EA978 – Lista 11 – Gradiente, Laplaciano e Métodos Numéricos

Data de Entrega: 21/05/2009

1 Gradiente e Laplaciano

Dada uma função escalar $f(x, y, z)$, como a função de intensidade de uma imagem. O **gradiente** de f, *grad I*, é uma função vetorial

$$\bigtriangledown f = grad\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

O gradiente da função é, portanto, um vetor, cuja magnitude e direção independem da escolha particular de um referencial cartesiano. Se o gradiente da f num ponto específico $P = (x, y, z)$ não se anula, este gradiente tem a direção ortogonal ao conjunto de nível da função f e aponta para a direção de sua maior variação.

Para medir a magnitude ou o potencial do campo vetorial de gradiente em um dado ponto P, podemos aplicar o **operador divergência** *div grad*

$$div\ grad\ f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

O **divergente do gradiente** é conhecido também como **operador Laplaciano**

$$\bigtriangledown^2\ f = div\ grad\ f$$

Exercícios

1. Dada uma função $f(x, y, z) = z^2 - 4(x^2 + y^2)$.

    - A qual figura geométtrica corresponde o nível de conjunto $f(x, y, z) = 0$?
    - Calcule o vetor normal $\mathbf{n}$ e o grandiente no ponto $P = (1, 0, 2)$ para conjunto de nível $f(x, y, z) = 0$. Compare a direção destes vetores.
    - Determine o ponto no nível de conjunto $f(x, y, z) = 1$ na direção do gradiente do ponto P. Qual é a direção do gradiente neste novo ponto?

2. Determine o laplaciano:

    - $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
    - $y^{-1}\mathbf{i} - xy^{-2}\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
    - $e^{xy}(y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

2 Método dos Mínimos Quadráticos

Dado um conjunto de observações

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \cdots (x_n, y_n)$$

onde x_i são variáveis independentes e y_i, variáveis dependentes de x_i, ou seja $y_i \sim f(x_i, \alpha)$ com α denotando um vetor de parâmetros de ajuste.

O **método de mínimos quadráticos** consiste em determinar os parâmetros α de f a fim de que ele malhor se ajusta a n observações experimentais através da minimização da soma S de resícuos $r_i = y_i - f(x_i, \alpha)$

$$S = \sum_{i=1}^{n} r_i^2,$$

ou seja, a seguinte consição deve ser satisfeita

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = 2 \sum_{i=1}^{n} r_i \frac{\partial r_i}{\partial \alpha_j} = -2 \sum_{i=1}^{n} r_i \frac{\partial f(x_i, \alpha)}{\partial \alpha_j} = 0$$

Exercícios

1. Utilize o método de mínimos quadráticos para achar a reta que melhor se ajusta aos seguintes pares de pontos:
   - $(2, 0), (3, 4), (4, 10), (5, 16)$
   - $(0, 200), (3, 230), (5, 240), (8, 270), (10, 290)$
2. Determine o erro quadrático entre os pontos observados e a função de reta aproximada.
3. Utilize o método de mínimos quadráticos para achar a parábola que melhor se ajusta aos seguintes pares de pontos:
   - $(-1, 2), (0, 0), (0, 1), (1, 2)$
   - $(-1, 0), (0, -2), (0, -1), (1, 0)$

3 Problemas de Auto-valores

Dada uma matiz A de dimensão $n \times n$. Um **auto-valor** λ de A é um valor real ou complexo, tal que a equação

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

tenha uma solução não-trivial, isto é $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. O vetor $\mathbf{x}$ é chamado **auto-vetor** de A. O conjunto de auto-valores associados à matriz A é chamado **espectro** de A. Este espectro pode ser determinado a partir da equação

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Uma **matriz diagonal** D com os auto-valores de A na sua diagonal principal satisfaz a seguinte igualdade

$$D = X^{-1} A X$$

onde X é uma matriz constituída pelos respectivos autovetores, ou seja, podemos decompor a matriz A em três matrizes, sendo uma delas matriz diagonal

$$A = X D X^{-1}$$

Exercícios

1. Decomponha a matriz em três matrizes XDX^{-1}, onde D uma matriz diagonal

   - $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
   - $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

2. Uma membrana elástica com a borda circular $x^2+y^2 = 1$ é esticada de tal forma que as coordenadas do ponto (x_1, x_2) sejam transformadas para (y_1, y_2) pela expressão

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

   formando uma elipse. Quais são as direções principais desta elipse?