EA978 – Lista 6 – Transformada de Fourier e Estatística

Data de Entrega: 15/09/2008

1 Transformada de Fourier

Uma função $f(x)$ pode ser representada por uma **integral Fourier**

$$f(x) = \int_0^\infty [A(u)\cos 2\pi ux + B(u)\sin 2\pi ux]du,$$

onde

$$A(u) = \int_{-\infty}^\infty f(v)\cos 2\pi v dv \qquad B(u) = \int_{-\infty}^\infty f(v)\sin 2\pi v dv,$$

se $f(x)$

1. é contínua por parte num intervalo finito,
2. tem a derivada direita e derivada esquerda em todos os pontos, e
3. é absolutamente integrável ao longo do eixo x, ou seja, existe o limite

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 |f(x)|dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b |f(x)|dx.$$

Em forma complexa,

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty F(u)e^{j2\pi ux}du, \tag{1}$$

onde

$$F(u) = \int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-j2\pi ux}dx. \tag{2}$$

Denominamos $F(u)$ a **transformada de Fourier** da função $f(x)$, $\mathcal{F}\{f(x)\}$, e dizemos que $f(x)$ é a **transformada de Fourier inversa** de $F(u)$. $f(x)$ e $F(u)$ são funções complexas, contendo dois componentes: um real $r(x)$ e $R(w)$ e um imaginário $i(x)$ e $I(w)$, respectivamente.

Uma interpretação física da Eq. 1 é $f(x)$ ser uma superposição de sinais de todas as freqüências. Portanto, ela é também conhecida como uma **representação espectral** de $f(x)$, cujo **espectro de Fourier** é

$$|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)} \tag{3}$$

e o **ângulo de fase**,

$$\phi(u) = \tan^{-1}\frac{I(u)}{R(u)}. \tag{4}$$

O espectro de freqüência é muito utilizado para análise visual de $f(x)$.

A "densidade espectral" $F(u)$ mede a intensidade de $f(x)$ no intervalo de freqüência entre u e $u+\Delta u$ e a integral

$$\int_{-\infty}^\infty |F(u)|^2 dw \tag{5}$$

pode ser interpretada como a **energia** ou **potência** do sistema $f(x)$.

Algumas propriedades da transformada de Fourier:

Linearidade: $\mathcal{F}\{af(x) + bg(x)\} = a\mathcal{F}\{f(x)\} + b\mathcal{F}\{g(x)\}$;

Derivação: $\mathcal{F}\{\frac{d^n f(x)}{dx^n}\} = (j2\pi u)^n \mathcal{F}\{f(x)\}$;

Convolução: $\mathcal{F}\{f(x) * g(x)\} = \mathcal{F}\{f(x)\}\mathcal{F}\{g(x)\}$.

Exercícios

1. Esboce a forma de onda das seguintes funções:

   - $f(x) = 0.81075\cos(x) + 0.09007\cos(3x) + 0.03243\cos(5x) + 0.01654\cos(7x) + 0.01001\cos(9x) + 0.0067\cos(11x) + 0.0048\cos(13x)$
   - $f(x) = 0.63662\sin(x) - 0.31831\sin(2x) + 0.2122\sin(3x) - 0.15915\sin(4x) + 0.12731\sin(5x) - 0.10609\sin(6x) + 0.09093\sin(7x) - 0.07956\sin(8x) + 0.07072\sin(9x)$
   - $f(x) = 1.27324\sin(x) + 0.4244\sin(3x) + 0.25463\sin(5x) + 0.18186\sin(7x) + 0.14144\sin(9x) + 0.11571\sin(11x) + 0.09789\sin(13x) + 0.08482\sin(15x) + 0.07483\sin(17x)$

2. Determine a transformada de Fourier das seguintes funções, indicando explicitamente o limite de banda do espectro de freqüência de cada uma:

   - $f(x) = k$, se $0 < x < a$, senão $f(x) = 0$.
   - $f(x) = e^{-ax^2}$, se $a > 0$.
   - $f(x) = xe^{-x^2}$ (Dica: Utilize a propriedade de derivação).

3. Esboce o gráfico da função e do seu respectivo espectro de freqüencia, indicando o domínio de valores em que eles estão definidos.

