

## Capítulo 9

# Processamento de Imagens

Entendemos pelo processamento de imagens o conjunto de técnicas e algoritmos que tem como entrada uma imagem (original) e a saída uma imagem (modificada). Tais métodos desempenham um papel importante em sistemas de informações gráficas sob vários aspectos:

- por proverem recursos para facilitar a percepção e a interpretação humana, como **segmentação**;
- por viabilizarem a automatização da percepção, como **realce** de contraste e **restauração** de imagens degradadas; e
- por possibilitarem efeitos visuais especiais, como *warping* e *morphing*.

**Observação 9.1** *Entende-se por **realce** de uma imagem a redistribuição das luminâncias/brilhâncias de forma a acentuar contrastes do interesse da aplicação. A **restauração**, por sua vez, tem o propósito direcionado para reconstruir ou recuperar uma imagem “degradada”, usando-se algum conhecimento a priori do processo de degradação.*

*Entende-se por **segmentação** o processo de subdivisão de uma imagem em suas partes ou objetos constituintes. O nível até o qual essa subdivisão deve ser realizada depende do interesse da aplicação.*

Podemos interpretar o processamento de uma imagem contínua como uma transformação  $T$  da brilhância  $f(x_i, y_i) \in \mathfrak{R}^2$  de cada ponto  $[x_i \ y_i]^t$  para uma nova brilhância  $g(x_f, y_f)$  através da expressão

$$g(x_f, y_f) = T[f(x_i, y_i)],$$

onde  $[x_i \ y_i]^t$  e  $[x_f \ y_f]^t$  não precisam ser necessariamente iguais.

Uma outra forma útil é descrever imagens com uso de integrais de Fourier e considerar processamentos de imagens como convoluções entre duas funções – uma corresponde à imagem  $f(x, y)$  e outra ao operador de transformação  $h(x, y)$ , isto é

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y).$$

Do teorema da convolução sabemos que no domínio de frequência, a operação se reduz a uma multiplicação

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v),$$

onde  $G$ ,  $H$  e  $F$  são as transformadas de Fourier de  $g$ ,  $h$  e  $f$ , respectivamente.

Vimos no Capítulo 7 que uma imagem contínua pode ser discretizada num reticulado  $f(i\Delta x, k\Delta y)$  de  $N \times M$  pixels  $x = i\Delta x$  e  $y = k\Delta y$  para  $i \in \{0, \dots, N-1\}$  e  $k \in \{0, \dots, M-1\}$ . Na seção 9.1 apresentaremos as **transformadas discretas** de Fourier que permitem representar processamentos de uma imagem discreta como convoluções de duas funções discretas no domínio espacial e de frequência

$$g(x, y) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{M-1} h(x - i\Delta x, y - k\Delta y) f(i\Delta x, k\Delta y).$$

Por simplicidade e/ou por desmempenho, a função de convolução  $h(x - i\Delta x, y - k\Delta y)$  é aproximada (usualmente, minimizando o erro quadrático) por uma função que cobre um número finito de pixels. É comum, neste caso, chamar  $h$  de **máscara** de convolução espacial, ou simplesmente **filtro**. Vamos introduzir na seção 9.4 alguns filtros mais conhecidos.

Finalmente, mostraremos que transformações geométricas apresentadas no Capítulo 4 podem ser aplicadas no processamento de imagens tanto para eliminar distorções geométricas que podem ocorrer durante a sua captura como também para criar efeitos especiais.

Embora as técnicas discutidas neste Capítulo sejam aplicáveis para as imagens discretas em geral, consideraremos somente os casos para os quais as brilhâncias/luminâncias sejam quantizadas.



$$\begin{aligned}
F(u, v) &= \frac{1}{NM} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{M-1} f(i\Delta x, k\Delta y) e^{-j2\pi(\frac{i u}{N} + \frac{k v}{M})} \\
&= \frac{1}{NM} \sum_{i=0}^{N-1} e^{-j2\pi(\frac{i u}{N})} \sum_{k=0}^{M-1} f(i\Delta x, k\Delta y) e^{-j2\pi(\frac{k v}{M})}
\end{aligned}$$

**Periodicidade** :  $F(u, v) = F(u + N, v) = F(u, v + M) = F(u + N, v + M)$ ,  
ou seja, a transformada discreta de Fourier e sua inversa são periódicas.

