

Sumário

1	Introdução	2
1.1	Imagens	3
1.2	Tipos de Imagens	4
1.3	Percepção Visual de Imagens	5
1.4	Modelos de Imagens	5
1.5	Aquisição e Exibição de Imagens	7
1.6	Interação com as Imagens	8
2	Matemática em Sistemas Gráficos	8
2.1	Pontos	8
2.2	Vetores	10
2.3	Funções	13
2.4	Matrizes e Transformações	15
2.5	Números Complexos	18
2.6	Integral de Fourier	20
2.7	Processamento de Amostras	22
2.8	Métodos Numéricos	24
2.8.1	Método de Eliminação de Gauss	25
2.8.2	Método de Newton-Raphson	26
2.8.3	Diferenças Finitas	26
2.8.4	Interpolação	27
2.8.5	Técnica de Mínimos Quadrados	27
3	Modelagem Geométrica	28
3.1	Vértices e Vetores Normais	28
3.2	Representações Analíticas de Curvas e Superfícies	29
3.2.1	Curvas e Superfícies de Bézier	33
3.2.2	Curvas e Superfícies de B-Splines	35
3.3	Geometria Construtiva	39
3.4	Classificação do Espaço Particionado	39
3.5	Representação Polinomial de Seções Cônicas	40
4	Transformações Geométricas	40
4.1	Transformações Geométricas Básicas	40
4.1.1	Translação	41
4.1.2	Mudança de Escala	41
4.1.3	Deslocamento Relativo Linear	42
4.1.4	Rotação	43
4.1.5	Espelhamento	44
4.1.6	Notação Matricial Única	45
4.2	Transformações entre Sistemas de Coordenadas	48
4.3	Quaternions e Rotações	52
5	Transformações Projetivas e Anti-Projetivas	53
5.1	Leites Biconvexas	53
5.2	Tipos de Projeção	56
5.3	Modelos de Câmera	58
5.4	Transformações Perspectivas	59
5.4.1	Especificação de Volumes de Visão Normalizados	60
5.4.2	Transformação em Volume Canônico	60
5.5	Calibração de Câmera	69
6	Iluminação	72
6.1	Luz	73
6.2	Modelos de Fontes de Luz	77
6.3	Modelos de Iluminação Local	78
6.4	Modelos de Iluminação Global	82
6.5	Tonalização	85
6.6	Espectro de Fourier	85
7	Amostragem	87
7.1	Imagens Discretas	88
7.2	Algoritmos de Conversão	89
7.2.1	Rasterização de Pontos	90
7.2.2	Rasterização de Curvas	91
7.2.3	Rasterização de Áreas Preenchidas	93
7.2.4	Conversão de Modelos 3D	94
7.3	Amostragem por Convolação	95
7.4	AntiAliasing	96

um ponto da superfície é chamado **modelo de iluminação local** (seção 6.3) e o modelo que tenta levar em consideração as interações deste feixe com todas as superfícies existentes num ambiente é conhecido como **modelo de iluminação global** (seção 6.4). Tais modelos são fundamentados em teoria de Óptica. Veremos na seção 6.5 que, por eficiência, é comum aplicar somente o modelo de iluminação numa amostra de pontos e interpolar os valores obtidos para o resto dos pontos da superfície. Finalmente, mostraremos ainda na seção 6.6 que a função de luminância/brilância associada a uma imagem pode ser representada como espectro de Fourier, o que nos permite analisar e corrigir certos efeitos no domínio de **frequência de variação das intensidades**.

6.1 Luz

Existem vários modelos para descrever o comportamento da luz. A maioria dos algoritmos utilizados em Computação Gráfica é o modelo de ondas eletromagnéticas. Neste modelo, a luz é constituída por ondas eletromagnéticas transversais que se propagam no vácuo com uma velocidade aproximada de 3.0×10^8 m/s. O comprimento de onda, λ , determina a cor que percebemos.

Uma onda eletromagnética é constituída de dois campos oscilantes perpendiculares entre si: eléctrico e magnético. Ambos são perpendiculares à direcção de propagação da onda. A energia da onda é proporcional ao quadrado da amplitude da onda.

