

Capítulo 2

Modelagem Geométrica

Modelos geométricos são peças fundamentais em síntese e análise de imagens. Em termos de algoritmos de síntese (ou determinação sintética da luminância/brilância), duas informações geométricas são essenciais: posição do ponto a ser imageado (também conhecido com **vértice**) e o vetor normal de superfície associado a ele. Um dos focos de pesquisa na área de Modelagem Geométrica é prover mecanismos simples para criar, representar e manipular, de forma intuitiva, estas informações. Quando se trata de análise de imagens, os modelos geométricos podem ser utilizados como a ponte entre imagens e os algoritmos que determinam grandezas geométricas, como área e volume, dos objetos capturados nas imagens.

Há uma grande variedade de modelos geométricos para representar objetos 3D. Alguns são mais apropriados para processamentos computacionais eficientes, como as malhas poligonais; outros são matematicamente mais precisos, como representações por funções; e existem ainda aqueles que são mais intuitivos para usuários, como representação por CSG. Não há, portanto, o melhor modelo. A escolha de um modelo depende dos requisitos da aplicação e da tecnologia disponível.

Nesta disciplina apresentamos uma representação que é vastamente difundida pela sua simplicidade.

2.1 Representação Poligonal

A representação poligonal consiste em descrever um objeto por uma malha de **facetas poligonais**, cada qual é representada por uma sequência fechada e **orientada** de arestas. As **arestas**, por sua vez, podem ser exatamente definidas pelos seus extremos que são conhecidos por **vértices**, cujas posições

são representáveis por uma sequência de coordenadas. As informações sobre a localização de cada vértice são denominadas **geométricas** e as informações sobre a conectividade entre eles são usualmente conhecidas por **topológicas**.

As facetas poligonais mais utilizadas são as quadrilaterias e triangulares, tendo estas últimas a vantagem de possuírem a propriedade de planaridade.

2.1.1 Representação de Vértices

A Geometria Analítica nos provê um importante recurso para processar computacionalmente os objetos geométricos de interesse: a representação de um ponto no espaço de n dimensões por uma lista de n valores denominados **coordenadas**. A forma mais usual é associar estes valores às distâncias do ponto em relação a um conjunto de planos definido pelos n eixos ortogonais entre si. Tal sistema de eixos é conhecido como **sistema de coordenadas retangulares** ou **cartesianas**.

No espaço 3D, o sistema de referência cartesiano é constituído por 3 eixos que são designados, respectivamente, por x , y e z e as coordenadas x , y e z correspondem, respectivamente, às distâncias aos planos yz , xz e xy . Com estes três eixos pode-se definir ainda duas orientações:

- orientação mão-direita: ao rodarmos os dedos da mão-direita partindo-se do eixo x para o eixo y , o polegar aponta para a direção positiva do eixo z .
- orientação mão-esquerda: ao rodarmos os dedos da mão-esquerda partindo-se do eixo x para o eixo y , o polegar aponta para a direção positiva do eixo z .

A **distância** entre dois pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ dados no sistema cartesiano pode ser obtida pela expressão:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (2.1)$$

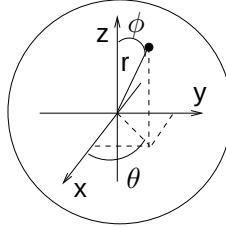
Para problemas que envolvem direções variadas em relação a uma origem O fixa (**pólo**), é conveniente especificar a posição de um ponto P em $\mathbb{R}^3$ com uso de **coordenadas polares** (r, θ, ϕ) , onde r é a distância entre os pontos O e P , e θ e ϕ , os ângulos entre a direção $\overrightarrow{OP}$ e dois eixos (de referência) que passam por O .

Considerando que os eixos de referência sejam, respectivamente, x e z . A conversão das coordenadas polares para as cartesianas é dada por seguintes expressões:

$$x = r \cos\theta \sin\phi \quad y = r \sin\theta \sin\phi \quad z = r \cos\phi \quad (2.2)$$

E das cartesianas para as polares,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \phi = \arccos \frac{z}{r} \quad \theta = \arctg \frac{y}{x} \quad (2.3)$$



Em processamento computacional os pontos são usualmente representados por vetores-linha ou vetores-coluna:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Uma terceira alternativa para representar um vértice P no espaço $\mathbb{R}^3$ é fixar uma origem O e uma base de 3 vetores linearmente independentes, $\vec{a}_{(1)}$, $\vec{a}_{(2)}$ e $\vec{a}_{(3)}$, e considerá-lo como um vetor-posição resultante da combinação linear dos três vetores-base

$$\overrightarrow{OP} = \alpha_1 \vec{a}_{(1)} + \alpha_2 \vec{a}_{(2)} + \alpha_3 \vec{a}_{(3)}.$$

Os valores $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ são denominados as **coordenadas afins**.