**Translação** :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(i, k) e^{j2\pi(\frac{i u_0}{N} + \frac{k v_0}{M})}] &\Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0) \\
f(i - i_0, k - k_0) &\Leftrightarrow \mathcal{F}^{-1}[F(u, v) e^{-j2\pi(\frac{i_0 u}{N} + \frac{k_0 v}{M})}]
\end{aligned}$$

**Rotação** : a rotação de  $f(i, k)$  de um ângulo  $\theta_0$  implicará em uma rotação de  $F(u, v)$  deste mesmo ângulo.

**Distributividade** :  $\mathcal{F}[f_1(i, k) + f_2(i, k)] = \mathcal{F}[f_1(i, k)] + \mathcal{F}[f_2(i, k)]$ .

**Mudança de Escala** : a multiplicação de  $f(i, k)$  por um fator  $\alpha$  implicará em uma multiplicação de  $F(u, v)$  por este mesmo fator.

**Laplaciano** :  $\mathcal{F}[\nabla^2 f(i, k)] = -(2\pi)^2(u^2 + v^2)F(u, v)$ .

**Convolução** :  $f(i, k) * g(i, k) = \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} f(n, m)g(i - n, k - m)$ .

## 9.2 Operações Básicas

Processamento de uma imagem discreta consiste essencialmente em uma sequência de operações lógico-aritméticas, *pixel* por *pixel*, e/ou transformações geométricas. A grosso modo, podemos dizer que as primeiras operações alteram o valor da função associada aos *pixels* e a segunda classe de operações afetam a relação espacial entre os *pixels*. A partir destas operações pode-se implementar as operações orientadas à vizinhança como as por máscara, nas quais o valor de um *pixel* é modificado em função da sua própria luminância/brilhância e a de seus vizinhos, ou então implementar as técnicas de comparação de imagens adquiridas em diferentes instantes no espaço de tempo.

### 9.2.1 Operações Lógico-Aritméticas

As quatro principais operações aritméticas entre dois *pixels* multivariados  $p$  e  $q$  são:

**Adição** :  $p + q$  (os valores das funções correspondentes a dois *pixels* são adicionados na forma convencional de soma);

**Subtração** :  $p - q$  (os valores das funções correspondentes a dois *pixels* são subtraídos);

**Multiplicação** :  $pq$  (os valores das funções correspondentes a dois *pixels* são multiplicados); e

**Divisão** :  $p/q$  (os valores das funções correspondentes a dois *pixels* são divididos).

Estas operações são básicas na alteração dos **valores** da amostra de uma imagem contínua.

**Observação 9.2** *Lembramos aqui que a implementação das matrizes de dither e do algoritmo de Floyd-Steinberg faz uso das operações de multiplicação, adição e subtração entre os valores de uma imagem e os valores da máscara (que pode ser considerada uma segunda imagem).*

**Observação 9.3** *A média (adição) das imagens ruidosas pode gerar uma imagem com uma definição melhor.*

*(Ver Fig. 4.18 do livro-texto de Gonzalez.)*

As principais operações lógicas entre duas amostras **binárias**  $p$  e  $q$  são:

**E** :  $p \wedge q$  (equivalente à operação booleana E);

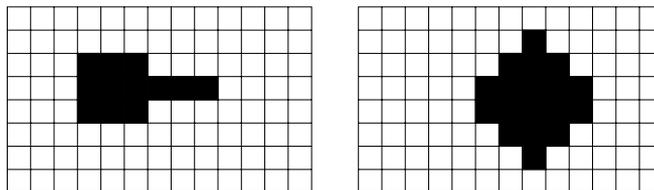
**OU** :  $p \vee q$  (equivalente à operação booleana OU); e

**Complemento** :  $\neg p$  (equivalente à operação booleana NOT).

Estas operações são muito utilizadas na composição ou combinação das imagens para obter efeitos especiais.

*(Ver Fig. 2.14 do livro-texto de Gonzalez.)*

**Exercício 9.2** *Dadas as duas imagens binárias*



Determine a imagem resultante da operação lógica E e OU.