Chamamos de **fluxo (de energia) luminoso** Φ (em lúmens) de um objecto a razão entre a quantidade de energia radiante que um objecto emite durante um certo intervalo de tempo. A **intensidade luminosa** (em candelas) de um objecto em uma determinada direcção refere-se à razão entre o fluxo luminoso que ele emite através de um pequeno ângulo sólido cujo eixo é a direcção considerada. A **luminância ou brilho** I de um objecto em uma determinada direcção é a razão entre a intensidade luminosa Φ_{ω} do objecto na direcção considerada e a área A_p da projecção do objecto sobre um plano perpendicular a esta direcção

$$I = \frac{\Phi}{A_p \omega}$$

Observação 6.1 Se o fluxo não for perpendicular à superfície, isto é ter em relação ao vetor normal da superfície um ângulo $\theta \neq 0$, a luminância

Capítulo 6
Iluminação

Uma imagem planar (bidimensional) pode ser modelada como uma função f que depende de duas variáveis (duas coordenadas u e v). Para a percepção visual, é suficiente que a função seja uma função de luminância/brilância. Se a luminância/brilância em cada ponto for próxima à luminância/brilância que a superfície emite na realidade, a imagem produzirá um efeito visual próximo o de uma foto obtida por uma câmara fotográfica. Portanto, entender o processo físico de propagação da luz emitida por fontes de luz é essencial para gerar **imagens foto-realísticas**.

A luz é um conjunto de radiações capazes de impressionar o olho humano. O estudo da luz pode ser dividido em três partes:

- 1. óptica geométrica: estuda as consequências do princípio de propagação rectilínea dos raios luminosos;
- 2. óptica energética: estuda o comportamento radiante dos raios luminosos e sua interação com a matéria.
- 3. óptica física: estuda a dispersão, a interferência, a difracção e a polarização da luz.

Na seção 6.1 sintetizamos alguns principais conceitos físicos relacionados com a luz.

Veremos que as interações entre os raios luminosos e os objectos de interesse é um processo complexo. Em Computação Gráfica, denominamos como um **modelo de iluminação** o procedimento que nos permite determinar/aproximar a **luminância/brilância** de um ponto que devemos perceber na realidade sob o efeito de uma ou mais fontes de luz (seção 6.2). O modelo de iluminação que considera a interacção de um feixe luminoso com

será dada por

$$I = \frac{\Phi}{A_p \cos \theta \omega} \quad (6.1)$$

(Ver Fig. 16.40 do livro-texto de Foley.)

Observação 6.2 A Fotometria trata do estudo das grandezas relativas à emissão e à recepção de **radiações luminosas (visíveis)** e da medição dessas grandezas. A Radiometria, por sua vez, trata do estudo das radiações visíveis ou não. Neste caso, o qualitativo “luminoso” é trocado para “energético” ou “radiante”; a unidade energética como **watts (W)**, ou outra unidade usual de potência, é utilizada para medir o **fluxo radiante** no lugar de lumens; a intensidade radiante passa a ser medida por $\frac{W}{sr}$, onde sr é em esferorradianos; e a radiação por $\frac{W}{m^2}$.

Observação 6.3 Existem várias aproximações para ângulos sólidos ω .



Uma das mais conhecidas é considerar a razão da área esférica subentendida pelo ângulo sólido e o quadrado do raio:

$$d\omega = \frac{dA_p}{r_0^2} = \sin \phi d\phi d\theta,$$

onde A_p é a área projetada da superfície do objeto (contida no ângulo sólido) sobre um plano numa determinada direção, r_0 é a distância do objeto em relação ao plano e ϕ e θ as coordenadas polares. Por exemplo, o ângulo sólido de uma esfera é 4π .

(Ver Fig. 16.39 do livro-texto de Foley.)

Exercício 6.1 Considere uma fonte luminosa esférica emitindo uma intensidade luminosa constante em todas as direções totalizando $I = 100$ candelas. Qual é o fluxo luminoso total que ela emite?

Exercício 6.2 O fluxo total emitido por uma fonte luminosa de intensidade constante em todas as direções e sentidos é 628 lumens. Qual é a intensidade luminosa da fonte?

Exercício 6.3 Qual é o ângulo sólido de uma semi-esfera?

