

EA978 – Lista 6 – Transformada de Fourier e Estatística

Data de Entrega: 14/04/2009

1 Transformada de Fourier

Uma função $f(x)$ pode ser representada por uma **integral Fourier**

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(u) \cos 2\pi ux + B(u) \sin 2\pi ux] du,$$

onde

$$A(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos 2\pi v dv \quad B(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin 2\pi v dv,$$

se $f(x)$

1. é contínua por parte num intervalo finito,
2. tem a derivada direita e derivada esquerda em todos os pontos, e
3. é absolutamente integrável ao longo do eixo x , ou seja, existe o limite

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 |f(x)| dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b |f(x)| dx.$$

Em forma complexa,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du, \quad (1)$$

onde

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx. \quad (2)$$

Denominamos $F(u)$ a **transformada de Fourier** da função $f(x)$, $\mathcal{F}\{f(x)\}$, e dizemos que $f(x)$ é a **transformada de Fourier inversa** de $F(u)$. $f(x)$ e $F(u)$ são funções complexas, contendo dois componentes: um real $r(x)$ e $R(u)$ e um imaginário $i(x)$ e $I(u)$, respectivamente.

Uma interpretação física da Eq. 1 é $f(x)$ ser uma superposição de sinais de todas as frequências. Portanto, ela é também conhecida como uma **representação espectral** de $f(x)$, cujo **espectro de Fourier** é

$$|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)} \quad (3)$$

e o **ângulo de fase**,

$$\phi(u) = \tan^{-1} \frac{I(u)}{R(u)}. \quad (4)$$

O espectro de frequência é muito utilizado para análise visual de $f(x)$.

A “densidade espectral” $F(u)$ mede a intensidade de $f(x)$ no intervalo de frequência entre u e $u + \Delta u$ e a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 du \quad (5)$$

pode ser interpretada como a **energia** ou **potência** do sistema $f(x)$.

Algumas propriedades da transformada de Fourier:

Linearidade: $\mathcal{F}\{af(x) + bg(x)\} = a\mathcal{F}\{f(x)\} + b\mathcal{F}\{g(x)\}$;

Derivação: $\mathcal{F}\{\frac{d^n f(x)}{dx^n}\} = (j2\pi u)^n \mathcal{F}\{f(x)\}$;

Convolução: $\mathcal{F}\{f(x) * g(x)\} = \mathcal{F}\{f(x)\}\mathcal{F}\{g(x)\}$.

Exercícios

1. Esboce a forma de onda das seguintes funções:

- $f(x) = 0.81075 \cos(x) + 0.09007 \cos(3x) + 0.03243 \cos(5x) + 0.01654 \cos(7x) + 0.01001 \cos(9x) + 0.0067 \cos(11x) + 0.0048 \cos(13x)$
- $f(x) = 0.63662 \sin(x) - 0.31831 \sin(2x) + 0.2122 \sin(3x) - 0.15915 \sin(4x) + 0.12731 \sin(5x) - 0.10609 \sin(6x) + 0.09093 \sin(7x) - 0.07956 \sin(8x) + 0.07072 \sin(9x)$
- $f(x) = 1.27324 \sin(x) + 0.4244 \sin(3x) + 0.25463 \sin(5x) + 0.18186 \sin(7x) + 0.14144 \sin(9x) + 0.11571 \sin(11x) + 0.09789 \sin(13x) + 0.08482 \sin(15x) + 0.07483 \sin(17x)$

2. Determine a transformada de Fourier das seguintes funções, indicando explicitamente o limite de banda do espectro de frequência de cada uma:

- $f(x) = k$, se $0 < x < a$, senão $f(x) = 0$.
- $f(x) = e^{-ax^2}$, se $a > 0$.
- $f(x) = xe^{-x^2}$ (Dica: Utilize a propriedade de derivação).

3. Esboce o gráfico da função e do seu respectivo espectro de frequência, indicando o domínio de valores em que eles estão definidos.

