Capítulo 3

Transformações Geométricas

Entende-se como **transformação** uma aplicação f que faz corresponder um ponto P do domínio $\mathcal{R}^n$ a um ponto do contra-domínio $\mathcal{S}^n$:

$$f : P \in \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{S}^n \tag{3.1}$$

Em sistemas de informações gráficas, as transformações são muito utilizadas para mudar sistemas de referência ($\mathcal{R}^n \neq \mathcal{S}^n$) ou mudar a posição dos pontos num mesmo sistema de referência ($\mathcal{R}^n = \mathcal{S}^n$). A primeira classe de transformações pode ser utilizada para formar uma cena com, por exemplo, um grupo de objetos, em que cada um é descrito em relação a um sistema de coordenadas próprio, enquanto a segunda é apropriada para manipular a posição relativa entre os objetos para compor um objeto mais complexo.

Serão apresentadas as cinco transformações básicas – translação (*translation*), rotação (*rotation*), mudança de escala (*scaling*), espelhamento (*reflection*) e deslocamento relativo linear (*shearing*). Veremos que, exceto as translações, estas transformações são lineares. As transformações lineares mais translação constituem o conjunto de **transformações afins**. Para operar estas transformações como matrizes, como veremos na seção 3.2, é conveniente introduzir as coordenadas homogêneas. Na seção 3.3 faremos uma breve apresentação destas coordenadas. Finalmente, na seção 3.4 responderemos uma pergunta de grande valor prático: para aplicar uma transformação sobre uma malha poligonal, é suficiente aplicá-la somente nos seus vértices?

3.1 Transformações Geométricas Básicas

Embora o foco seja em transformações geométricas bi- e tridimensionais, apresentaremos, quando possível, formulações gerais para pontos de n-dimensões.

3.1.1 Translação

A **translação** de um ponto num espaço é o **deslocamento** $\vec{d} = [d_1\ d_2\ \cdots\ d_n]^t$ deste ponto de $P_v = [x_{1,v}\ x_{2,v}\ \cdots\ x_{n,v}]^t$ para $P_r = [x_{1,r}\ x_{2,r}\ \cdots\ x_{n,r}]^t$. Este deslocamento corresponde à adição de uma parcela d_i a cada coordenada $x_{i,v}$

$$\begin{aligned} x_{1,r} &= x_{1,v} + d_1 \\ x_{2,r} &= x_{2,v} + d_2 \\ x_{3,r} &= x_{3,v} + d_3 \\ &\cdots \\ x_{n,r} &= x_{n,v} + d_n \end{aligned} \tag{3.2}$$

Usando notação matricial tem-se

$$\begin{bmatrix} x_{1,r} \\ x_{2,r} \\ \cdots \\ x_{n,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,v} \\ x_{2,v} \\ \cdots \\ x_{n,v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdots \\ d_n \end{bmatrix}.$$

(Ver Fig. 5.1 do livro-texto de Foley.)

3.1.2 Mudança de Escala

A **mudança de escala** de um objeto implica essencialmente em mudança do seu tamanho. Em termos de vetores, isso equivale a dizer mudar a magnitude dos pares de vetores definidos pelos pontos do objeto. Dados dois pontos a e b em $\Re^3$ de um objeto. Um vetor associado a eles é

$$\vec{ab} = a - b$$

cuja magnitude é

$$|\vec{ab}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

Mudar a escala do vetor por um fator γ corresponde a multiplicar $|\vec{ab}|$ por γ, isto é,

$$\gamma|\vec{ab}| = \gamma\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

Se $a = [0\ 0\ 0]^t$, teremos

$$\gamma|\vec{ab}| = \gamma\sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2} = \sqrt{(\gamma b_1)^2 + (\gamma b_2)^2 + (\gamma b_3^2}.$$

(Ver Fig. 5.2 do livro-texto de Foley.)

Em outras palavras, obteremos o efeito de mudança de escala através da multiplicação de cada coordenada x_i por um fator γ. Quando o fator de escala é igual em todas as direções principais, dizemos que a mudança é **uniforme**.