As propriedades elétricas do meio por onde a luz passa afetam a trajetória de propagação da luz. O campo magnético da onda afeta os elétrons no material e produz diferentes efeitos ópticos. De acordo com o movimento dos elétrons, distinguem-se duas classes de materiais:

1. **dielétricos**: os elétrons são bastante estáveis; portanto, afeta muito pouco a direção de propagação e desaccelera a velocidade de propagação da onda e
2. **condutores**: há muitos elétrons livres; portanto, novas ondas eletromagnéticas podem ser geradas e emitidas.

Os **índices de refração** e de **absorção** são utilizados para caracterizar as propriedades ópticas dos meios. O **índice de refração absoluto** de um meio é a razão entre a velocidade de propagação da luz no vácuo e a velocidade de propagação da luz no meio considerado.

Exercício 6.4 Uma dada radiação se propaga num meio de índice de refração igual a 1.5. Qual é a velocidade de propagação da radiação neste meio?

A mudança dos meios de propagação da luz provoca fenômenos conhecidos como **reflexão** e **refração** na superfície de separação S dos dois meios. O comportamento da onda em cada ponto P segue as leis de Descartes-Snell:

Reflexão : os raios incidente, refletido e o vetor normal de S em P estão no mesmo plano e o ângulo de incidência θ_i e o ângulo de reflexão θ_r são iguais.

Refração : os raios incidente, refratado e o vetor normal de S em P estão no mesmo plano e $n_i \sin \theta_i = n_r \sin \theta_r$, onde θ_i é o ângulo de refração e n_i e n_r os respectivos índices de refração.

Exercício 6.5 Se um raio luminoso incide com um ângulo de 45° na face superior de um cubo de vidro, cujo índice de refração é $\sqrt{2}$, qual será o ângulo de emergência do raio se o cubo estiver imerso no ar ($n \approx 1.0$)? e num meio cujo índice de refração é $n = 1.2$?

Exercício 6.6 Um raio de luz monocromática ao se refletar forma um ângulo de incidência cujo seno é 0.60 e um ângulo de refração igual a 30° . Qual é o índice de refração do meio que contém o raio refratado em relação ao meio que contém o raio incidente?

A relação entre as energias dos raios incidentes Φ_i , refletidos Φ_r e refratados Φ_t obedece o princípio da conservação da energia, isto é

$$\Phi_i = \Phi_r + \Phi_t.$$

Observação 6.4 Quanto maior for o fator de absorção de um objeto, maior será o fluxo radiante emitido por ele.

As relações $F_r = \frac{\Phi_r}{A_r}$ e $F_t = \frac{\Phi_t}{A_t}$ dependem dos índices de refração dos meios, da polarização da luz incidente e do ângulo de incidência. Estas relações para superfícies de separação “idealmente polidas” são estabelecidas pelas equações de Fresnel. F_r e F_t são conhecidas, respectivamente, como **refletância de Fresnel** e **transmitância de Fresnel**.

Um importante resultado das equações de Fresnel é a **lei de reciprocidade** que garante que as relações de reflexão e refração são independentes da direção de propagação da luz.

Os fluxos refletidos e refratados podem ser ainda decompostos em duas partes: a parte **coerente** e a parte **incoerente** ou **difusa**. A parte coerente corresponde à incidência de fluxos coerentemente orientados e a parte incoerente corresponde à incidência incoerente de fluxos em relação à superfície (de separação de dois meios). É de se esperar que a luminância de superfícies bem polidas seja predominantemente coerente.

O comportamento incoerente dos raios luminosos é o que ocorre na maioria dos fenômenos observados na natureza. As superfícies de separação de dois meios nunca são perfeitamente polidas. O comportamento difuso de raios luminosos é, entretanto, muito complexo para ser modelado e analisado.

(Ver Fig. 16.42 do livro-texto de Foley.)

Exercício 6.7 Dadas duas superfícies cuja única diferença entre elas reside no polimento. Qual das duas possui maior fator de absorção? Qual delas emite mais radiações?

A **iluminância** (ou **aclaramento**) i (em lux ou lumen/m^2) de uma superfície é a razão entre o fluxo luminoso que sobre ela incide e a sua área. Segundo a **lei de Lambert**, a iluminância produzida numa superfície é expressa por

$$i = \frac{I \cos \theta}{d^2},$$

onde θ é o ângulo de incidência e d é a distância da superfície a fonte.

Exercício 6.8 Duas fontes de intensidade constante em todas as direções ($I_1 = 100$ *candélas* e $I_2 = 25$ *candélas*) se encontram a 6 m uma da outra. Em que posição, entre elas, devemos colocar um anteparo para que seja igualmente iluminado dos dois lados?