Observação 2.1 Se a base escolhida for a base canônica, as coordenadas afins coincidem com as coordenadas cartesianas.

Exemplo 2.1 Os vértices de um cubo de lado igual a 2 unidades, centrado na origem, tem as seguintes coordenadas:

Índice de vértice	Coordenadas
0	(-1.0, -1.0, -1.0)
1	(1.0, -1.0, -1.0)
2	(1.0, 1.0, -1.0)
3	(-1.0, 1.0, -1.0)
4	(-1.0, -1.0, 1.0)
5	(1.0, -1.0, 1.0)
6	(1.0, 1.0, 1.0)
7	(-1.0, 1.0, 1.0)

2.1.2 Representação Topológica

Além das coordenadas dos vértices que definem precisamente suas localizações no espaço, devemos ainda especificar como eles devem ser sequenciados para caracterizar cada face poligonal. A estrutura mais simples é descrever cada faceta poligonal como uma lista de vértices.

(Ver Fig. 11.3 do livro-texto de Foley.)

Exemplo 2.2 *As faces do cubo do Exemplo 2.1 podem ser representados como lista dos índices de vértices*

Índice de face	Lista de índice de vértices
0	0, 3, 2, 1
1	2, 3, 7, 6
2	0, 4, 7, 3
3	1, 2, 6, 5
4	4, 5, 6, 7
5	0, 1, 5, 4

Em algumas aplicações é conveniente manter a estrutura hierárquica do objeto, explicitando as superfícies componentes de cada objeto e as facetas poligonais que representam cada superfície.

Exemplo 2.3 *Consideremos que o cubo do Exemplo 2.2 seja constituído de 3 superfícies: duas tampas e um corpo. Podemos representar cada uma destas superfícies como um conjunto de facetas poligonais:*

Índice de Superfície	Lista de índice de faces
0	2
1	3
2	0, 1, 4, 5

e o cubo como um conjunto de superfícies, isto é, $\{0, 1, 2\}$.

A codificação da superfície aproximada por duas listas não explicita a relação das arestas, o que dificulta a visualização destes elementos geométricos. Se quisermos visualizá-las, teremos que “desenhá-las” duas vezes, percorrendo todas as faces. Outras relações foram explicitadas nas estruturas, como vértice–aresta, aresta–aresta, vértice–face e aresta–face.

(Ver Fig. 11.4 do livro-texto de Foley.)

Uma estrutura mais complexa, porém permite rápido acesso aos elementos adjacentes de qualquer elemento, é a **estrutura de aresta alada** (*winged-edge*). Comparada com as estruturas mencionadas anteriormente, é a mais apropriada para representar objetos passíveis às alterações

topológicas, como remoção de vértices ou inserção de novas arestas. Cada aresta nesta estrutura contém apontadores para as facetas poligonais às quais ela é adjacente, apontadores para os seus dois vértices, e apontadores para as arestas sucessoras em relação a cada face da qual ela é adjacente.

Observação 2.2 *O correto sequenciamento das arestas é fundamental para assegurar o correto processamento da malha poligonal em termos de visibilidade.*

2.1.3 Vetores Normais

Vetores normais n constituem uma das essenciais informações geométricas. Os vetores normais de cada faceta poligonal planar podem ser obtidos a partir dos vértices $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ tomados sequencialmente (supondo que o sequenciamento seja correto)

$$\vec{n} = \vec{v}_1\vec{v}_2 \times \vec{v}_2\vec{v}_3.$$

Se o poliedro for uma aproximação de uma superfície suave, é comum determinar o vetor normal no vértice P como a média dos vetores normais de todas as faces adjacentes a P .