Generalizando, podemos substituir o escalar γ pelo vetor $[\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \cdots\ \gamma_n]^t$ para produzir efeitos de mudança de escala diferenciada nas n direções canônicas em $\Re^n$, ou seja, **mudança de escala não-uniforme**

$$\begin{aligned} x_{1,r} &= \gamma_1 x_{1,v} \\ x_{2,r} &= \gamma_2 x_{2,v} \\ x_{3,r} &= \gamma_3 x_{3,v} \\ & \ldots \\ x_{n,r} &= \gamma_n x_{n,v} \end{aligned}$$

Em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} x_{1,r} \\ x_{2,r} \\ \cdots \\ x_{n,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,v} \\ x_{2,v} \\ \cdots \\ x_{n,v} \end{bmatrix}.$$

(Ver Fig. 5.6 do livro-texto de Foley.)

Observação 3.1 *Da forma como a transformação é definida, é conveniente fixar um ponto do objeto de interesse na origem.*

3.1.3 Deslocamento Relativo Linear

Esta transformação, conhecida em inglês como *shearing* ou em português como **cisalhamento**, se caracteriza pela variação em linear de uma coordenada em relação aos valores das outras, ou seja a nova coordenada transformada $x_{i,r}$ em $\Re^n$ pode ser expressa como:

$$x_{i,r} = x_{i,v} + \textstyle\sum_{j=1,j\neq i}^{n}(sh_{ij}x_{j,v}).$$

Usando notação matricial isso equivale a:

$$\begin{bmatrix} x_{1,r} \\ x_{2,r} \\ \cdots \\ x_{n,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & sh_{12} & \cdots & sh_{1n} \\ sh_{21} & 1 & \cdots & sh_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ sh_{n1} & sh_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,v} \\ x_{2,v} \\ \cdots \\ x_{n,v} \end{bmatrix}.$$

(Ver Fig. 5.7 do livro-texto de Foley.)

3.1.4 Rotação

Rotações são transformações em que os pontos giram de um ângulo θ em torno de um dado ponto $\mathcal{O}$. Por convenção, atribuímos valores positivos a θ quando o sentido de giro for anti-horário (de eixo x para y) e negativos quando for horário.

(Ver Fig. 5.3 do livro-texto de Foley.)

Se considerarmos que $\mathcal{O}$ seja a origem de um sistema de coordenadas de 2 dimensões, r, a distância entre $\mathcal{O}$ e o ponto (x, y) a ser girado e que ϕ seja o ângulo entre a direção de (x, y) e o eixo x, então:

$$x = rcos\phi$$
$$y = rsen\phi.$$

Após a rotação de um ângulo θ, o ângulo entre a direção do "novo" ponto (x_r, y_r) e o eixo x passará para $\theta + \phi$. Assim

$$\begin{aligned} x_r &= rcos(\theta + \phi) \\ &= rcos\phi cos\theta - rsen\phi sen\theta \\ &= x_v cos\theta - y_v sen\theta \\ y_r &= rsen(\theta + \phi) \\ &= rsen\phi cos\theta + rcos\phi sen\theta \\ &= y_v cos\theta + x_v sen\theta. \end{aligned}$$

Em forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} x_r \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \end{bmatrix}.$$

(Ver Fig. 5.4 do livro-texto de Foley.)

Esta transformação equivale a girar um ponto em torno de um eixo z em $\Re^3$:

$$\begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{bmatrix}.$$

Analogamente, pode-se derivar a matriz de rotação em torno do eixo x (segundo a regra da mão-direita em relação ao eixo de rotação):

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & sen\theta \\ 0 & -sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

e em torno do eixo y,

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sen\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix}.$$

Observação 3.2 *As matrizes de rotação são ortogonais, ou seja, a magnitude dos vetores é preservada nas transformações de rotação.*

Observação 3.3 *Em analogia à Aviação, os ângulos de rotação em torno dos eixos x, y e z são também conhecidos, respectivamente, por* **ângulo de guinada** *(yaw),* **ângulo de declividade** *(pitch) e* **ângulo de rotação longitudinal** *(roll).*

3.1.5 Espelhamento

O **espelhamento** é uma rotação bem particular, em que um ponto "sai"do espaço, em que ele está contido, dá um giro de 180^o no espaço de uma dimensão maior e volta em "posição espelhada"ao espaço original.

Num espaço de 2 dimensões define-se o espelhamento em relação a uma reta, enquanto num espaço de 3 dimensões fala-se em espelhamento em relação a um plano.

