5. a largura da imagem e
6. a altura da imagem.

(Ver Fig. 6.35 do livro-texto de Foley.)

Um modelo mais genérico que permite especificar tanto as projeções paralelas como as perspectivas envolve 7 parâmetros:

1. a origem do sistema de referência (VRP),
2. o vetor normal do plano de projeção (VPN),
3. o sentido da imagem (VUP),
4. ponto de referência para projeção (PRP) ou a posição da câmera,
5. o intervalo de coordenadas (u_{min}, u_{max}) no eixo horizontal da imagem,
6. o intervalo de coordenadas (v_{min}, v_{max}) no eixo vertical da imagem,
7. tipo de projeção e

   (Ver Figs. 6.14–6.16 e 6.26 do livro-texto do Foley.)
8. (opcional) a distância do plano frontal F e do plano traseiro B em relação ao plano de projeção.

   (Ver Fig. 6.21 do livro-texto de Foley.)

Observação 5.5 *No terceiro modelo, a direção de PRP para o centro da imagem CW é denominada* **direção de projeção** *DOP.*
(Ver Figs. 6.17–6.20 do livro-texto de Foley.)

5.4 Transformações Perspectivas

O procedimento que utilizamos para derivar Eqs. 5.1 e 5.3 é puramente analítico, fazendo uso das propriedades de triângulos semelhantes. Há, porém, um outro algoritmo de determinação de transformação de projeção mais eficiente que permite eliminar os objetos fora do volume de visão antes da operação de projeção. O princípio básico deste segundo algoritmo é deformar o volume de visão num paralelepípedo com as arestas paralelas ao

eixo óptico (eixo n) antes de aplicar uma projeção paralela ortogonal (zerar a coordenada n de cada ponto) com uso da transformação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

À sequência de transformações (lineares) do volume de visão no espaço projetivo chamamos **transformações perspectivas**.

Nesta seção mostramos, passo a passo, a derivação destas transformações perspectivas para raios projetores paralelos e perspectivos a partir do (terceiro) modelo de câmera genérico dado na seção 5.3.

5.4.1 Especificação de Volumes de Visão Normalizados

Aqui vamos apresentar uma forma (entre várias outras!) para especificar o volume de visão normalizado ou o **volume canônico**. É usual considerar que o volume de visão tem um sistema de coordenadas próprio associado. Para projeções paralelas, os planos que delimitam o volume de visão são:

$$x = -1\ ;\ \ x = 1\ ;\ \ y = 1\ ;\ \ y = 1\ ;\ \ z = 0\ ;\ \ z = -1 \tag{5.4}$$

e para projeções perspectivas,

$$x = z\ ;\ \ x = -z\ ;\ \ y = z\ ;\ \ y = -z\ ;\ \ z = -z_{min}\ ;\ \ z = -1 \tag{5.5}$$

com o **eixo óptico** coincidente com o eixo z e perpendicular ao plano de projeção.

5.4.2 Transformação em Volume Canônico

Procuraremos primeiro transformar o sistema de referência do mundo (WC) em sistema de referência de câmera (VRC), de tal forma que as coordenadas dos objetos possam ser dados em relação a VRC. Para isso, precisaremos deslocar a origem do sistema de coordenadas do WC para a origem do sistema de coordenadas VRC que está localizado no VRP, ou seja fazer uma translação:

$$T(-VRP) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -VRP_x \\ 0 & 1 & 0 & -VRP_y \\ 0 & 0 & 1 & -VRP_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

seguida de uma rotação de tal forma que os eixos dos dois sistemas se coincidam:

$$R = \begin{bmatrix} R1_x & R1_y & R1_z & 0 \\ R2_x & R2_y & R2_z & 0 \\ R3_x & R3_y & R3_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{onde}$$

$$R3 = \frac{VPN}{\|VPN\|};\ R1 = \frac{VUP \times R3}{\|VUP \times R3\|} \text{ e } R2 = R3 \times R1.$$

Aplicando essas transformações sobre os pontos P dos objetos obteremos as coordenadas dos pontos P' em VRC:

$$P' = R \cdot T(-VRP) \cdot P.$$

No sistema VRC o eixo n é coincidente com o vetor normal VPN do plano de projeção.