### 9.2.2 Transformações Geométricas

Transformações geométricas são operações que alteram a posição dos pontos como vimos no Capítulo 4. Em se tratando de imagens discretas, podemos considerar como pontos os *pixels* cujas coordenadas só assumem valores inteiros. Isso pode frequentemente requerer após uma transformação geométrica interpolação das luminâncias/brilhâncias dos *pixels* para “fechar” os buracos e/ou filtragem para determinar a luminância/brilhância do *pixel* sobre o qual são sobrepostos vários *pixels* da imagem original.

As transformações geométricas muito utilizadas em processamento de imagens são: rotação, mudança de escala, deslocamento relativo linear e translação. As definições são equivalentes às dadas no Capítulo 4.

**Exercício 9.3** *Quais seriam as imagens resultantes se aplicarmos na imagem do Exemplo 9.2 as seguintes transformações geométricas:*

1. rotação de  $45^\circ$  em torno do centro do quadrado,
2. deslocamento  $[1.5 \ 1.5]^t$  e
3. aplicação de um fator de escala  $[0.5 \ 0.5]^t$ .

## 9.3 Processamentos Pontuais

Processamentos pontuais, ou *pixel a pixel*, são caracterizados por transformar de forma independente a luminância/brilhância de cada *pixel*. As técnicas existentes podem ser utilizadas tanto para realce de imagens como para restauração de imagens degradadas. Introduzimos nesta seção duas classes de técnicas: ajustes na luminância/brilhância em função da posição dos *pixels* e transformações em níveis de cinza.

Os ajustes na luminância/brilhância levam em conta as posições dos *pixels* e são muito utilizados para corrigir distorções ópticas que podem ocorrer durante a aquisição de imagens. Assim, para obter a imagem correta  $g(i, k)$  a

partir da imagem adquirida  $f(i, k)$ , podemos dividir a luminância/brilhança de cada *pixel*  $[i, k]^t$  por um fator de correção  $e(i, k)$   $e(i, k)$ , isto é

$$g(i, k) = \frac{f(i, k)}{e(i, k)}.$$

O fator de correção pode ser obtido a partir da comparação entre uma imagem de referência com a luminância/brilhança conhecida e o resultado da sua aquisição pelo dispositivo.

As transformações em níveis de cinza modificam os níveis de cinza  $r$  de um *pixel* independentemente da sua posição, mas sim em função das (luminâncias) limiares pré-definidas ou da distribuição de frequências (de ocorrência) de níveis de cinza.

A idéia por trás das transformações por limiares consiste na mudança da escala dos níveis de cinza (luminâncias) para uma faixa de luminâncias definida por um limiar inferior  $r_1$  e um limiar superior  $r_2$ . Algumas possíveis transformações  $T(r)$  de  $L$  níveis de cinza,

- transformação linear:  $T(r) = B - Ar, \forall r$ , onde  $B$  e  $A$  são constantes.  
(Ver Fig. 4.4 do livro-texto de Gonzalez.)
- função de limiarização:  $T(r) = 0, 0 \leq r < r_1 = r_2$  e  $T(r) = L - 1, r_1 \leq r \leq (L - 1)$ , como vimos no Capítulo 8.  
(Ver Fig. 4.5 do livro-texto de Gonzalez.)
- fatiamento dos níveis de cinza:  $T(r) = s_1, r_1 \leq r \leq r_2$  e para os outros valores  $T(r)$  é uma função qualquer.  
(Ver Fig. 4.7 do livro-texto de Gonzalez.)
- Compressão da escala:  $T(r) = clog(1 + |r|), \forall r$ .  
(Ver Fig. 4.6 do livro-texto de Gonzalez.)