Exercício 6.9 Uma lâmpada de 90 *candélas* está a 3 m acima de um piso. Uma outra, de 630 *candélas*, também se encontra a 3 m do mesmo piso. O iluminamento no ponto A do piso, equidistante das duas lâmpadas, é 11,0 lux. Qual é a distância entre as duas lâmpadas?

Finalmente, a **emissão luminosa** (ou **radiação luminosa**) de uma fonte é a razão entre o fluxo luminoso que ela emite e a área da sua superfície.

Observação 6.5 Os raios de um feixe luminoso são independentes. Quando eles se cruzam os efeitos se sobrepõem.

6.2 Modelos de Fontes de Luz

Em Computação Gráfica as fontes de luz são tratadas de forma diferenciada dos objetos geométricos. Os objetos não são capazes de produzir fluxos luminosos, enquanto as fontes são emissores de raios.

Uma fonte de luz pode ser classificada em:

distante : a energia luminosa flui uniformemente no espaço numa direção específica. Neste caso, o fluxo luminoso/iluminância irradiado por ela é constante.

pontual : (ou fonte puntiforme) distribui radialmente o fluxo luminoso/iluminância que atema à medida que se afasta da fonte através de um **fator de atenuação** f_{at} . As duas expressões mais usuais para computar este fator em função da distância d são

$$\begin{aligned} \bullet f_{at} &= \frac{1}{d^2}, \text{ e} \\ \bullet f_{at} &= \min\left(\frac{1}{c_1 + c_2 d + c_3 d^2}, 1\right). \end{aligned}$$

spot : simula um feixe cônico ou pencil de raios luminosos apontado para uma direção específica d com a abertura γ . O controle do decaimento da luminância I é através do **expoente da fonte spot** c

$$I \cos^c \theta \quad \theta \in [0, \gamma].$$

Como a fonte pontual, a luminância pode ser atenuada à medida que aumenta a distância do objeto em relação à fonte através de um fator de atenuação.

(Ver Figs. 16.13 – 16.16 do livro-texto de Foley)

extensa : (ou distribuída) simula uma área de luminância. Este tipo de fonte pode gerar efeitos de penumbras ao interagir com um objeto.

(Ver Figs. 16.48 e 16.49 do livro-texto de Foley)

6.3 Modelos de Iluminação Local

De acordo com o modelo físico da propagação de um feixe luminoso, a luminância/brilhança em um ponto da superfície pode ser determinado com uso da lei de Descartes-Snell e equações de Fresnel. Como a lei de Descartes-Snell depende da direção do vetor normal à superfície, a complexidade da função de luminância/brilhança $f(u, v)$ cresce com o grau de rugosidade de uma superfície. Além disso, quando aumenta a rugosidade, os raios de um feixe luminoso podem ser bloqueados pela própria superfície, reduzindo o fluxo luminoso por área. Embora possamos encontrar na literatura propostas para modelar a rugosidade da superfície e os coeficientes de Fresnel, elas são pouco aplicadas em Computação Gráfica quando analisadas sob o ponto de vista do compromisso entre a complexidade e a qualidade da imagem produzida.

(Ver Figs. 16.41, 16.43, 16.44 e 16.46 do livro-texto de Foley.)

Como os objetos considerados em Computação Gráfica tem uma iluminação predominantemente incoerente, uma forma para modelar a luminância/brilhança é decompor a parte incoerente do raio incidente i em três componentes: ambiente ($I_{a,i}$), difusa ($I_{d,i}$) e especular ($I_{s,i}$). Assim, a luminância/brilhança I em cada ponto $[x, y, z]^T$ é obtida por

$$I = k_a \sum_i I_{a,i} + k_d \sum_i I_{d,i} (\vec{N} \cdot \vec{L}_i) + k_s \sum_i I_{s,i} f_s(\vec{V}, \vec{L}_i, \vec{N}), \quad k_a, k_s, k_d \in [0, 1] \quad (6.2)$$

onde $\vec{N}$, $\vec{L}_i$ e $\vec{V}$ são, respectivamente, a direção do vetor normal, do raio incidente i e do observador em relação ao ponto da superfície. Os coeficientes k_a , k_d e k_s são denominados **coeficiente de reflexão** (dos raios do) **ambiente**, **coeficiente de reflexão difusa** e **coeficiente de reflexão especular** do material. Estes coeficientes emulam os coeficientes de Fresnel, definido a percentagem dos raios incidentes que são refletidos.

