EA978 – Lista 2 – Álgebra Linear

Data de Entrega: 12/03/2009

1 Revisão

Um **espaço vetorial** é constituído por um conjunto $\mathcal{V}$ de **vetores**, juntamente com operações de **adição** (+) e **multiplicação** por escalar de um conjunto $\mathcal{K}$, que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Associatividade em adição: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ para $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ elementos de $\mathcal{V}$.
2. Existência de elemento neutro: há um elemento $\vec{0} \in \mathcal{V}$, tal que, para cada $\vec{v} \in \mathcal{V}$, $\vec{v}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}$.
3. Existência de elemento inverso: para cada $\vec{v} \in \mathcal{V}$, existe $\vec{u} \in \mathcal{V}$ tal que $\vec{v}+\vec{u}=\vec{0}$.
4. Comutatividade: para cada $\vec{v},\vec{u} \in \mathcal{V}$, $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.
5. Associatividade em multiplicação por escalar: para cada $a,b \in \mathcal{K}$ e cada $\vec{v} \in \mathcal{V}$, $a.(b.\vec{v})=(a.b).\vec{v}$.
6. Existência de elemento neutro em multiplicação por escalar: se $\vec{1}$ é a unidade de $\mathcal{K}$, então, para cada $\vec{v} \in \mathcal{V}$, $\vec{1}.\vec{v}=\vec{v}$.
7. Distributividade em multiplicação por escalar:
   - Para cada $a \in \mathcal{K}$ e cada $\vec{v},\vec{u} \in \mathcal{V}$, $a.(\vec{v}+\vec{u})=a.\vec{v}+a.\vec{u}$.
   - Para cada $a,b \in \mathcal{K}$ e cada $\vec{v} \in \mathcal{V}$, $(a+b).\vec{v}=a.\vec{v}+b.\vec{v}$.

Sejam $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_m \in \mathcal{V}$. Qualquer vetor $\vec{v}$ em $\mathcal{V}$ da forma

$$\vec{v}=a^1\vec{x}_1+a^2\vec{x}_2+\ldots+a^m\vec{x}_m,$$

onde $a^i \in \mathcal{K}$, é chamado uma **combinação linear** de $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_m$. Podemos representar uma combinação linear como produto de matrizes $EA=V$, onde as colunas de E correspondem aos vetores $\vec{e}_i$ e os vetores-coluna V e A correspondem, respectivamente, ao vetor $\vec{v}$ em questão e o respectivo vetor coordenada.

Os vetores $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_m \in \mathcal{V}$ são **linearmente dependentes** sobre $\mathcal{K}$, ou simplesmente dependentes, se existem escalares $a^1,a^2,\ldots,a^m \in \mathcal{K}$, nem todos nulos, tais que

$$a^1\vec{x}_1+a^2\vec{x}_2+\ldots+a^m\vec{x}_m=\vec{0}.$$

Em caso contrário, dizemos que os vetores são **linearmente independentes** sobre $\mathcal{K}$, ou simplesmente independentes. Os vetores linearmente independentes formam uma matriz que é equivalente a uma **matriz escalonada**. Entende-se como matriz escalonada quando o número de zeros precedendo o primeiro elemento não-nulo de uma linha aumenta linha por linha até que sobrem somente linhas nulas.

Um conjunto mínimo de vetores $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$, linearmente independentes e capazes de gerar todos os vetores de $\vec{v} \in \mathcal{V}$ através de combinações lineares, é conhecido por **gerador** de $\mathcal{V}$. A seqüência $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\}$ é chamada uma **base** de $\mathcal{V}$ e o número de elementos na seqüência corresponde à **dimensão** de $\mathcal{V}$. Neste caso, os n escalares $a^1,a^2,\ldots,a^n$ são completamente determinados pelo vetor $\vec{v}$ e pela base $\{\vec{e}_i\}$. Chamamos estes escalares as **coordenadas** de $\vec{v}$ em relação à base $\{\vec{e}_i\}$ e a seqüência $(a^1,a^2,\ldots,a^n)$,

vetor coordenada de $\vec{v}$ em relação a $\{\vec{e}_i\}$. Quando a base é formada pelos vetores fixos na origem $(0,0,0,0,\ldots,0)$ em um extremo