**Exercício 9.4** Dada uma imagem  $17 \times 11$  em 255 níveis de cinza:

171	162	180	178	162	171	178	165	171	163	162	160	175
117	70	97	106	76	93	120	110	108	111	105	118	105
137	138	101	124	129	120	113	118	129	132	134	136	141
131	127	112	134	118	107	134	157	122	123	130	135	117
126	122	147	134	145	124	163	118	142	141	133	126	101
122	129	126	122	125	143	116	129	132	139	137	131	107
122	112	107	136	171	175	156	174	165	176	207	138	189
154	181	179	187	166	159	173	171	154	223	220	167	191
244	221	170	187	154	149	157	20	114	122	108	140	127
149	114	110	135	134	150	130	167	113	162	120	145	115
131	120	209	175	173	145	70	50	142	156	108	130	134

1. Obtenha o negativo da imagem, utilizando a transformação  $T(r) = 255 - r$ .
2. Derive uma função que alarga a faixa de contraste da imagem para 0 - 255. Mostre os valores da imagem transformada.
3. Derive uma função que destaque a parte da imagem que tiver o nível de cinza na faixa 100 - 150. Mostre os valores da imagem transformada.

Transformações por distribuição de frequências trabalha em cima do histograma de níveis de cinza que revela a escala e a distribuição dos níveis de cinza. Um método bastante útil para realce de contraste de imagens é o método de **equalização do histograma** que consiste em transformar um histograma noutro com uma distribuição mais uniforme dos níveis de cinza.

**Exercício 9.5** *Determine o histograma da imagem do Exercício 9.4.*

Existem várias formas para equalizar um histograma. Uma forma é com uso da medida estatística - a mediana. Como já vimos na seção 8.1, o processo consiste em se fazer subdivisões sucessivas do intervalo de intensidades da imagem utilizando a mediana do conjunto de níveis de cinza em cada processo de subdivisão. Uma outra forma análoga é utilizar a seguinte expressão para determinar o novo nível de cinza  $s_k$  correspondente ao  $k$ -ésimo nível de cinza da imagem original

$$s_k = \sum_{i=0}^k \frac{n_i}{n},$$

onde  $n_i$  é o número de ocorrência de  $i$ -ésimo nível de cinza numa imagem de  $n$  pixels.

(Ver Figs. 4.13-4.15 do livro-texto de Gonzalez.)

**Exercício 9.6** *Equalize o histograma da imagem do Exercício 9.4. Mostre os valores da luminância da imagem equalizada.*

Finalmente, vale comentar que subtrações *pixel a pixel* entre duas imagens tem numerosas aplicações em segmentação e realce. O princípio do procedimento é subtrair duas imagens de mesma tomada, uma com os detalhes de interesse realçados, com uso de materiais adequados, e outra não. Assim, após a subtração, as áreas de interesse recebem valores altos e aparecem como regiões claras e as outras áreas como regiões escuras.

(Ver Fig. 4.17 do livro-texto de Gonzalez)

## 9.4 Filtragem

No domínio de frequência podemos reduzir o problema de processamento de uma imagem  $F(u, v)$  num produto entre a imagem e uma função de transferência  $H(u, v)$  para produzir uma terceira função  $G(u, v)$  cuja transformada inversa nos dá a nova imagem

$$g(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[H(u, v)F(u, v)]. \quad (9.1)$$

A função  $H(u, v)$  pode atuar como um filtro de frequências da função  $F(u, v)$  que em termos de luminâncias da imagem corresponde ao aumento e/ou à redução nas variações das luminâncias de  $\mathcal{F}^{-1}[F(u, v)]$ . Em decorrência disso, teremos uma nova imagem mais suavizada ou com detalhes mais realçados.

(Ver Fig. 4.19 do livro-texto de Gonzalez)

Um dos problemas que se tenta resolver na área de Processamento de Imagens é determinar o filtro  $H(u, v)$  mais apropriado possível para uma dada aplicação. Obtido o filtro, pode-se sempre implementá-lo de forma aproximada no domínio espacial através de uma máscara de convolução  $h(x, y)$  de custo computacional menor. Para que se garanta que a filtragem não altere a luminância média da imagem, é imposta ainda que os valores de uma máscara  $n \times m$  sejam tais que

$$\frac{1}{NM} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m h_{ik} = 1$$

Vale ainda observar que no uso de uma máscara de convolução para filtragem, devemos tomar devidos cuidados para processar os *pixels* da borda da imagem onde a máscara não consegue cobrir todos os elementos. Há várias propostas para estender o domínio espacial da imagem de forma a obter resultados adequados para uma dada aplicação. Quando a ordem da matriz que define a máscara é muito menor que o tamanho da imagem, podemos tomar a decisão de não estender a imagem e considerar somente como zero os valores dos *pixels* “faltantes” no cômputo da convolução.

