EA978 – Lista 1 – Vetores, Interpolação e Trigonometia

Data de Entrega: 10/03/2009

Vetores: são elementos básicos no processamento de informação gráfica. Um segmento $\mathcal{S}$ em R^3 é univocamente determinado pelos seus pontos extremos P e Q. Quando se atribui uma **orientação** (direção e sentido) a este segmento, definindo um dos pontos como o ponto inicial e o outro como o ponto final, temos um **segmento orientado**. Tal segmento orientado é denominado vetor. Um vetor é, portanto, caracterizado pela sua **norma**, ou **magnitude**, e sua orientação.

Escolhendo um **sistema de referência cartesiano**, os pontos podem ser representados por uma sequência de escalares (x, y, z) que correspondem às distâncias aos 3 **eixos de referência** mutuamente perpendiculares $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ e concorrentes num ponto denominado **origem**. Sejam $P = (x_P, y_P, z_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$, as componentes (v_x, v_y, v_z) de um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ com respeito ao sistema de referência escolhido podem ser obtidas pela subtração das componentes

$$v_x = x_Q - x_P \qquad v_y = y_Q - y_P \qquad v_z = z_Q - z_P$$

1. Dados dois pontos $P = (8, -4, 1)$ e $Q = (1, 3, 2)$.
   (a) Determine a magnitude e a direção do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ definido por estes dois pontos.
   (b) Normalize $\vec{v}$.
   (c) Qual é a distância entre os dois pontos P e Q?
2. Dados três vetores: $\vec{a} = (5, 1, 4)$, $\vec{b} = (3, 3, 3)$, $\vec{c} = (-2, -1, 7)$.
   (a) Determine produtos escalares $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{a}$. Os resultados são iguais?
   (b) Determine produtos vetoriais $\vec{b} \times \vec{c}$, $\vec{c} \times \vec{b}$. Os resultados são iguais?
   (c) Determine o produto triplo $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. Os três vetores são linearmente independentes? Justifique.
   (d) Qual é o ângulo entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.
   (e) Qual é a projeção ortogonal do vetor $\vec{b}$ sobre $\vec{c}$.
   (f) Qual é o vetor normal do plano $\mathcal{P}$ que contém os vetores $\vec{a}$ e $\vec{c}$?
   (g) Escreva o vetor $\vec{b}$ como adição de dois vetores $\vec{b}_N$ e $\vec{b}_T$, onde $\vec{b}_T$ é a projeção ortogonal de $\vec{b}$ sobre o plano $\mathcal{P}$ e $\vec{b}_N$ é a projeção ortogonal sobre o vetor normal deste plano.
3. Mostre que os vetores $\vec{a} = (2, -2, 4)$, $\vec{b} = (0, 4, 2)$, $\vec{c} = (-5, -1, 2)$ são ortogonais. Transforme-os em **vetores ortonormais**.

Interpolação Linear: consiste em obter, por uma função **linear**, um novo conjunto de dados a partir de uma amostra discreta de dados conhecida.

1. Seja um segmento $\overline{PQ}$ com as intensidades $I_P = 70$ e $I_Q = 125$ nos seus extremos. Quais seriam as intensidades interpoladas linearmente nos pontos R que satisfazem, respectivamente, as relações $t = \frac{2}{3}$ $(\overline{PR} : \overline{RQ} = 2 : 1)$, $t = \frac{1}{4}$ $(\overline{PR} : \overline{RQ} = 1 : 3)$ e $t = 0$ $(\overline{PR} : \overline{RQ} = 0 : 1)$.
2. Seja uma curva PQ com os vetores normais $\vec{n}_P = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ e $\vec{n}_Q = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ nos seus extremos. Quais seriam os vetores normais interpolados linearmente nos pontos R que satisfazem, respectivamente, as relações $t = \frac{2}{5}$ $(\overline{PR} : \overline{RQ} = 2 : 3)$, $t = \frac{3}{7}$ $(\overline{PR} : \overline{RQ} = 3 : 4)$ e $t = \frac{1}{3}$ $(\overline{PR} : \overline{RQ} = 1 : 2)$.

Funções Trigonométricas: Dado um vetor $\vec{v}$, cujos pontos extremos são $P = (0, 0, 0)$ e $Q = (5, 4, 1)$ com respeito a um sistema de referência cartesiano bi-dimensional (R^2).

1. Qual é o cosseno do ângulo formado por $\vec{v}$ com o eixo de referência, ou versor, $(1, 0, 0)$?
2. Qual é o seno deste mesmo ângulo? Qual é a sua relação com o cosseno?
3. Qual é a tangente deste mesmo ângulo?
4. Qual é o ângulo entre este vetor e o plano cujo vetor normal é $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$?
5. Sabendo que $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ e $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, determine $\sin\frac{7\pi}{12}$ e $\cos\frac{7\pi}{12}$, utilizando a fórmula de adição de ângulos $\sin(A + B)$ e $\cos(A + B)$.