Lógica e Circuitos Lógicos

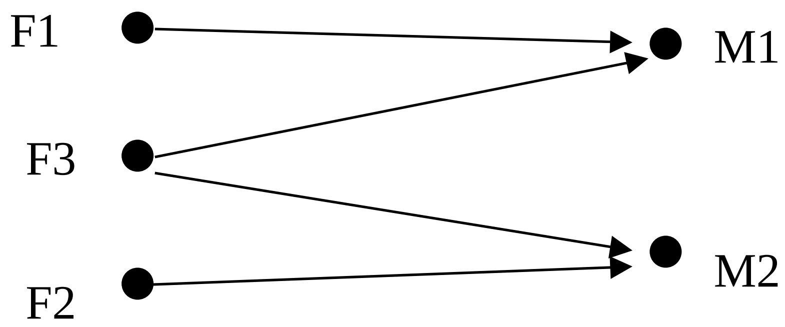
Rafael Santos Mendes

1. Dois Problemas

Consideremos os seguintes problemas:

P1: Uma fábrica tem dois tipos de máquinas (M1 e M2) e três grupos de funcionários para operá-las:

- F1 só opera máquinas do tipo M1
- F2 só opera máquinas do tipo M2
- F3 opera qualquer máquina



Os turnos de trabalho são tais que sempre há funcionários dos grupo F2 ou do grupo F3 trabalhando.

Num dado momento, sabe-se que há funcionários do grupo F1 trabalhando, mas não há nenhuma máquina do tipo M2 em operação. Pergunta-se:

Há algum funcionário do grupo F3 operando alguma máquina do tipo M1?

P2: Numa eleição para senador há 2 vagas e 3 candidatos (A, B e C).
“A” promete a construção de estradas;
“C” promete diminuição do desemprego.

Supondo-se que A é favorito e que o desemprego não vá diminuir, quais são as perspectivas para o candidato B e para os empreiteiros ?

O que há em comum entre os problemas P1 e P2 ?

Tentaremos mostrar que ambos tem estritamente a mesma **forma lógica.**

Algumas “tabelas-verdade”:

As variáveis P e Q representam proposições

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

interpretação: **ou**

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

interpretação: **se ... então ...**

Motivação:
Se <u>o tempo estiver bom</u> (**então**) <u>eu vou à praia</u>

(Supondo que o tempo não esteja bom, o que devo fazer?)

Modelo lógico para P1:

Vamos considerar as “variáveis” F1, F2 , F3, M1 e M2 que assumirão os seguintes valores:

“**0**” se nenhuma máquina ou funcionário do respectivo grupo estiver em ação;

“**1**” se alguma máquina ou funcionário do respectivo grupo estiver em ação.

As condições:

- F1 só opera máquinas do tipo M1
- F2 só opera máquinas do tipo M2
- F2 e F3 nunca estão simultaneamente ausentes

equivalem a:

$F1 \rightarrow M1$

$F2 \rightarrow M2$

$F2 \vee F3$

Além disso F1=1 e M2=0

Conclusão: T2=1 e E1=1

Modelo lógico para P2:

Variáveis:
A, B, C, CE, DD

$A \rightarrow CE$ $C \rightarrow DD$ $A=1$ $B \vee C$ $DD=0$	então	$B=1$ $CE=1$

ou seja, B será eleito e os empreiteiros terão trabalho

As soluções de ambos os problemas estão baseadas no fato lógico de que as fórmulas

$P \rightarrow Q$ $R \rightarrow S$ P $T \vee R$ $\neg S$	tem como con- sequência lógica:	T Q

2. Forma Lógica

Embora os problemas anteriores sejam de natureza diferente, constatamos que possuem a mesma **forma lógica.**

De uma maneira geral, a lógica se ocupa das relações de consequência entre as **premissas** e a **conclusão** de um **argumento correto**.

Um argumento é correto se sua conclusão segue das premissas.

Concluir que um conclusão segue das premissas transcende a compreensão do significado das premissas.

Observe-se que, em P2, embora a premissa $C \rightarrow DD$ seja questionável, o argumento está correto.

Outros exemplos de argumentos:

Todo homem é mortal;
Todos os gregos são homens;
Portanto todos os gregos são mortais.

Existem 136 caixas de laranjas no armazém;
Cada caixa contém no mínimo 140 laranjas;
Cada caixa contém no máximo 166 laranjas;
Portanto existem no armazém pelo menos 6 caixas com o mesmo número de laranjas.

O número de estrelas é par e maior que 4;
Portanto o número de estrelas é a soma de dois números primos.

É importante observar que a lógica não se ocupa da veracidade das premissas mas das consequências de as premissas serem verdadeiras ou falsas. Não interessa a veracidade das premissas mas **se** elas forem verdadeiras **então** as conclusões também são.