**Observação 9.4** *Detalhes da derivação de uma máscara espacial a partir de um filtro  $H(u, v)$  no domínio de frequência podem ser encontrados na seção 4.5 do livro-texto de Gonzalez.*

Nesta seção apresentamos alguns filtros mais conhecidos, alguns definidos no domínio de frequência e outros no domínio espacial.

### 9.4.1 Filtro *Box* ou Filtros por Média

É um filtro de suavização que atenua as altas frequências da imagem fora do domínio  $D$ . O operador de transformação é dado por

$$h(x, y) = \begin{cases} (\frac{1}{2a}) \cdot (\frac{1}{2a}), & \text{se } -a \leq x, y \leq a \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

**Observação 9.5** O operador binário  $\cdot$  indica que  $H(u, v)$  pode ser obtida em dois passos por aplicações sucessivas da transformada de Fourier unidimensional. Isso é garantido pela propriedade de separabilidade das transformadas de Fourier.

**Observação 9.6**  $\mathcal{F}[\frac{1}{2a}] = \text{sinc}u = \frac{\text{senu}}{u}$ .

Uma discretização desse filtro numa máscara espacial  $3 \times 3$ , ou **filtro espacial**, é dada por:

$$\frac{1}{9} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

(Ver Fig. 4.21 do livro-texto de Gonzalez)

O fator  $\frac{1}{9}$  é um fator de normalização para garantir que a luminância total da imagem não seja alterada.

Um dos principais problemas deste filtro de suavização é que ele “borra” bordas e pequenos detalhes.

(Ver Fig. 4.22 do livro-texto de Gonzalez)

**Exercício 9.7** Seja um filtro espacial de ordem 3

$$\frac{1}{4} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Encontre um filtro  $H(u, v)$  equivalente no domínio de frequência para avaliar se é um filtro passa-baixas ou passa-altas.

### 9.4.2 Filtros por Mediana

Estes filtros tem como objetivo “borrar” menos as bordas e os detalhes. O nível de cinza de cada pixel é substituído pela mediana dos níveis de cinza na vizinhança. O tamanho da vizinhança fica a critério de cada aplicação.

A principal desvantagem de um filtro por mediana é poder “corromper” linhas finas e cantos pontiagudos. Um método para evitar isso é escolher máscaras de geometria mais apropriada.

(Ver Fig. 4.23 do livro-texto de Gonzalez)

### 9.4.3 Filtro de Bartlett

É um filtro de suavização que atenua mais as altas frequências em relação ao filtro *box*. A função no domínio espacial é dada por

$$h(x, y) = \begin{cases} (1 - |x|) \cdot (1 - |y|), & \text{se } x \leq 1 \text{ e } y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

**Observação 9.7**  $\mathcal{F}[1 - |x|] = \text{sinc}^2 u = \frac{\text{sen}^2 u}{u^2}$ .

Uma discretização deste filtro pode ser obtida em duas etapas:

1. máscara unidimensional, tomando três pontos  $\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$ , cinco pontos  $\{-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$  ou sete pontos  $\{-\frac{3}{4}, -\frac{2}{4}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\}$  do intervalo de suporte. Substituindo-os na função  $h(x)$  e normalizando-os, teremos as seguintes máscaras, respectivamente,

$$\begin{array}{c} \frac{1}{4} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \\ \frac{1}{9} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \\ \frac{1}{16} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

2. Pela propriedade de separabilidade, podemos obter uma máscara bidimensional, multiplicando as máscaras unidimensionais antes de normalizar os valores da máscara. Por exemplo, para um filtro de Bartlett de ordem 5 teremos

$$\frac{1}{9} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ \hline 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ \hline 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

(Ver Fig. 14.23(c) do livro-texto de Foley)

### 9.4.4 Filtro de Butterworth

Diferentemente dos filtros anteriores, estes filtros atuam no domínio de frequência. Há duas versões, passa-altas e passa-baixas, cujas funções de transferência de ordem  $n$  com posição de frequência de corte a uma distância  $D_0$  são, respectivamente,