	Função $f(x)$	Transformada $F(u)$
(a)	1	$\delta(u)$
(b)	$\delta(x)$	1
(c)	$\cos(ax)$	$\frac{1}{2}[\delta(u - \frac{a}{2\pi}) + \delta(u + \frac{a}{2\pi})$
(d)	$\sin(2x)$	$\frac{1}{2}j[\delta(u + \frac{a}{2\pi}) - \delta(u - \frac{a}{2\pi})$
(e)	$rect(ax) = \begin{cases} 1, & \lvert x\rvert \leq a \\ 0, & \lvert x\rvert > a \end{cases}$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} sinc(\frac{u}{a})$
(f)	$sinc(ax) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{\sin(ax)}{ax}, & x \neq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} rect(\frac{u}{a})$
(g)	$tri(ax) = \begin{cases} 1 - \lvert x\rvert, & \lvert x\rvert \leq a \\ 0, & \lvert x\rvert > a \end{cases}$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} sinc^2(\frac{u}{a})$
(h)	$sinc^2(ax)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} tri(\frac{u}{a})$
(i)	$e^{-\alpha t^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{(\pi w)^2}{\alpha}}$
(j)	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\Delta x)$	$\frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u - \frac{k}{\Delta x})$

4. Esboce e compare os gráficos das funções: $f(x) = x^2$ e $f(x - m)$.

5. Determine a convolução de:

   - duas funções-pulso

   $$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

   Dica: Para obter a função $h(x) = f(x) * g(x)$ deve-se dividir o eixo x em 4 intervalos: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, \infty)$.

- duas funções

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} -1, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{em outros intervalos} \end{cases}$$

- uma função-impulso e uma função triangular

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ 2 - x, & x \in [1, 2] \\ 0, & \text{no restante dos intervalos} \end{cases}$$

- um trem de impulsos espaçados de $\Delta x = 0.5$ com a função triangular do item anterior.

2 Estatística

Análise Estatística tem o objetivo de coletar, organizar e extrair o máximo de informação relevante acerca de uma população com base em uma pequena amostra. Num experimento estatístico, uma sequência de **observações** é anotada. Tais observações são conhecidas como **valores de amostra** e o **tamanho** de uma amostra corresponde à quantidade total de valores coletados.

A (**absoluta**) **freqüência** de um valor de amostra x é o número de vezes que ele ocorre durante o processo de amostragem, enquanto a **freqüência relativa** é a razão entre a freqüência absoluta de x e o tamanho da amostra. A soma de todas as freqüências relativas de uma amostra é igual a 1. A **distribuição de freqüências** de uma amostra é caracterizada, portanto, pela **função freqüência relativa** $\overline{f}(x)$. A soma de freqüências relativas de todos os valores de amostra menor ou igual a x define a **função de freqüência cumulativa**

$$\overline{F}(x) = \sum_{t \leq x} \overline{f}t.$$

Se uma amostra contém um grande volume de valores de amostra distintos, é comum agrupá-los em **intervalos de classe**. O conjunto de valores de amostra pertencentes a um intervalo de classe é conhecido como uma **classe**. De forma análoga a valores de amostra, definimos freqüência absoluta, freqüência relativa e freqüencia cumulativa de classes.

A distribuição de freqüências de uma amostra pode ser graficamente representada por um **histograma**. O histograma é um gráfico composto por retângulos justapostos em que a base de cada um deles corresponde ao intervalo de classe e a sua altura à respectiva freqüência.

Alguns parâmetros estatísticos de uma amostra $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ podem revelar características relevantes de uma população:

Média : $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j$.

Variância : $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{x})^2$.

Desvio padrão : $s = \sqrt{s^2}$.

Moda : o valor de amostra que tem maior freqüência de ocorrência.

Mediana : o valor de amostra com a freqüência cumulativa igual a 0.5.

Momentos de ordem k : $m_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j^k$.

Exercícios

1. Esboce o gráfico da distribuição de densidade de probabilidade de ocorrência de "cara" ao jogar uma moeda sucessivamente por

   - 4 vezes
   - 16 vezes
   - 32 vezes
   - 128 vezes

   Estes gráficos podem ser considerados também gráficos de distribuição de freqüências? Justifique.

2. Determine os parâmetros estatísticos das seguintes amostras

99	100	102	101	98	103	100	102	99	101
100	100	99	101	100	102	99	101	98	100

43	44	45	46	44	43	41	41	44	44	43	44	42	45	43
45	42	44	44	42	45	41	44	44	43	44	46	41	43	45

3. Esboce o gráfico de função cumulativa de freqüências para as duas amostras do item anterior.