Exemplo 3.1 *A matriz de espelhamento em relação ao plano xy é:*

$$M_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

em relação ao plano yz:

$$M_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e em relação ao plano xz:

$$M_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2 Notação Matricial Única

Usando a notação matricial, translação, mudança de escala, deslocamento relativo, rotação e o espelhamento são dadas, respectivamente, por:

$$P_r = P_v + T \quad , \tag{3.3}$$

$$P_r = SP_v \quad , \tag{3.4}$$

$$P_r = ShP_v \quad . \tag{3.5}$$

$$P_r = RP_v \quad , \tag{3.6}$$

$$P_r = MP_v \quad . \tag{3.7}$$

O fato da translação ser tratada de forma diferenciada (adição) em relação às outras (que são lineares) dificulta um pouco a composicão das transformações. O matemático August Ferdinand Möbius contornou este problema com a inclusão de uma quarta coordenada e a extensão da matriz de transformação por mais uma coluna e uma linha, permitindo que as **transformações afins**

$$\begin{aligned} x_r &= a_{0,0}x_v + a_{0,1}y_v + a_{0,2}z_v + a_{0,3} \\ y_r &= a_{1,0}x_v + a_{1,1}y_v + a_{1,2}z_v + a_{1,3} \\ z_r &= a_{2,0}x_v + a_{2,1}y_v + a_{2,2}z_v + a_{2,3} \end{aligned} \tag{3.8}$$

sobre os pontos sejam computáveis pela Álgebra de matrizes. As diferentes 4-uplas (x, y, z, w) que representem um ponto $(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w})$ em $\Re^3$, na forma de coordenadas cartesianas, são denominadas **coordenadas homogêneas**.

Observação 3.4 *Uma transformação* **afim** *preserva o paralelismo.*

Exemplo 3.2 *A translação de um ponto num espaço bidimensional pode ser expressa como o produto:*

$$\begin{bmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

e num espaço tridimensional,

$$\begin{bmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ z + d_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz estendida $M_{m+1,m+1}$ (em relação à matriz $m \times m$)

$$\begin{bmatrix} U_{m,m} & \vdots & U_{m,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{1,m} & \vdots & U_{1,1} \end{bmatrix}, \tag{3.9}$$

onde o bloco $U_{m,m}$ engloba as transformações lineares (espelhamento, mudança de escala, rotação e deslocamento relativo linear) e o bloco $U_{m,1}$ os deslocamentos, permite que a translação seja modelada como uma transformação linear. Assim, a composição destas transformações básicas pode ser reduzida em multiplicações (**concatenação**) das matrizes correspondentes.

Observe ainda que a ação do bloco $U_{1,1}$ é equivalente à **mudança de escala uniforme** (Seção 3.1.2)

$$\begin{bmatrix} x_{1,r} \\ x_{2,r} \\ \cdots \\ x_{m,r} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,v} \\ x_{2,v} \\ \cdots \\ x_{m,v} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,v} \\ x_{2,v} \\ \cdots \\ x_{m,v} \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s}x_{1,v} \\ \frac{1}{s}x_{2,v} \\ \cdots \\ \frac{1}{s}x_{m,v} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.3 Coordenadas Homogêneas

As coordenadas homogéneas de um ponto no espaço projetivo de dimensão n são representadas por um vetor de $n+1$-uplas. Elas permitem uniformizar a representação dos pontos localizados no “finito” e no “infinito”. Como já mencionamos, todos os pontos (wx, wy, wz, w) de um espaço projetivo de dimensão 4 representam o ponto $(\frac{wx}{w}, \frac{wy}{w}, \frac{wz}{w})$ no espaço Euclidiano $\Re^3$. Mantendo (x, y, z), quando w tende para 0, o ponto correspondente no espaço real tem as suas coordenadas crescendo para valores muito grandes, como ilustra a seguinte sequência:

w	x	y	z	$\frac{x}{w}$	$\frac{y}{w}$	$\frac{z}{w}$
100	1	2	3	0.01	0.02	0.03
10	1	2	3	0.1	0.2	0.3
1	1	2	3	1	2	3
1/10	1	2	3	10	20	30
1/100	1	2	3	100	200	300
1/1000	1	2	3	1000	2000	3000

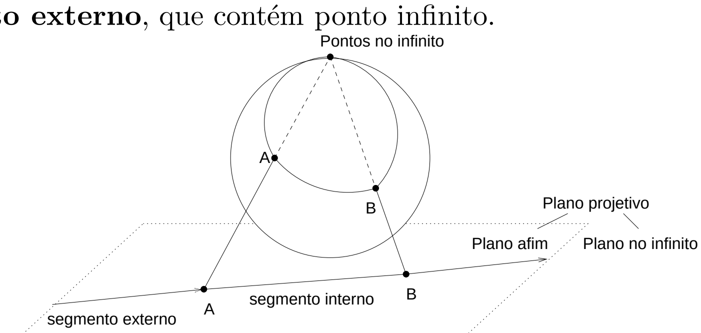
No limite de $h \to 0$, o ponto no infinito na direção (x, y, z) é dado por $(x, y, z, 0)$ em coordenadas homogêneas. O conjunto de todos os pontos com