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + (D(u, v)/D_0)^{2n}}$$

(Ver Figs. 4.34 e 4.35 do livro-texto de Gonzalez)

**Observação 9.8** *Os filtros passa-baixas suavizam as imagens por eliminar as altas frequências na variação das luminâncias/brilhâncias. Eles podem, por exemplo, atenuar efeitos de contornos falsos nas imagens quantizadas.*

*(Ver Fig. 4.36 do livro-texto de Gonzalez)*

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + (D_0/D(u, v))^{2n}}$$

(Ver Figs. 4.37–4.39 do livro-texto de Gonzalez)

### 9.4.5 Filtro Gaussiano

A função de transformação é dada por uma função gaussiana na forma

$$h(x, y) = \frac{1}{2\sigma^2\pi} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}.$$

(Ver Fig. 14.25(c) do livro-texto de Foley)

Pode-se mostrar que ela é equivalente à convolução dos filtros *box*. Portanto, convoluindo sucessivamente os filtros *box* podemos obter uma aproximação para o filtro gaussiano. No caso de ordem 5, temos o seguinte filtro espacial

	1	4	6	4	1
	4	16	24	16	4
$\frac{1}{256}$	6	24	36	24	6
	4	16	24	16	4
	1	4	6	4	1

(Ver Fig. 14.33(d) do livro-texto de Foley)

### 9.4.6 Filtros por Derivadas de Primeira Ordem

Os filtros por derivadas tem efeito contrários aos filtros de suavização ou passa-baixas, nos quais procura-se “integrar” as luminâncias dos *pixels* vizinhos. É esperado que os filtros por derivadas revelam variações acentuadas nos níveis de cinza como ocorrem nas bordas ou regiões de descontinuidade de uma imagem. Portanto, são muito utilizados no pré-processamento de uma imagem a ser segmentada para “aguçar” as bordas.

O princípio básico dos filtros por derivadas é gerar uma imagem que se aproxima do gradiente da função-imagem  $f(x, y)$ .

A direção de maior variação de uma função  $f(x, y)$  é dada pelo gradiente da função

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta f_{y \text{ constante}}}{\Delta x} \\ \frac{\Delta f_{x \text{ constante}}}{\Delta y} \end{bmatrix},$$

cujo módulo é dado por

$$|\nabla f| = \sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial x} + \frac{\partial f^2}{\partial y}} \approx |G_x| + |G_y|$$

**Observação 9.9** *Detecção de aresta é um método importante para pré-processar as imagens. Uma aresta pode ser caracterizada por duas variáveis: a magnitude dada pelo módulo do gradiente (maior variação de luminância) e a direção perpendicular à direção do gradiente  $\phi$ , ou seja*

$$\phi - 90^\circ = \arg\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) - 90^\circ,$$

onde  $\arg(x, y)$  é o ângulo em radianos do eixo  $x$  para o ponto  $[x \ y]^t$ .

Como existem diferentes formas para discretizar as derivadas de uma função (diferenças ascendentes, diferenças descendentes, diferenças centradas e diferenças “cruzadas”), há diferentes propostas de máscaras para aproximar  $|\nabla f|$ . A título de ilustração, vamos mencionar três máscaras

- Máscara de Roberts: por diferenças cruzadas (é um dos operadores mais antigos)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Máscara de Prewitt: por diferenças centradas

$$G_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G_y = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Máscara de Sobel: uma variante de Prewitt com a vantagem e fornecer ao mesmo tempo os efeitos de suavização, uma vez que pode-se mostrar que ela é, de fato, resultado da concatenação da máscara de Prewitt e de uma máscara de suavização.

$$G_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G_y = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(Ver Figs. 4.28, 4.29 e 7.6 do livro-texto de Gonzalez)

**Exercício 9.8** *Encontre uma função de transferência  $H(u, v)$  equivalente à máscara de Prewitt e mostre que ela é, de fato, um filtro passa-altas.*

### 9.4.7 Filtro por Derivadas de Segunda Ordem

O Laplaciano de uma função de duas variáveis  $f(x, y)$  é dada por

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Como o operador gradiente, este operador pode ser aproximado em forma discreta de diferentes maneiras. Exemplificando,