(Ver Figs. 16.3 – 16.5 do livro-texto de Foley)

Observação 6.6 A componente $I_{d,i}(\vec{N} \cdot \vec{L}) = I_d \cos \theta$, onde θ é o ângulo de incidência, é a **iluminância no ponto segundo a Lei de Lambert** sem o fator de atenuação $\frac{1}{d^2}$.

(Ver Figs. 16.2 do livro-texto de Foley.)

A distinção de raios luminosos em três partes decorre do fato de que em Computação Gráfica somente os objetos capazes de irradiar energia luminosa independentemente das condições luminosas do ambiente são considerados fontes de luz (seção 6.2). A reflexão e a refração destes objetos são normalmente ignoradas. Isso nos leva a distinguir os raios incidentes em dois grupos: raios oriundos diretamente das fontes luminosas (I_d e I_s) e raios provenientes dos outros objetos. A distinção em I_d e I_s é para diferenciar comportamentos de um raio em relação à superfície de separação de diferentes meios: I_d é a parcela idealmente difusa (fluxo refletido é igual em todas as direções) e I_s é a parcela do fluxo refletido na direção do observador.

(Ver Figs. 16.8 do livro-texto de Foley.)

O fator de atenuação f_s é outro parâmetro empírico para atenuar o fluxo especular refletido $\vec{R}$ à medida que este se afasta da direção do observador $\vec{V}$. Entre as equações propostas para calcular este parâmetro, citamos:

Romney: $f_s = \frac{(\vec{N} \cdot \vec{V})^2}{d^2}$.

Phong: $f_s = (\vec{V} \cdot \vec{R})^n$,
sendo $\vec{R} = 2\vec{N}(\vec{N} \cdot \vec{L}) - \vec{L}$.

(Ver Figs. 16.9 do livro-texto de Foley.)

Blinn: $f_s = (\vec{V} \cdot \vec{H})^n$,
com $n = -\frac{\ln(2)}{\ln(\vec{N} \cdot \vec{H})}$ e $\vec{H}$ o bissetor dos vetores $\vec{L}$ e $\vec{V}$.

(Ver Figs. 16.12 do livro-texto de Foley.)

O escalar n é chamado **expoente de reflexão especular**.

Exercício 6.10 Derive a expressão $\vec{R} = 2\vec{N}(\vec{N} \cdot \vec{L}) - \vec{L}$, utilizando as relações geométricas entre os vetores $\vec{N}$, $\vec{L}$ e $\vec{R}$.

O modelo de iluminação local mais popular para determinar a intensidade luminosa de objetos refletores não-perfeitos como maçãs é o de Phong

$$I = k_a \sum_i I_{a,i} + f_{ad} \sum_i I_i \{k_d(\vec{N} \cdot \vec{L}_i) + k_s(\vec{R}_i \cdot \vec{V})\}, \quad k_a, k_s, k_d \in [0, 1]. \quad (6.3)$$

Observação 6.7 Se a fonte de luz for uma fontes distante, o termo $\vec{N}\vec{L}$ é constante.

Exercício 6.11 Seja um ponto $P = [2\ 4\ 0]^t$ de uma superfície cujo vetor normal naquele ponto é $\vec{n} = [\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{2}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}]^t$. Considere ainda que há uma fonte puntiforme situada em $F = [4\ 5\ 3]^t$ com uma intensidade igual a 100 unidades em todas as direções. Utilize o modelo de Phong para determinar a intensidade percebida por um observador localizado em $O = [5\ 5\ 0.5]^t$ para o caso de

1. a superfície ser uma superfície lambertiana “perfeita”.
2. a superfície ser um refletor não perfeito com pontos de brilho de grande extensão.
3. a superfície ser um refletor não perfeito com pontos de brilho de extensão bem limitada.

Exercício 6.12 Se o meio de propagação no Exercício 6.11 tiver um fator de atenuação $f_{at} = \frac{1}{d^2}$, qual seria a intensidade percebida pelo observador em cada um dos casos?

