vetor normal deste plano.
- Mostre que os vetores $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (0, 4, 2)$, $\vec{c} = (-10, -2, 4)$ são ortogonais. Transforme-os em **vetores ortonormais**.

Interpolação Linear: consiste em obter, por uma função **linear**, um novo conjunto de dados a partir de uma amostra discreta de dados conhecida.

- Seja um segmento \overline{PQ} com as intensidades $I_P = 230$ e $I_Q = 85$ nos seus extremos. Quais seriam as intensidades interpoladas linearmente nos pontos R que satisfazem, respectivamente, as relações $t = \frac{1}{5}$ ($\overline{PR} : \overline{RQ} = 1 : 4$), $t = \frac{1}{3}$ ($\overline{PR} : \overline{RQ} = 1 : 2$) e $t = \frac{2}{5}$ ($\overline{PR} : \overline{RQ} = 2 : 3$).
- Seja uma curva PQ com os vetores normais $\vec{n}_P = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ e $\vec{n}_Q = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ nos seus extremos. Quais seriam os vetores normais interpolados linearmente nos pontos R que satisfazem, respectivamente, as relações $t = \frac{1}{5}$ ($\overline{PR} : \overline{RQ} = 1 : 4$), $t = \frac{1}{3}$ ($\overline{PR} : \overline{RQ} = 1 : 2$) e $t = \frac{2}{5}$ ($\overline{PR} : \overline{RQ} = 2 : 3$).

Funções Trigonômicas: Dado um vetor \vec{v} , cujos pontos extremos são $P = (0, 0)$ e $Q = (4, 5)$ com respeito a um sistema de referência cartesiano bi-dimensional (R^2).

1. Qual é o cosseno do ângulo formado por \vec{v} com o eixo de referência, ou versor, $(1, 0)$?
2. Qual é o seno deste mesmo ângulo? Qual é a sua relação com o cosseno?
3. Qual é a tangente deste mesmo ângulo?
4. Qual é a cotangente deste mesmo ângulo? Qual é a sua relação com a tangente?
5. Sabendo que $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ e $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, determine $\sin \frac{7\pi}{12}$ e $\cos \frac{7\pi}{12}$, utilizando a fórmula de adição de ângulos $\sin(A + B)$ e $\cos(A + B)$.