Num argumento correto, não pode acontecer de as premissas serem verdadeiras e as conclusões falsas. Todas as outras alternativas são possíveis:

Premissas	Conclusão
verd.	verd.
falsas	falsa
falsas	verd.

3. Linguagem da lógica e linguagem natural

Das discussões precedentes uma questão adquire particular importância:
Qual a relação entre a linguagem natural e a linguagem da lógica?

Uma **sentença** é uma expressão linguística que estabelece um **pensamento completo**. Usualmente são declarativas, interrogativas ou imperativas.

As sentenças **declarativas** tem por características serem **verdadeiras** ou **falsas**.

Do ponto de vista da lógica clássica, interessa-se apenas pelas sentenças declarativas.

Usualmente a lógica estabelece uma **linguagem artificial**, visando explicitar a forma lógica das sentenças declarativas. Esta linguagem é em geral simbólica, simples e regular.

O passo seguinte é estabelecer **relações de consequência** entre expressões desta linguagem.

4. O que é lógica

A definição de uma linguagem artificial é feita em duas etapas: definição de um **alfabeto** e estabelecimento de **regras de formação**. As expressões resultantes são chamadas de **fórmulas** da lógica.

Ex.: $\mathbf{(P \vee Q)}$ é uma fórmula;
$\rightarrow \mathbf{P \vee ((}$ não é uma fórmula.

Uma linguagem artificial terá utilidade se puder ser **interpretada**, ou seja, se fôr possível atribuir às suas fórmulas algum **significado**.

Nos problemas P1 e P2 a interpretação das fórmulas é clara

Uma **interpretação** é o processo pelo qual se associa a uma linguagem artificial um **significado**. Ao final deste processo, a toda fórmula da lógica será atribuído um **valor-verdade** (verdadeiro ou falso, 0 ou 1 etc.)

Se uma fórmula fôr verdadeira em **qualquer** interpretação possível então ela é dita uma **fórmula válida**.

Ex.: $P \rightarrow P$
$P \vee \neg P$

As fórmula válidas tem um papel central em lógica.

Um problema fundamental se apresenta: dadauma fórmula, como **decidir** se ela é ou não válida ?

Para alguns sistemas, é possível estabelecer um **procedimento finito** para responder a esta questão. Um exemplo típico é o Cálculo Proposicional, no qual estão expressos os problemas P1 e P2.

Para outros sistemas **não existe** tal procedimento.

Exemplo: Uma demonstração de um teorema matemático geralmente não é exaustiva. (Como “conferir” que em todos os triângulos retângulos o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos?)

Torna-se necessário propor um **sistema formal**
que permita obter as fórmulas válidas do sistema.

Um sistema formal tem por características principais,
não ser interpretado e ser definido por **regras estritas**.

Em razão destas características, a dedução de uma fórmula não estará sujeita aos erros provindos das interpretações. (A história da matemática, em particular do cálculo, exemplifica este tipo de erro.)

5. Sistemas Formais

Um sistema formal é constituído dos componentes:

- Uma **linguagem artificial**, constituída de um alfabeto e de regras de formação;
- Um conjunto de **regras de transformação** ou regras de inferência;
- Um conjunto de **axiomas**.

Uma **dedução** é uma sequência fórmulas onde cada fórmula ou é um axioma ou foi obtida a partir das fórmulas já presentes na sequência através da aplicação das regras de transformação. Uma fórmula é **dedutível** se ela aparecer em alguma dedução.

Dado um sistema lógico S, sejam:
V_S = conjunto das fórmulas válidas de S;
D_S = conjunto das fórmulas dedutíves de S.

S é dito **correto** sse: $D_S \subset V_S$
S é dito **completo** sse: $V_S \subset D_S$

Três figuras se destacam no desenvolvimento dos sistemas formais:

•**Hilbert**, que insistiu na questão da não-interpretação dos sistemas;

•**Cantor**, que propôs uma teoria de conjuntos;

•**Russel**, que tentou axiomatizar esta teoria a partir de postulados “ingênuos”.

Contudo, a teoria dos conjuntos baseada em axiomas “ingênuos” admite conjuntos muito “grandes”, e portanto contradições:

Antinomia de Russel: Seja T o conjunto de todos os conjuntos que não são membros deles próprios.
T pertence a ele próprio?

Solução: Axiomas não-ingênuos e perda do caráter “natural” da teoria dos conjuntos.

6. Os teoremas de Gödel

A Lógica Elementar

Cálculo Proposicional
(álgebra de Boole)

$\downarrow$

Cálculo de Predicados de 1ª ordem.

$\downarrow$

Cálculo de Predicados de ordem superior.
(contém praticamente toda a Matemática)

Todas as fórmulas do cálculo proposicional são decidíveis por um procedimento finito.

1º teorema de Gödel: O cálculo de predicados de 1ª ordem é correto e completo.

2º teorema de Gödel: O cálculo de predicados de ordem superior não pode ser consistente e completo.