$w = 0$, em coordenadas homogêneas, define o **plano no infinito**, para os quais não existem pontos correspondentes no espaço (real) Euclidiano. Eles são, muitas vezes, utilizados para designar os vetores no espaço (real) Euclidiano.

Quando $w < 0$, os pontos correspondentes no espaço real terão sinais invertidos, como se tivessem "saido do lado positivo e entrado pelo lado negativo, atravessando o infinito":

w	x	y	z	$\frac{x}{w}$	$\frac{y}{w}$	$\frac{z}{w}$
-1/1000	1	2	3	-1000	-2000	-3000
-1/100	1	2	3	-100	-200	-300
-1/10	1	2	3	-10	-20	-30
-1	1	2	3	-1	-2	-3
-10	1	2	3	-0.1	-0.2	-0.3
-100	1	2	3	-0.01	-0.02	-0.03

Assim, diferentemente do espaço euclidiano no qual entre dois pontos existe somente um único segmento, no espaço projetivo existem dois segmentos: um **segmento interno**, cujos pontos são pontos finitos, e um **segmento externo**, que contém ponto infinito.



3.4 Invariância sob Transformações

Dada uma malha poligonal constituída pelos vértices interligados pelos segmentos num sistema de referência com a origem em O. Se descrevermos os pontos $\overrightarrow{OP}$ do segmento definido pelos dois vértices, $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$, como uma **combinação convexa** destes pontos

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OP_1} + t\overrightarrow{OP_2} \quad , t \in [0,1] \tag{3.10}$$

e aplicarmos uma transformação linear L, isto é mudança de escala, cisalhamento, rotação, espelhamento ou concatenação destas, sobre cada ponto

$\overrightarrow{OP}$ do segmento equivale a aplicarmos a transformação nas coordenadas cartesianas de P_1 e P_2 e combiná-los com a mesma função convexa, pois

$$
\begin{aligned}
L\overrightarrow{OP} &= L[(1-t)\overrightarrow{OP_1} + t\overrightarrow{OP_1}] \\
L(P-0) &= L[(1-t)(P_1-O) + t(P_2-O)] \\
LP - L0 &= L[(1-t)P_1 + tP_2] - L[(1-t)O + tO] \\
LP &= L[(1-t)P_1 + tP_2] \\
LP &= (1-t)(LP_1) + t(LP_2).
\end{aligned}
$$

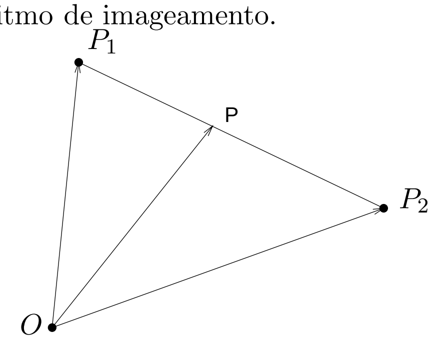
Dizemos, então, que a função convexa que utilizamos é **invariante sob transformações lineares**.

Para translações, se adicionarmos o montante T a cada vértice, os pontos do segmento resultante serão também deslocados deste montante, como mostra na seguinte derivação

$$
\begin{aligned}
[(1-t)(\overrightarrow{OP_1}+T) + t(\overrightarrow{OP_1}+T)] &= [(1-t)(P_1-O+T) + t(P_2-O+T)] \\
&= [(1-t)P_1 + tP_2] + ((1-t)T + tT) - [(1-t)O + tO] \\
&= (P+T) - O.
\end{aligned}
$$

Portanto, a representação 3.10 é também **invariante sob translações**.

Concluindo, se utilizarmos a Eq. 3.10 para representar os segmentos da malha poligonal, podemos reduzir o processamento de transformações de um modelo complexo no processamento dos seus vértices, o que pode aumentar a eficiência do algoritmo de imageamento.



Observação 3.5 *Uma combinação convexa é uma combinação linear em que os coeficientes assumem valores não negativos e a somatória destes coeficientes é igual a 1.*