	Função $f(x)$	Transformada $F(u)$
(a)	1	$\delta(u)$
(b)	$\delta(x)$	1
(c)	$\cos(ax)$	$\frac{1}{2}[\delta(u - \frac{a}{2\pi}) + \delta(u + \frac{a}{2\pi})]$
(d)	$\sin(2x)$	$\frac{1}{2j}[\delta(u + \frac{a}{2\pi}) - \delta(u - \frac{a}{2\pi})]$
(e)	$rect(ax) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ 0, & x > a \end{cases}$	$\frac{1}{ a } sinc(\frac{u}{a})$
(f)	$sinc(ax) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{\sin(ax)}{ax}, & x \neq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{ a } rect(\frac{u}{a})$
(g)	$tri(ax) = \begin{cases} 1 - x , & x \leq a \\ 0, & x > a \end{cases}$	$\frac{1}{ a } sinc^2(\frac{u}{a})$
(h)	$sinc^2(ax)$	$\frac{1}{ a } tri(\frac{u}{a})$
(i)	e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{(\pi u)^2}{\alpha}}$
(j)	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\Delta x)$	$\frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u - \frac{k}{\Delta x})$

4. Esboce e compare os gráficos das funções: $f(x) = x^2$ e $f(x - m)$.

5. Determine a convolução de:

- duas funções-pulso

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

Dica: Para obter a função $h(x) = f(x)*g(x)$ deve-se dividir o eixo x em 4 intervalos: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, \infty)$.

- duas funções

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} -1, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{em outros intervalos} \end{cases}$$

- uma função-impulso e uma função triangular

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ 2 - x, & x \in [1, 2] \\ 0, & \text{no restante dos intervalos} \end{cases}$$

- um trem de impulsos espaçados de $\Delta x = 0.5$ com a função triangular do item anterior.

2 Estatística

Análise Estatística tem o objetivo de coletar, organizar e extrair o máximo de informação relevante acerca de uma população com base em uma pequena amostra. Num experimento estatístico, uma seqüência de **observações** é anotada. Tais observações são conhecidas como **valores de amostra** e o **tamanho** de uma amostra corresponde à quantidade total de valores coletados.

A (**absoluta**) **freqüência** de um valor de amostra x é o número de vezes que ele ocorre durante o processo de amostragem, enquanto a **freqüência relativa** é a razão entre a freqüência absoluta de x e o tamanho da amostra. A soma de todas as freqüências relativas de uma amostra é igual a 1. A **distribuição de freqüências** de uma amostra é caracterizada, portanto, pela **função freqüência relativa** $\bar{f}(x)$. A soma de freqüências relativas de todos os valores de amostra menor ou igual a x define a **função de freqüência cumulativa**

$$\bar{F}(x) = \sum_{t \leq x} \bar{f}t.$$

Se uma amostra contém um grande volume de valores de amostra distintos, é comum agrupá-los em **intervalos de classe**. O conjunto de valores de amostra pertencentes a um intervalo de classe é conhecido como uma **classe**. De forma análoga a valores de amostra, definimos freqüência absoluta, freqüência relativa e freqüência cumulativa de classes.

A distribuição de freqüências de uma amostra pode ser graficamente representada por um **histograma**. O histograma é um gráfico composto por retângulos justapostos em que a base de cada um deles corresponde ao intervalo de classe e a sua altura à respectiva freqüência.

Alguns parâmetros estatísticos de uma amostra $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ podem revelar características relevantes de uma população:

Média : $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j.$

Variância : $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2.$

Desvio padrão : $s = \sqrt{s^2}.$

Moda : o valor de amostra que tem maior freqüência de ocorrência.

Mediana : o valor de amostra com a freqüência cumulativa igual a 0.5.

Momentos de ordem k : $m_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^k.$

Exercícios

1. Esboce o gráfico da distribuição de densidade de probabilidade de ocorrência de “cara” ao jogar uma moeda sucessivamente por
 - 4 vezes
 - 16 vezes
 - 32 vezes
 - 128 vezes

Estes gráficos podem ser considerados também gráficos de distribuição de freqüências? Justifique.

2. Determine os parâmetros estatísticos das seguintes amostras

- | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|-----|
| 99 | 100 | 102 | 101 | 98 | 103 | 100 | 102 | 99 | 101 |
| 100 | 100 | 99 | 101 | 100 | 102 | 99 | 101 | 98 | 100 |

- | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 43 | 44 | 45 | 46 | 44 | 43 | 41 | 41 | 44 | 44 | 43 | 44 | 42 | 45 | 43 |
| 45 | 42 | 44 | 44 | 42 | 45 | 41 | 44 | 44 | 43 | 44 | 46 | 41 | 43 | 45 |

3. Esboce o gráfico de função cumulativa de freqüências para as duas amostras do item anterior.