Divisão : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$.

Exercício 2.15 *Repetir a multiplicação e a divisão dos números complexos dados no Exercício 2.14 usando suas formas polares e compare os resultados.*

Representando cada ponto $[x\ y]^t$ num plano como um número complexo $(x+iy)$, podemos então descrever transformações lineares do tipo $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ sobre $[x\ y]^t$ como o produto de dois números complexos

$$(a+ib)(x+iy) = (ax - by) + i(bx + ay).$$

Exercício 2.16 *É possível escrever em forma de números complexos o seguinte sistema de equações lineares?*

$$\begin{aligned} x_n &= x_v cos\theta - y_v sen\theta \\ y_n &= x_v sen\theta + y_v cos\theta \end{aligned}$$

Esboce a posição relativa entre os dois pontos $P_v = [x_v\ y_v]$ e $P_n = [x_n\ y_n]^t$ num plano. Qual foi a transformção aplicada em P_v para obter P_n?

2.6 Integral de Fourier

A função $f(x,y)$ contínua por parte, integrável e não-periódica correspondente a uma imagem pode ser representada por uma **integral de Fourier** em forma complexa. A partir desta integral obtém-se a **transformada de Fourier** $F(u,v)$ de $f(x,y)$

$$\mathcal{F}\{f(x,y)\} = F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-2\pi j(xu+yv)} dxdy \quad ,$$

onde $j = \sqrt{-1}$ e $\mathcal{F}$ denota o operador da transformada. A transformada inversa $\mathcal{F}^{-1}$ é, por sua vez,

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(u,v)\} = f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v) e^{2\pi j(xu+yv)} dudv \quad . \tag{2.4}$$

Eq.(2.4) nos permite interpretar $f(x,y)$ como a sobreposição de oscilações senoidais de todas as possíveis frequências com a amplitude $|F(u,v)|$ para o par de frequências (u,v). Portanto, ela é também conhecida como **representação espectral** de $f(x,y)$ e a integral de $|F(u,v)|^2$ da frequência a até a frequência b nos dá a **potência espectral** para este intervalo. A amplitude $|F(u,v)|$ é também conhecida como **espectro de Fourier**.

Observação 2.4 *Uma outra forma alternativa para definir o par de transformadas de Fourier de maneira que as formas direta e inversa tenham o mesmo "aspecto":*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(w)}{\sqrt{2\pi}} e^{jwt} dw \\ \tilde{F}(w) &= \frac{F(w)}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jwt} dt, \end{aligned}$$

onde $w = 2\pi f$ com f denotando a frequência.

Observação 2.5 *Algums transformadas as serem utilizadas nesta disciplina:*

- *Transformada de Fourie de uma função de pulso unitário $f(x) = 1$ para o intervalo $-b < x < b$ é $2b\frac{sen\ bu}{bu} = 2b = sinc(bu)$ (funcão sinc ou função de amostragem). Em termos de $\tilde{F}(u)$, temos $\frac{2}{\sqrt{2\pi}} sinc(bu) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} sinc(bu)$.*

- *Transformada de Fourie de $(f(x) = \frac{sen\ bx}{x}$, $b > 0$ é uma função de pulso de valor igual a π para o intervalo $-b < x < b$. Em termos de $\tilde{F}(u)$, a transformada é $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.*

Algumas propriedades da transformada de Fourier:

Linearidade : $\mathcal{F}\{(af + bg)\} = a\mathcal{F}\{f\} + b\mathcal{F}\{g\}$.

Deslocamento : $\mathcal{F}\{f(x-a, y-b)\} = \mathcal{F}\{f\} e^{-2\pi i(au+bv)}$.

Dualidade na convolução : $\mathcal{F}\{f * g)\} = \mathcal{F}\{f\}\mathcal{F}\{g\}$ ou $\mathcal{F}\{fg)\} = \mathcal{F}\{f\} * \mathcal{F}\{g\}$.

Escalonamento : Se $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(w)$, então $\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F(\frac{w}{a})$, w em radianos.

Simetria : Se $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(w)$, então $\mathcal{F}\{F(t)\} = 2\pi f(-w)$, w em radianos.

Observação 2.6 *Na terminologia da Teoria de Controle de Processos, a transformada $H(u,v)$ em $G(u,v) = H(u,v)F(u,v)$ é denominada* **função de transferência** *do processo. A função correspondente $h(x,y)$ caracteriza* *um sistema cuja função é produzir uma imagem de saída $g(x,y)$ a partir de uma imagem de entrada $f(x,y)$. Isso decorre do fato de que para uma função impulso unitário $f(x,y)$, a resposta do sistema é $G(u,v) = H(u,v)$ cuja inversa é $h(x,y)$.*

Exercício 2.17 *Determine a transformada de Fourier de $f(x)$.*

1. $f(x) = \begin{cases} k, \text{ para } x \in (0,a) \\ 0, \text{ casocontrário} \end{cases}$

2. $f(x) = e^{-ax^2}$, *para* $a > 0$

Esboce o espectro de frequência de $|F(u)| = |\mathcal{F}\{f(x)\}|$ no domínio de u. (Dicas:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{-ax^2}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-jwx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+jwx)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{a}x^2 + \frac{jwx}{2\sqrt{a}})^2 + (\frac{jwx}{2\sqrt{a}})^2} dx = ... \end{aligned} \tag{2.5}$$

Substituindo $(\sqrt{a}x^2 + \frac{jwx}{2\sqrt{a}})$ por v ... e sabendo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-v^2}}{\sqrt{a}} dv = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

é possível obter a solução ...)

2.7 Processamento de Amostras

Uma imagem discreta $M \times N$ pode ser tratada como uma sequência de MN velores X de luminância/brilhância de uma população constituída por uma imagem contínua. Esta interpretação é útil para aplicarmos métodos estatísticos no processamento e na análise das imagens.

A quantidade total de elementos de uma amostra é chamada **tamanho** da amostra e os atributos associados aos elementos, **valores** da amostra. Dados os valores de amostra $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$, a **frequência absoluta** $f(x)$ da ocorrência de um valor x da amostra é o número de ocorrência deste valor na amostra e a **frequência relativa** $\overline{f}(x)$, a relação entre a sua frequência absoluta e o tamanho da amostra.

A frequência relativa $\overline{f}(x_i)$ satisfaz a relação

$$0 \leq \overline{f}(x_i) \leq 1.$$