

EA978 – Lista 2 – Álgebra Linear

Data de Entrega: 13/08/2008

1 Revisão

Um **espaço vetorial** é constituído por um conjunto \mathcal{V} de **vetores**, juntamente com operações de **adição** (+) e **multiplicação** por escalar de um conjunto \mathcal{K} , que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Associatividade em adição: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ para \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} elementos de \mathcal{V} .
2. Existência de elemento neutro: há um elemento $\vec{0} \in \mathcal{V}$, tal que, para cada $\vec{v} \in \mathcal{V}$, $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$.
3. Existência de elemento inverso: para cada $\vec{v} \in \mathcal{V}$, existe $\vec{u} \in \mathcal{V}$ tal que $\vec{v} + \vec{u} = \vec{0}$.
4. Comutatividade: para cada $\vec{v}, \vec{u} \in \mathcal{V}$, $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
5. Associatividade em multiplicação por escalar: para cada $a, b \in \mathcal{K}$ e cada $\vec{v} \in \mathcal{V}$, $a.(b.\vec{v}) = (a.b).\vec{v}$.
6. Existência de elemento neutro em multiplicação por escalar: se $\vec{1}$ é a unidade de \mathcal{K} , então, para cada $\vec{v} \in \mathcal{V}$, $\vec{1}.\vec{v} = \vec{v}$.
7. Distributividade em multiplicação por escalar:
 - Para cada $a \in \mathcal{K}$ e cada $\vec{v}, \vec{u} \in \mathcal{V}$, $a.(\vec{v} + \vec{u}) = a.\vec{v} + a.\vec{u}$.
 - Para cada $a, b \in \mathcal{K}$ e cada $\vec{v} \in \mathcal{V}$, $(a + b).\vec{v} = a.\vec{v} + b.\vec{v}$.

Sejam $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \in \mathcal{V}$. Qualquer vetor \vec{v} em \mathcal{V} da forma

$$\vec{v} = a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^m \vec{x}_m,$$

onde $a^i \in \mathcal{K}$, é chamado uma **combinação linear** de $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m$. Podemos representar uma combinação linear como produto de matrizes $EA = V$, onde as colunas de E correspondem aos vetores \vec{e}_i e os vetores-coluna V e A correspondem, respectivamente, ao vetor \vec{v} em questão e o respectivo vetor coordenada.

Os vetores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \in \mathcal{V}$ são **linearmente dependentes** sobre \mathcal{K} , ou simplesmente dependentes, se existem escalares $a^1, a^2, \dots, a^m \in \mathcal{K}$, nem todos nulos, tais que

$$a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^m \vec{x}_m = \vec{0}.$$

Em caso contrário, dizemos que os vetores são **linearmente independentes** sobre \mathcal{K} , ou simplesmente independentes. Os vetores linearmente independentes formam uma matriz que é equivalente a uma **matriz escalonada**. Entende-se como matriz escalonada quando o número de zeros precedendo o primeiro elemento não-nulo de uma linha aumenta linha por linha até que sobrem somente linhas nulas.

Um conjunto mínimo de vetores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, linearmente independentes e capazes de gerar todos os vetores de \mathcal{V} através de combinações lineares, é conhecido por **gerador** de \mathcal{V} . A seqüência $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ é chamada uma **base** de \mathcal{V} e o número de elementos na seqüência corresponde à **dimensão** de \mathcal{V} . Neste caso, os n escalares a^1, a^2, \dots, a^n são completamente determinados pelo vetor \vec{v} e pela base $\{\vec{e}_i\}$. Chamamos estes escalares as **coordenadas** de \vec{v} em relação à base $\{\vec{e}_i\}$ e a seqüência (a^1, a^2, \dots, a^n) ,

vetor coordenada de \vec{v} em relação a $\{\vec{e}_i\}$. Quando a base é formada pelos vetores fixos na origem $(0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ em um extremo

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= (1, 0, 0, 0, \dots, 0, 0) \\ \vec{e}_2 &= (0, 1, 0, 0, \dots, 0, 0) \\ \vec{e}_3 &= (0, 0, 1, 0, \dots, 0, 0) \\ &\dots \\ \vec{e}_n &= (0, 0, 0, 0, \dots, 0, 1)\end{aligned}$$

dizemos que ela é uma **base canônica**. Neste caso, as coordenadas são conhecidas por **coordenadas cartesianas**.

