Exercício 4.6 *Dada uma curva de Bézier* $P(t) = \sum P_i B_i^n(t)$, $t \in [0, 1]$. *Mostre que* $TP(t) = \sum (TP_i) B_i^n(t)$, *onde* T *é uma transformação afim qualquer. Esboce a rotação de uma curva de Bézier definida pelos pontos de controle* $P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *e* $P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

O Jacobiano de uma transformação afim dada pelo Sistema 4.8 é dado por

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_r}{\partial x_v} & \frac{\partial x_r}{\partial y_v} & \frac{\partial x_r}{\partial z_v} \\ \frac{\partial y_r}{\partial x_v} & \frac{\partial y_r}{\partial y_v} & \frac{\partial y_r}{\partial z_v} \\ \frac{\partial z_r}{\partial x_v} & \frac{\partial z_r}{\partial y_v} & \frac{\partial z_r}{\partial z_v} \end{vmatrix}.$$

Se $J = 0$, a transformação não é inversível. Quando $J = 1$, a área é invariante sob a transformação.

Exercício 4.7 *Mostre que translação, rotação, mudança de escala e deslocamento relativo são inversíveis e que o deslocamento relativo não preserva a área.*

Exercício 4.8 *Obter a matriz de transformação de reflexão de um ponto em relação a um plano arbitrário definido por um ponto* $P = [x\ y\ z]^t$ *e um vetor normal* $\vec{n} = [n_x\ n_y\ n_z]^t$. *Aplique esta transformação sobre as coordenadas do seguinte objeto definido pelos vértices:*

$$\begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) & (8) & (9) & (10) \\ 1 & 3 & 3 & 2.5 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1.5 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e pelas seguintes faces

1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	*6*	*7*	*2*	
8	*10*	*3*	*2*	*7*
9	*5*	*4*	*10*	*8*
5	*9*	*6*	*1*	
9	*8*	*7*	*6*	

são "desenhadas"é chamada **quadro de visão** *(viewport). Se associarmos a cada um deles um sistema de referência, denominamos o procedimento, que mapeia os pontos de uma janela para um quadro, como transformação de window para viewport.*

Esta transformação pode ser obtida por meio de aplicações sucessivas das seguintes transformações básicas:

- *deslocamento da janela para a origem,*
- *transferir a janela para o sistema de coordenadas do quadro,*
- *aplicar a transformação de mudança de escala sobre as coordenadas da janela, para que ela fique de mesmo tamanho do quadro de saída, e*
- *desclocar a janela para o quadro.*

(Ver Figs. 5.12 e 5.13 do livro-texto de Foley.)

Exemplo 4.6 *Somente os pontos contidos no volume de visão normalizados são "imageados". Como os pontos numa cena são dados normalmente em coordenadas de WC e o volume de visão (definido por planos de corte, PRP e a janela de visão) é definido em coordenadas de VRC, precisa-se transformar os pontos da cena de interesse do sistema de WC para o sistema VRC. Esta transformação depende do tipo de projeção, como veremos no Capítulo 5. Para projeções paralelas, em que o volume de visão é um paralelepípedo, a matriz de transformação pode ser obtida com as seguintes operações:*

- *deslocar o ponto VRP à origem de WC,*
- *girar o sistema VRC de tal forma que o eixo n coincida com o eixo z de WC, v com o eixo y e u com o eixo x (considerando que o sistema VRC obedeça à regra da mão direita) e*
- *deslocar as coordenadas x e y dos raios de projeção em relação à coordenada z, de forma que eles fiquem paralelos ao eixo z.*

Exercício 4.9 *Obter a matriz de transformação para a base de referência para a qual a origem fique no ponto $P = [P_x\ P_y\ P_z\ 1]^t$, o eixo z coincida com a direção $\vec{d} = [d_x\ d_y\ d_z\ 0]^t$ e o plano yz contenha $\vec{d}$ e o vetor $VUP = [v_x\ v_y\ v_z\ 0]^t$. Considere $P = [4\ 3\ \ -3\ 1]^t$, $\vec{d} = [-5\ \ -1\ 2\ 0]^t$ e $VUP = [0\ 1\ 0\ 0]^t$.*

Exercício 4.10 *Qual é a transformação a ser aplicado no vetor normal de um plano se for aplicado nele uma transformação M? Verifique a direção normal do plano* $3x + 1.5y + 0.2z - 4.0 = 0$ *após uma rotação de 45º em torno da origem do sistema.*