- uma máscara espacial de ordem 3:

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

- uma máscara espacial de ordem 4:

0	1	1	0
1	-2	-2	1
1	-2	-2	1
0	1	1	0

Por serem aproximações de derivadas de segunda ordem, estas máscaras conseguem detectar as bordas ou regiões de descontinuidade. No entanto, elas são pouco utilizadas na prática por serem muito sensíveis a ruídos e por produzirem bordas duplas. O que se faz na prática é aplicar o filtro Laplaciano numa imagem suavizada pelo filtro gaussiano, denominado por alguns autores de operador **Laplaciano de Gaussiano**.

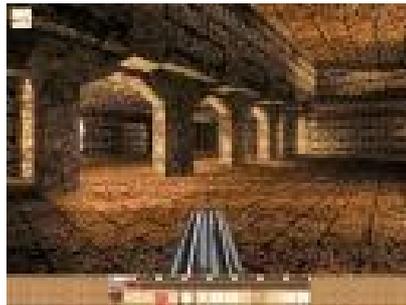
(Ver Fig. 7.4 do livro-texto de Gonzalez)

**Observação 9.10** *Às vezes estamos interessados somente na magnitude de uma aresta e não na sua orientação. Neste caso, podemos utilizar o filtro de Laplaciano que é invariante às rotações na imagem.*

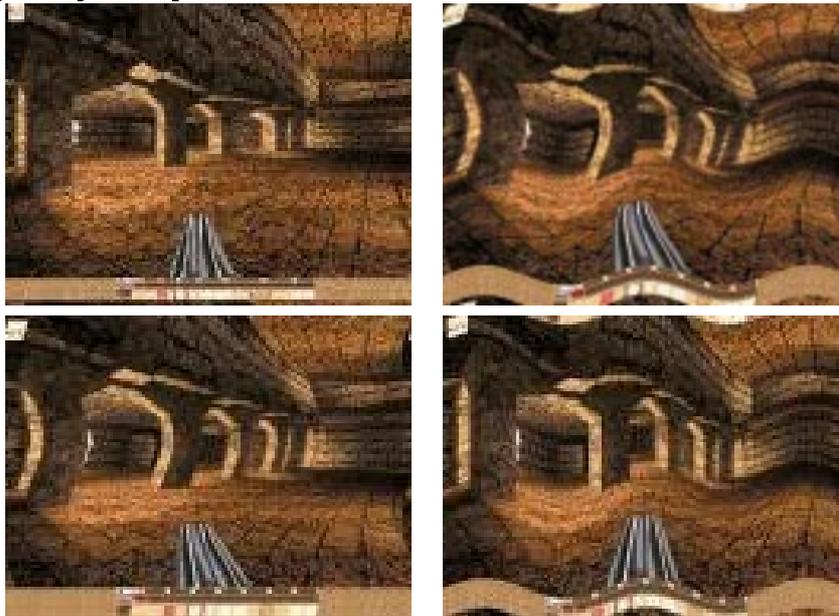
## 9.5 Warping e Morphing

O processo *warping* consiste em deformar ou distorcer uma imagem através das alterações nas posições relativas dos *pixels* sem afetar as vizinhanças, como se fosse uma borracha.

**Exemplo 9.1** *As seguintes imagens distorcidas (warping images a partir da imagem original*



*foram extraídas do sítio [http://www.gamers.org/dEngine/quake/wavy\\_image/warp.html](http://www.gamers.org/dEngine/quake/wavy_image/warp.html)*

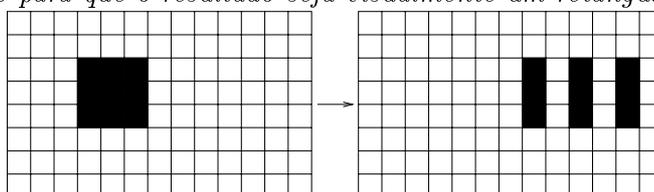


*Na primeira imagem superior esquerda foi aplicado esticamento em ambas direções  $x$  e  $y$  e na superior direita, ondulações senoidais em ambas as direções. Nas duas imagens inferiores, ondulações senoidais são aplicadas nas direções  $y$  e  $x$ , respectivamente.*