Agora, dependendo do tipo de projeção, aplicaremos distintas transformações para obter as coordenadas dos objetos normalizadas em relação ao volume canônico definido pela Eq. 5.4 ou pela Eq. 5.5.

Paralela: Se o eixo óptico não for paralelo ao VPN, as coordenadas dos objetos deverão ser "cisalhados" em relação ao eixo n. O deslocamento relativo segue a seguinte proporção:

$$\frac{\Delta x}{z} = \frac{dop_x}{-dop_z} \text{ e}$$
$$\frac{\Delta y}{z} = \frac{dop_y}{-dop_z},$$

onde $dop = CW - PRP$ (Consideramos neste caso que PRP é dado em VRC).

Em representação matricial teremos:

$$SH = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{dop_x}{dop_z} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{dop_y}{dop_z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Após esta transformação garantimos que os raios de projeção sobre os objetos são paralelos em relação ao eixo n. Precisaremos somente deslocar a origem do sistema VRC para o centro da janela (T_{par}

$=$ T($-\frac{u_{max}+u_{min}}{2}$,$-\frac{v_{max}+v_{min}}{2}$,-F)) e normalizar os pontos dos objetos geométricos em função do volume canônico. A normalização corresponde à mudança de escala do volume de visão em relação ao volume canônico:

$$S_{par} = S(\frac{2}{u_{max} - u_{min}}, \frac{2}{v_{max} - v_{min}}, \frac{1}{F - B})$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{u_{max}-u_{min}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{v_{max}-v_{min}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{F-B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Concatenando as matrizes de transformação teremos uma única matriz 4×4

$$N_{par} = S_{par} \cdot T_{par} \cdot SH \cdot R \cdot T(-VRP)$$

para normalizar as coordenadas dos objetos em relação ao volume canônico.

(Ver Fig. 6.47 do livro-texto de Foley.)

Perspectiva: Como consideramos na especificação que a origem do VRC está sobre VRP e que o volume de visão canônico piramidal tem o seu ápice posicionado sobre a origem do VRC, deveremos aplicar então um deslocamento:

$$T(-PRP'), \text{onde}$$

$PRP' = R \cdot T(-VRP) \cdot PRP$, no sistema de referência.

Se o eixo óptico não coincidir com o VPN será necessário aplicar um deslocamento relativo, como em projeções paralelas, para que os raios que incidem sobre os objetos fiquem paralelos ao eixo n.

Depois precisaremos mudar a escala das coordenadas u e v, de tal forma que os módulos delas sejam iguais ao módulo da coordenada n (Eq. 5.5). As escalas f_u e f_v serão tais que:

$$f_u \frac{u_{max}-u_{min}}{2} = -VRP'_z \text{ e } f_v \frac{v_{max}-v_{min}}{2} = -VRP'_z$$

com $n = VRP'$ ($VRP' < 0$). Note que VRP' em VRC corresponde a VRP em WC ($VRP' = SH \cdot T(-PRP') \cdot R \cdot T(-VRP)VRP$) e que após a transformação de deslocamento relativo, o eixo óptico passa ortogonalmente pelo centro da imagem (CW) em VRC.

Precisaremos ainda mudar a escala das coordenadas para que elas sejam normalizadas em relação ao volume definido pela Eq. 5.5, ou seja $n = (VRP_z' + B)$ deve ser reduzido a $n = -1$. Como, após a transformação anterior, os módulos das coordenadas u e v passam a ser iguais ao módulo da coordenada n para cada ponto, as três coordenadas estarão sujeitas ao mesmo fator de escala ($\frac{-1}{(VRP'+B)}$, isto é

$$S = S\left(-\frac{1}{(VRP_z'+B)}, -\frac{1}{(VRP_z'+B)}, -\frac{1}{(VRP_z'+B)}\right)$$

Concatenando com a transformação anterior teremos uma matriz:

$$S_{per} = \begin{bmatrix} \frac{2VRP_z'}{(u_{max}-u_{min})(VRP_z'+B)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2VRP_z'}{(v_{max}-v_{min})(VRP_z'+B)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{(VRP_z'+B)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Ver Fig. 6.54 do livro-texto de Foley.)