4.3 Quatérnios e Rotações

Os quatérnios $q = a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3$ são definidos no espaço $\Re^4$ com a base canônica $\vec{1} = [1\ 0\ 0\ 0]^t$, $\vec{i} = [0\ 1\ 0\ 0]^t$, $\vec{j} = [0\ 0\ 1\ 0]^t$ e $\vec{k} = [0\ 0\ 0\ 1]^t$ e dotados de uma estrutura multiplicativa definida conforme o seguinte esquema:

	$\vec{1}$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{1}$	$\vec{1}$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{i}$	$-\vec{1}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$-\vec{1}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$-\vec{1}$

Dizemos que a_0 é a **parte real** ou **escalar** e $\vec{a} = ia_1 + ja_2 + ka_3$, a **parte pura** ou **vetorial**. Um quatérnio que tem a parte real nula é denominado **quatérnio puro**. Similar aos números complexos, o **conjugado** do quatérnio $a_0+\vec{a}$ é $\overline{q} = a_0 - \vec{a}$ e o quadrado da sua norma $|q|^2 = a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2$. O **inverso** multiplicativo é definido por $q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}$.

São definidas entre dois quatérnios $q_1 = a_0 + \vec{a}$ e $q_2 = b_0 + \vec{b}$ as operações

Adição : $q_1 + q_2 = (a_0 + b_0) + (\vec{a} + \vec{b})$, que pode ser expressa com uso de notação matricial é

$$\begin{bmatrix} a_0 + b_0 \\ a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Multiplicação : $q_r = q_1 q_2 = (a_0 + b_0 - (\vec{a}\cdot\vec{b})) + (a_0\vec{b} + b_0\vec{a} + \vec{a}\times\vec{b})$. Em notação matricial, temos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} q_{0,r} \\ q_{1,r} \\ q_{2,r} \\ q_{3,r} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -b_1 & b_0 & -b_3 & b_2 \\ -b_2 & b_3 & b_0 & -b_1 \\ -b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A primeira multiplicação é conhecida como **multiplicação esquerda** que corresponde a uma transromação linear $L_a(b)$ associando q_2 a q_1q_2 e a segunda, **multiplicação direita** $R_b(a)$ que mapeia q_1 a q_1q_2.

Análogo aos números complexos podemos representar geometricamente os quatérnios unitários sobre uma hiperesfera unitária em $\Re^4$. Se definirmos $\vec{I} = iu_1+ju_2+ku_3$ com $u_1^2+u_2^2+u_3^2 = 1$, podemos escrever q na forma $a_0+\mu\vec{I}$. Se adicionalmente $|q| = r$, então existe θ tal que $a_0 = rcos\theta$ e $\mu = rsen\theta$. Isso significa que podemos escrever q na forma polar $r(cos\theta+\vec{I}sen\theta) = re^{\vec{I}\theta}$, o que poderá simplificar as multiplicações entre os quatérnios.

É possível demonstrar que se representarmos cada ponto no espaço $\Re^3$ como um quatérnio puro $P = ix + jy + kz$, uma rotação $T(P)$ deste ponto de um ângulo igual a 2θ em torno de um vetor $\vec{I}$ que passa pela origem pode ser dada por

$$T(P) = aPa^{-1}, onde \;\; a = re^{\vec{I}\theta}, \; r > 0 \text{ e } \vec{I}^2 = -1.$$

Exemplo 4.7 *Derive, com uso de quatérnios, a rotação em torno do eixo z por um ângulo θ.*

Neste caso, $\vec{I} = k$ *e* $a = e^{\vec{I}\frac{\theta}{2}} = cos\frac{\theta}{2} + ksen\frac{\theta}{2}$, *cuja inversa é* $a = cos\frac{\theta}{2} - ksen\frac{\theta}{2}$. *Portanto,*

$$T(P) = (cos\frac{\theta}{2} + ksen\frac{\theta}{2})((ix + jy + kz)(cos\frac{\theta}{2} - ksen\frac{\theta}{2})).$$

Utilizando a notação matricial, temos

$$\begin{aligned}
T(P) &= \begin{bmatrix} cos\frac{\theta}{2} & 0 & 0 & -sen\frac{\theta}{2} \\ 0 & cos\frac{\theta}{2} & -sen\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & sen\frac{\theta}{2} & cos\frac{\theta}{2} & 0 \\ sen\frac{\theta}{2} & 0 & 0 & cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \cdot \\
&\quad \cdot(\begin{bmatrix} cos\frac{\theta}{2} & 0 & 0 & sen\frac{\theta}{2} \\ 0 & cos\frac{\theta}{2} & -sen\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & sen\frac{\theta}{2} & cos\frac{\theta}{2} & 0 \\ -sen\frac{\theta}{2} & 0 & 0 & cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sen\theta & 0 \\ 0 & sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}
\end{aligned}$$