Um outro modelo alternativo, apropriado para casos em que ambos o observador e a fonte serem distantes, é substituir o termo $(\vec{R} \cdot \vec{V})$ por $(\vec{N} \cdot \vec{H})$

$$I = k_a \sum_i I_{a,i} + f_{at} \sum_i I_i [k_d (\vec{N} \cdot \vec{L}_i) + k_s (\vec{N} \cdot \vec{H})], \quad k_a, k_s, k_d \in [0, 1]. \quad (6.4)$$

Exercício 6.13 Mostre que α e β da Figura 16.12 do livro-texto de Foley guarda a relação $\alpha = 2\beta$ quando todos os vetores da Figura forem coplanares. Essa igualdade vale também para casos em que os vetores emoldados não serem coplanares?

Exercício 6.14 Por que o modelo expresso pela Eq. 6.4 é considerado mais eficiente nos casos em que ambos o observador e a fonte estiverem muito distantes da superfície de interesse?

Observação 6.8 Tanto os coeficientes de reflexão quanto o expoente de reflexão são valores empíricos. Infelizmente, não há ainda nenhum procedimento que nos ajude na escolha dos valores destes parâmetros para obter um efeito visual específico. Uma regra muito utilizada é:

- $k_a \approx k_d$.

- $k_d + k_s = 1$.

Um outro paradigma para computar a luminosidade/brilância seria, ao invés da análise do comportamento ondulatório, utilizar o princípio de equilíbrio de energia

$$\phi_k = \phi_{E,k} + \rho \phi_{H,k} = \phi_{E,k} + \rho \phi_k F_{k,k} + \sum_{j \neq k} \rho \phi_j F_{j,k} \quad (6.5)$$

isto é, o fluxo ϕ_k (radiosidade) emitido pela superfície k é igual à soma do fluxo $\phi_{E,k}$ irradiado (se a superfície k não for uma fonte luminosa, $\phi_{E,k} = 0$) e o fluxo $\phi_{H,k}$ refletido pela superfície. O fluxo refletido é, por sua vez, uma percentagem $F_{j,k}$ dos fluxos emitidos pelas superfícies j do ambiente. O parâmetro $F_{j,k}$ é conhecido como **fator de forma** entre as áreas A_j e A_k . (Ver Figs. 16.65 e 16.66 do livro-texto de Foley.)

Para simplificar as expressões algébricas, o “ambiente envolvente” de cada elemento irradiador é aproximado por uma **semi-esfera** ou um **semi-cubo**. Quando a aproximação é por uma semi-esfera de raio r , o fluxo luminoso é

$$\phi = I \int d\phi = I \int_w \cos \phi d\omega = I \int_{\phi} \int_{\theta} \cos \phi \sin \phi d\phi d\theta = I\pi \quad (6.6)$$

e o fator de forma

$$F_{j,k} = \frac{1}{A_j} \int_{\Omega_j} \int_{\Omega_k} \frac{\cos \phi_j \cos \phi_k}{\pi^2} dA_k dA_j.$$

A aproximação do envolvente mais popular é, entretanto, semi-cubo. Nesta aproximação, considera-se que cada retângulo de superfície irradiador dA_j é envolvido por um semi-cubo centrado nele com o vetor normal $\vec{N}_j$ passando pelo baricentro da face superior do semi-cubo. O fator de forma dos pares formados por dA_j e cada célula p do semi-cubo fica reduzido em

$$\Delta F_{dA_j, dA_p} = \frac{\cos \theta_j \cos \theta_p}{\pi^2} \Delta A_j, \quad (6.7)$$

onde θ_p é o ângulo entre o vetor normal da célula p do semi-cubo e o vetor $\vec{r}$ de dA_j para p e θ_j é o ângulo entre o vetor normal de dA_j e $\vec{r}$. ΔA é a área de cada célula p .

(Ver Figs. 16.67 e 16.68 do livro-texto de Foley.)