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= (1,0,0,0,\ldots,0,0)\\
\vec{e}_2 &= (0,1,0,0,\ldots,0,0)\\
\vec{e}_3 &= (0,0,1,0,\ldots,0,0)\\
&\ldots\\
\vec{e}_n &= (0,0,0,0,\ldots,0,1)
\end{aligned}$$

dizemos que ela é uma **base canônica**. Neste caso, as coordenadas são conhecidas por **coordenadas cartesianas**.

Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{U}$ espaços vetoriais sobre o conjunto de escalares $\mathcal{K}$. Uma **função** ou **transformação** $\mathcal{F}$ de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{U}$ é uma correspondência que associa um único vetor de $\mathcal{U}$ para cada vetor em $\mathcal{V}$. Ela é uma **transformação linear** se satisfaz:

1. Para qualquer $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$, $\mathcal{F}(\vec{v}+\vec{w}) = \mathcal{F}(\vec{v}) + \mathcal{F}(\vec{w})$; e
2. Para qualquer $k \in \mathcal{K}$ e qualquer $\vec{v} \in \mathcal{V}$, $\mathcal{F}(k\vec{v}) = k\mathcal{F}(\vec{v})$.

2 Exercícios

1. Quais conjuntos de vetores são linearmente independentes? Justifique.
   - (2,1,0,6), (1,9,9,0), (0,0,1,1) e (0,0,0,1)
   - (9,0,9,6), (0,6,6,1), (3,0,3,2) e (3,3,0,1)
2. Encontre a dimensão do subespaço vetorial gerado por
   - (3,1,4), (1,0,0) e (-3,4,4)
   - (3,0) e (-3,0)
   - (-8,-1,-3,4), (0,3,2,2) e (8,1,3,6)
3. Determine se cada um dos seguintes conjuntos forma uma base de R^3
   - (1,-1,2) e (-1,3,4)
   - (2,4,1), (1,2,1) e (3,4,2)
   - (8,0,-8), (1,3,-1), (3,2,-3) e (6,2,4)
4. Para os conjuntos que formam uma base de R^3 no item anterior, transforme-os numa base canônica. (Dica: $M^{-1}.M = I$, correspondendo as colunas da matriz-identidade I aos vetores ortonormais.)
5. Dadas as duas bases:
   $$\{\vec{e}_1 = (1,0,1) \quad \vec{e}_2 = (0,2,2) \quad \vec{e}_3 = (1,2,-1)\}$$
   $$\{\vec{f}_1 = (1,1,0) \quad \vec{f}_2 = (1,-1,0) \quad \vec{f}_3 = (0,0,1)\}$$
   - Encontre o vetor coordenada de $\vec{v} = (-1,5,8)$ em relação a cada base.
   - Encontre a transformação linear P cujas colunas são respectivamente os vetores coordenadas dos $\vec{e}_i$ em relação à base $\{\vec{f}_i\}$, ou seja, $FP = E$, onde as colunas de F e E são respectivamente os vetores $\vec{f}_i$ e os vetores de $\{\vec{e}_i\}$.
6. Dada uma base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ do espaço $\mathcal{V}$ e dados quaisquer vetores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ em $\mathcal{U}$. Qual é a transformação linear $\mathcal{F}: \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ tal que $\mathcal{F}(\vec{e}_1) = \vec{u}_1$, $\mathcal{F}(\vec{e}_2) = \vec{u}_2$, $\ldots$, $\mathcal{F}(\vec{e}_n) = \vec{u}_n$. Esta transformação é única? Justifique.

7. Escreva as seguintes transformações em notação matricial, se possível. Quais são lineares?

   - $\mathcal{F}(x, y) = (3x - y, -5x + 2y)$
   - $\mathcal{F}(x, y, z) = (x, y + 4, z + 3)$
   - $\mathcal{F}(x, y) = x^2 + y$