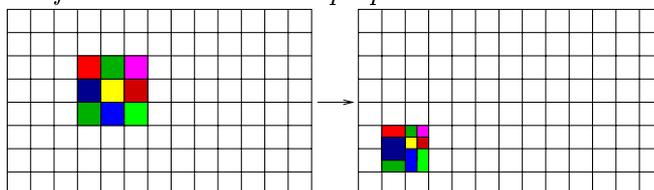
As modificações nas posições relativas podem ser obtidas com uso de transformações geométricas. Entretanto, pelo fato das imagens serem discretas, o reticulado dos *pixels* transformados não se alinha necessariamente com o reticulado original. Isso pode gerar dois problemas:

- dois *pixels* adjacentes se afastam demasiadamente, criando vazios no reticulado original e
- dois ou mais *pixels* se aproximam demais, sobrepondo em cima de um ponto do reticulado original.

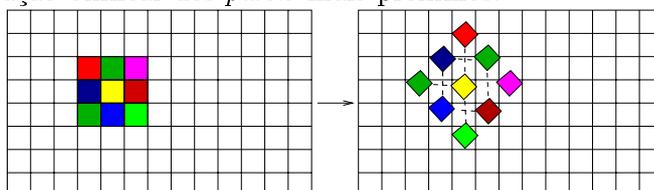
**Exemplo 9.2** Ao escalonar um quadrado constituído por 9 *pixels* na direção  $x$ , podemos gerar sulcos entre os *pixels* cujos valores precisam ser interpolados para que o resultado seja visualmente um retângulo.



Se multiplicarmos as coordenadas de um quadrado por um fator de escala igual a  $\frac{1}{2}$ , teremos mais de um valor associado a um *pixel*. Neste caso, precisaremos definir um valor mais apropriado.

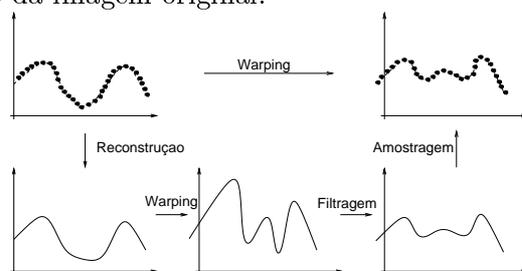


No primeiro caso, precisaremos fazer uma interpolação entre os *pixels* para preencher os buracos. Uma interpolação que se encontra na literatura é a interpolação bilinear dos *pixels* mais próximos.



Para sobreposição, é comum considerar que houve uma superamostragem e aplica-se um filtro de suavização para obter o valor do novo *pixel* (seção 7.4).

No entanto, um outro paradigma pode ser aplicado para obter efeitos de *warping* sem precisar enfrentar os problemas de buracos e sobreposição. Este paradigma consiste em trabalhar com a imagem contínua durante a etapa de transformação geométrica e depois, reamostrar a imagem deformada na mesma resolução da imagem original.



Trabalhando com o espaço contínuo, garante-se que a imagem se manterá intacta durante as dilatações e contrações. O que pode ocorrer é que haja um aumento nas altas frequências e aumentar o efeito de *aliasing* na reamostragem. Isso, entretanto, pode ser contornado com uma filtragem de suavização antes da reamostragem.

Entendemos por *morphing* o processo que combina simultaneamente *warping* (transformação no domínio espacial) e a mudança nas luminâncias dos *pixels* com o objetivo de interpolar duas imagens dadas *a priori*.

O princípio básico dos algoritmos de *morphing* é interpolar linearmente as brilhâncias/luminâncias entre os *pixels* correspondentes das duas imagens e, em paralelo, é aplicado o *warping* para fazer alinhamento entre as geometrias das duas imagens.

**Exemplo 9.3** A seguinte sequência de imagens interpoladas (*morphing images*) obtida do sítio [http://www.blackbeltsystems.com/bx\\_wi\\_mee.html](http://www.blackbeltsystems.com/bx_wi_mee.html) ilustra o processo de interpolação das brilhâncias entre duas imagens, uma de uma garota e a outra de sapo.