Com esta aproximação, a expressão de fatores de forma para cada par F_{ij} , onde j denota uma célula de coordenadas $[x_p\ y_p\ 1]^t$ na face de topo do semi-cubo, é dada por

$$\Delta F_{dA_j, dA_p} = \frac{1}{\pi(x_p^2 + y_p^2 + 1)^2} \Delta A_j$$

e quando a célula j pertence a uma face de lado do semi-cubo, temos

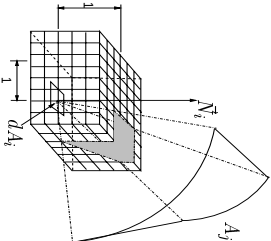
$$\Delta F_{dA, dA_j} = \frac{1}{\pi(l_p^2 + z_p^2 + 1)^2} \Delta A_j,$$

onde l_p pode ser x_p ou y_p , de acordo com o lado considerado.

Quando o objeto receptor de energia tem uma área projetada maior que a de uma célula, por exemplo $A = \sum A_j$, então o fator de forma é obtido como a somatória dos fatores de forma de cada célula

$$\sum \Delta F_{dA, dA_j} = \Delta F_{dA, A_j}.$$

Exercício 6.15 Supondo que o fator de forma seja $\Delta F_{dA, dA_j} = 0.03$, constante para cada célula do semi-cubo. Qual é o fator de forma F_{ij} entre os retâulos A_i e A_j ?



Observação 6.9 Para obter bons efeitos visuais, recomenda-se que os valores F_{jk} sejam escolhidos de tal forma que

- $\sum_k F_{jk} = 1$,
- $\phi_j F_{jk} = \phi_k F_{kj}$ e
- $F_{jj} = 0$ (semi-esfera e semi-cubo são superfícies convexas).

6.4 Modelos de Iluminação Global

Dois paradigmas são utilizados em Computação Gráfica para descrever as interações entre as superfícies e fontes de luz num ambiente:

Tragado de raio : a partir da posição do observador, um raio é propagado até a fonte de luz ou até um nível de propagação pré-estabelecido, obedecendo a lei de Descartes-Snell. A propagação do raio pode ser representado por uma árvore binária onde os nós denotam as superfícies encontradas e um dos ramos os raios refletidos e outro, raios refratados. Entendemos por um nível de propagação o percurso de um raio entre as superfícies de dois objetos. Este paradigma é conhecido como **dependente do observador**.

(Ver Figs. 16.54 e 16.55 do livro-texto de Foley.)

Radiosidade : montar um sistema de equações lineares (Eq. 6.5), para qual corresponde a um retaulo k de superfície da cena e solucionar o sistema por um método numérico, como o de iteração de Gauss-Seidel. Há, porém, técnicas iterativas computacionalmente mais eficientes e mais estáveis para obter a radiosidade ϕ_k de cada retaulo, cujos detalhes fogem do escopo desta disciplina. A partir de ϕ_k dos retâulos de superfície adjacências a um vértice, pode-se determinar por média aritmética a radiosidade do vértice. E, com uso da Eq. 6.1, chegase à luminância/brilhança em cada vértice ao fixarmos a direção de radiação. Como o procedimento utilizado para computar o fluxo luminoso irradiado por cada retaulo k não depende da posição do observador, este modelo de iluminação global é conhecido como **independente do observador**.

(Ver Fig. 16.64 do livro-texto de Foley.)

Exercício 6.16 Considerando que o fluxo total irradiado igualmente em todas as direções por uma superfície esférica centrada na origem seja 2.52×10^3 lumens, qual é a intensidade luminosa na direção $[1 \ 1 \ 1]^T$?

Uma das funções críticas na implementação de um modelo de iluminação global é a determinação de interseção entre um raio (direção de um raio luminoso ou direção do observador) e a superfície de interesse. Esforços têm sido feitos no sentido de desenvolver algoritmos de baixa complexidade:

com um plano arbitrário definido pelo vetor normal $\vec{n} = [x_n \ y_n \ z_n]^T$ e por um ponto $P_0 = [x_0 \ y_0 \ z_0]^T$ sobre o plano. Seja um raio na direção $\vec{d} = [x_d \ y_d \ z_d]^T$ que sai do ponto $P_s = [x_s \ y_s \ z_s]^T$. Então, o ponto $P(t_s) = P_s + t_s \vec{d}$ deve satisfazer

$$(P(t_s) - P_0) \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot (P_s + t_s \vec{d}) - \vec{n} \cdot P_0 = t_s \vec{n} \cdot \vec{d} - \vec{n} \cdot (P_s - P_0) = 0.$$