Uma vez obtido o volume canônico precisaremos ainda aplicar uma transformação perspectiva para transformar o volume piramidal em um paralelepípedo dado pela Eq. 5.4 para reduzir o problema de projeção perspectiva num problema de projeção paralela. Neste caso, será necessário "deformar"os objetos de acordo com a sua distância em relação à posição da câmera (origem do sistema VRC transformado). O fator de deformação é $\frac{1}{-n}$ (observe que $z < 0$):

$$u' = -\frac{u}{n} \text{ e } v' = -\frac{v}{n}.$$

Em representação matricial,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Depois, para finalizar a transformação de normalização, precisaremos "reajustar"o volume para que ele tenha a profundidade igual a 1, ao invés de $1 + n_{min}$, através da transformação:

$$S(1, 1, \frac{1}{(1+n_{min})})$$

e deslocar o plano frontal transformado $n'_{min} = \frac{n_{min}}{(1+n_{min})}$ para $n = 0$ com o deslocamento:

$$T(0, 0, -\frac{n_{min}}{(1+n_{min})})$$

Concatenando as três últimas matrizes de transformação, chegamos a

$$P_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1+n_{min})} & -\frac{n_{min}}{(1+n_{min})} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Ver Fig. 6.56 do livro-texto de Foley.)

Resumindo, para projeções perspectivas poderemos utilizar a matriz

$$N_{per} = P_{per} \cdot S_{per} \cdot SH \cdot T(-PRP') \cdot R \cdot T(-VRP)$$

para o processo de normalização do volume de visualização perspectivo.

(Ver Fig. 6.51 do livro-texto de Foley.)

Exemplo 5.2 *Vamos apresentar um programa para mostrar os efeitos de cada passo da transformação de normalização sobre o objeto geométrico:*

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Diferentemente do livro de Foley, foi adotada a convenção do OpenGL para especificar o plano limitante frontal e o plano limitante traseiro. F e B designam, respectivamente, a coordenada n no sistema de referência $VRC\prime$, no qual o ponto PRP coincide com a origem e o eixo óptico com o eixo n.

Exercício 5.1 *Dados os vértices de uma pirâmide:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e os parâmetros da câmera:

VRP (WC) = ($\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ -4 1)
VUP (WC) = (0 1 0 1)
VPN (WC) = (1 0 1 1)
PRP (WC) = (2 0 2 1)
Imagem (VRC) = (-2,2,-4,2)
B (VRC) = -10
F (VRC) = 0
tipo de projeção: PARALELA.

Desenvolva, passo a passo, a transformação de projeção. Qual é a matriz de transformação?

Exercício 5.2 *Resolva o Exercício 5.1 substituindo o tipo de projeção paralelo para perspectivo.*

5.5 Calibração de Câmera

Calibrar os parâmetros de uma câmera é um dos velhos problemas de Visão Robótica. Entendemos aqui por **calibração de câmera** a determinação dos parâmetros do primeiro modelo de câmera dado na seção 5.3 a partir dos n pontos $[x_i\ y_i]^t$ da imagem e os seus correspondentes $[X_i\ Y_i\ Z_i]^t$ em $\Re^3$: a distância focal d, a posição da câmera $w_0 = [X_0\ Y_0\ Z_0]^t$, seus ângulos *pan* (θ) e *tilt* (ϕ) e a distância do plano da imagem em relação à posição da câmera $r = [r_1\ r_2\ r_3]^t$.

(Ver Fig. 2.17 do livro-texto de Gonzalez.)

Observação 5.6 *O modelo de câmera que consideramos agora tem a imagem invertida. Portanto, o sinal negativo é adicionado ao elemento $\frac{1}{d}$ da matriz na Eq. 5.2.*

Usando um procedimento análogo ao apresentado na seção 5.4, podemos obter a matriz de transformação perspectiva de cada ponto $[X\ Y\ Z]^t$ em