Sejam \mathcal{V} e \mathcal{U} espaços vetoriais sobre o conjunto de escalares \mathcal{K} . Uma **função** ou **transformação** \mathcal{F} de \mathcal{V} em \mathcal{U} é uma correspondência que associa um único vetor de \mathcal{U} para cada vetor em \mathcal{V} . Ela é uma **transformação linear** se satisfaz:

1. Para qualquer $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$, $\mathcal{F}(\vec{v} + \vec{w}) = \mathcal{F}(\vec{v}) + \mathcal{F}(\vec{w})$; e
2. Para qualquer $k \in \mathcal{K}$ e qualquer $\vec{v} \in \mathcal{V}$, $\mathcal{F}(k\vec{v}) = k\mathcal{F}(\vec{v})$.

2 Exercícios

1. Quais conjuntos de vetores são linearmente independentes? Justifique.
 - $(1,1,1,1)$, $(0,1,1,1)$, $(0,0,1,1)$ e $(0,0,0,1)$
 - $(257,-132,58)$, $(43,0,-17)$, $(521,-317,94)$ e $(328,-512,-731)$
2. Encontre a dimensão do subespaço vetorial gerado por
 - $(1,-2,3,-1)$ e $(1,1,-2,3)$
 - 3 e -3
 - $(3,-6,3)$ e $(-2,4,-2)$
3. Determine se cada um dos seguintes conjuntos forma uma base de R^3
 - $(1,2,-1)$ e $(0,3,1)$
 - $(2,4,-3)$, $(0,1,1)$ e $(0,1,-1)$
 - $(1,5,-6)$, $(3,1,8)$, $(3,-1,4)$ e $(2,1,1)$
4. Para os conjuntos que formam uma base de R^3 no item anterior, transforme-os numa base canônica. (Dica: $M^{-1}.M = I$, correspondendo as colunas da matriz-identidade I aos vetores ortonormais.)
5. Dadas as duas bases:

$$\begin{aligned}\{\vec{e}_1 = (1, 1, 1) \quad \vec{e}_2 = (0, 2, 3) \quad \vec{e}_3 = (0, 2, -1)\} \\ \{\vec{f}_1 = (1, 1, 0) \quad \vec{f}_2 = (1, -1, 0) \quad \vec{f}_3 = (0, 0, 1)\}\end{aligned}$$
 - Encontre o vetor coordenada de $\vec{v} = (3, 5, -2)$ em relação a cada base.
 - Encontre a transformação linear P cujas colunas são respectivamente os vetores coordenadas dos \vec{e}_i em relação à base $\{\vec{f}_i\}$, ou seja, $FP = E$, onde as colunas de F e E são respectivamente os vetores \vec{f}_i e os vetores de $\{\vec{e}_i\}$.
6. Dada uma base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ do espaço \mathcal{V} e dados quaisquer vetores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ em \mathcal{U} . Qual é a transformação linear $\mathcal{F}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ tal que $\mathcal{F}(\vec{e}_1) = \vec{u}_1$, $\mathcal{F}(\vec{e}_2) = \vec{u}_2$, \dots , $\mathcal{F}(\vec{e}_n) = \vec{u}_n$. Esta transformação é única? Justifique.

7. Escreva as seguintes transformações em notação matricial e determine se elas são lineares ou não.

- $\mathcal{F}(x, y) = (x + y, x)$
- $\mathcal{F}(x, y, z) = (x + 1, y + 4, z + 3)$
- $\mathcal{F}(x, y) = xy$