Segue-se que

$$t_* \vec{n}d = \vec{n}(P_s - P_0)$$

e

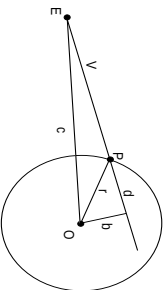
$$t_* = \frac{\vec{n}(P_s - P_0)}{\vec{n}d}.$$

Portanto, para $\vec{n}d \neq 0$ (raio não paralelo ao plano), o raio intersecta com o plano no ponto $P = P_s + t_* d$ quando $t_* > 0$.

com uma esfera de raio r centrado em O , então o ponto P da sua intersecção com um raio $P(t) = E + tV$ é

$$P = E + (v - d)V,$$

onde $v = \vec{EO}V$ e $d = \sqrt{r^2 - ((\vec{EO}\vec{EO}) - v^2)}$, se $r^2 - ((\vec{EO}\vec{EO}) - v^2) > 0$.



com uma superfície implícita em forma de $f(x, y, z) = 0$. Neste caso, determinam-se as raízes da equação $f(x_s + tx_d, y_s + ty_d, z_s + tz_d) = 0$.

Exercício 6.17 Determine a intersecção de um raio $P(t) = P_s + t\vec{d}$ com um plano xy .

Exercício 6.18 Determine a intersecção de um raio $P(t) = P_s + t\vec{d}$ com um triângulo sobre o plano xz .

Exercício 6.19 Verifique se o raio

$$P(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

intersecta com um plano definido pelo ponto $P_0 = [1 \ 1 \ 0]^T$ e o vetor normal $\vec{n} = [1 \ 1 \ 2]^T$.

Exercício 6.20 Determine a intersecção entre uma esfera de raio 8 centrado em $P = [2 \ 4 \ 1]^T$ e o raio

$$P(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

6.5 Tonalização

Sendo o processo de determinação de brilhância um processo complexo, é comum em Computação Gráfica determinar a brilhância com uso da Eq. 6.2 ou da Eq. 6.5 somente em alguns pontos (usualmente os vértices) e interpolar a brilhância para o resto dos pontos do objeto. Este tipo de interpolação é conhecido como **tonalização de Gouraud**.

(Ver Fig. 16.19 do livro-texto de Foley.)

Exercício 6.21 Exceto para facetas triangulares, o valor interpolado depende da ordem de interpolação, como ilustra a Fig. 16.20 do livro-texto de Foley. Por que para as facetas triangulares, duas interpolações lineares sucessivas resultam sempre no mesmo valor, independentemente da sequência da interpolação?

Observação 6.10 Um dos problemas de tonalização de Gouraud é perda de pontos de brilho no meio de uma superfície. Para evitar isso, recomenda-se aumentar o número de vértices na malha que a representa.
(Ver Fig. 16.21 do livro-texto de Foley.)

Um segundo tipo de interpolação utilizada é a interpolação dos vetores normais de alguns pontos escolhidos e determinar a brilhância do resto dos pontos com uso destes vetores normais. Chamamos este tipo de interpolação **tonalização de Phong**.

(Ver Fig. 16.20 do livro-texto de Foley.)

Observação 6.11 A tonalização de Phong pode falhar quando a superfície não é suave, com discontinuidades nos vetores normais.
(Ver Fig. 16.24 do livro-texto de Foley.)

6.6 Espectro de Fourier

A associação de um ponto (u, v) numa imagem confina com um valor de luminosidade/brilhância é, de fato, uma função $f(u, v)$ que pode ser tratada

como um sinal contínuo bidimensional, definido sobre duas variáveis. Como para processamento de imagens é razoável supor que as condições de existência da integral de Fourier para $f(u, v)$ sempre são satisfeitas, $f(u, v)$ pode ser rescrita em uma integral de Fourier em forma complexa. Associada a esta integral temos uma transformada de Fourier $F(s, t)$ definida no domínio de frequências s e t .

Observação 6.12 *A integral de Fourier pode conter componentes de altíssimas frequências, quando há variações abruptas de luminosidade/brilho na imagem (descontinuidades ao longo das arestas).*

Veremos nos Capítulos 7 e 9 que a representação no domínio de frequência não só facilita certas operações relacionadas com o processamento de imagens como também permite definir um procedimento de amostragem mais apropriada para obter uma imagem discreta mais fiel possível da imagem original de forma a permitir uma boa reprodução por um dispositivo gráfico de saída.