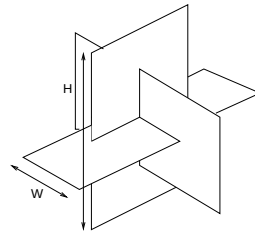
Quando somente a direção do vetor normal é de interesse, recomenda-se normalizá-lo, ou seja,

$$\vec{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

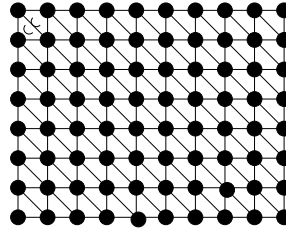
2.2 Construção de Malhas Poligonais

Construir malhas poligonais pode ser uma tarefa tediosa, requerendo criatividade e experiências. Existe uma variedade de técnicas que auxiliam esta tarefa. Cinco técnicas comumente utilizadas são:

1. manualmente, como modelamos o cubo na Seção 2.1 ou aplicando alguma técnica de construção conhecida como o icosaedro, cujos vértices são os vértices de três retângulos perpendiculares entre si. As dimensões W e H destes retângulos devem guardar a razão $\frac{W}{H} \approx 1.618034$.



2. uso de repositório de dados de malhas poligonais, como <http://netlib.bell-labs.com/netlib/polyhedra/>.
3. uso de imagens de profundidade, através da triangulação de amostras na grade regularmente espaçada no plano xy . Um repositório de imagens de profundidade: <http://graphics.stanford.edu/data/3Dscanrep/>.



4. uso de funções matemáticas.
5. refinamento de malhas simples.

2.2.1 Uso de Funções Matemáticas

Distinguem-se três formas para descrever algebricamente os objetos geométricos :

paramétricas : as coordenadas dos pontos são funções de parâmetros.

implícitas : a relação entre as n coordenadas dos pontos do objeto é expressa por uma função de n variáveis. Tal função estabelece, de fato, o **lugar geométrico** dos pontos do objeto.

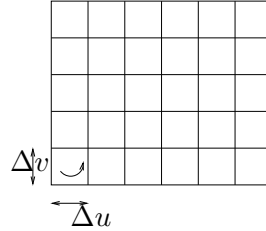
explícitas : uma coordenada é dada explicitamente em função de todas as outras.

Exemplo 2.4 *A representação do lugar geométrico dos pontos de uma esfera de raio r na forma*

- *paramétrica:* $x = r \cos \theta \sin \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$ e $z = r \cos \phi$.
- *implícita:* $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.
- *explícita:* $z = \pm \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$.

As duas formas mais utilizadas são as paramétricas e as implícitas. A aproximação de superfícies representadas implicitamente é ainda um problema parcialmente resolvido, enquanto a aproximação de superfícies paramétricas

$r(u, v)$ é relativamente simples. A forma mais trivial é dividir o domínio uv em facetas de tamanho $\Delta u \times \Delta v$ e formar facetas poligonais com a sequência de vértices $r(i\Delta u, j\Delta v)$, $r((i+1)\Delta u, j\Delta v)$, $r((i+1)\Delta u, (j+1)\Delta v)$ e $r(i\Delta u, (j+1)\Delta v)$.



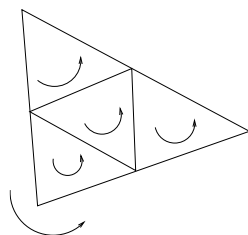
Representação paramétrica de algumas superfícies conhecidas:

- Esfera: $(r\cos\theta, r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi)$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$,
- Elipsóide: $(a\cos\theta, b\sin\theta\cos\phi, b\sin\theta\sin\phi)$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$,
- Toro: $(h + a\cos\theta, (k + b\sin\theta)\cos\phi, (k + b\sin\theta)\sin\phi)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$,
- Parabolóide: $(au^2, 2a\cos\phi, 2a\sin\phi)$, $0 \leq u \leq u_{max}$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, e
- Cilindro: $(r\cos\theta, r\sin\theta, u)$, $0 \leq u \leq u_{max}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

2.2.2 Refinamento de Malhas Simples

Existem várias propostas de subdivisão sucessiva de uma malha simples, das quais podemos citar o algoritmo de Catmull-Clark, o algoritmo de Doo-Sabin e o algoritmo de Fournier apropriado para geração de terreno baseado em fractal. Nesta seção, objetivando ilustrar o princípio da técnica, apresentamos um procedimento simples de refinamento de um tetraedro até chegar a uma boa aproximação de esfera.

1. construir um tetraedro utilizando 4 vértices de um cubo inscrito numa esfera de raio $R = 1$ e centrada na origem O ,
2. subdividir cada aresta no seu ponto médio P e deslocá-lo na direção $\overrightarrow{OP}$ de forma que $|OP| = 1$ (basta normalizar $\overrightarrow{OP}$),
3. conectar os pontos médios conforme o esquema abaixo.



4. voltar para o passo 2 enquanto não atingir a aproximação almejada.